

Логика. Решение экзаменационных задач.

Автор: учитель информатики и ИКТ
МБОУ «СОШ №9» г. Энгельса
Ивачева Мария Александровна

Немного теории...

- **Алгебра логики** – это раздел математики, изучающий высказывания со стороны их логических значений истинности или ложности.
- **Высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.
- **Пример:**
 - Москва – это столица России
 - Сейчас идет снег
 - Растения не выделяют кислород

Логические операции

1) Операция отрицания

$$\text{НЕ } A, \overline{A}, \neg A$$

| A | не A |
|---|------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

2) Логическое умножение (конъюнкция)

| A | B | A и B |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$A \text{ И } B, A \wedge B, A \& B$$

3) Логическое сложение (дизъюнкция)

| A | B | A или B |
|---|---|---------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$$A \text{ ИЛИ } B, A \vee B, A | B$$

Логические операции

4) Импликация (следование)

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

5) Эквивалентность

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

6) Исключающее ИЛИ

| A | B | $A \oplus B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Законы алгебры логики

| Конъюнкция | Дизъюнкция | Инверсия |
|--|--|---|
| $A \wedge \bar{A} = 0$ $A \wedge A = A$ $A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$ | $A \vee \bar{A} = 1$ $A \vee A = A$ $A \vee 1 = 1$ $A \vee 0 = A$ | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| Переместительный закон | Сочетательный закон | Распределительный закон |
| $A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$ | $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ |
| Закон инверсии | Формулы склеивания | Формулы поглощения |
| $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ | $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) = B$ $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) = B$ | $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (A \vee \bar{B}) = A$ |
| $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$ | $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ | |

Решение задач

Задача №1

Для какого числа X истинно высказывание:

$$((x < 4) \rightarrow (x < 3)) \wedge ((x < 3) \rightarrow (x < 1))$$

1)1 2)2 3)3 4)4

Решение:

Подставляем в выражение предложенные варианты ответа и определяем, истинно выражение или ложно:

$$1) x=1: ((1 < 4) \rightarrow (1 < 3)) \wedge ((1 < 3) \rightarrow (1 < 1)) = (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0)$$

Сначала вычислим выражение в скобках:

$$(1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0 \quad (\text{не подходит})$$

Аналогично подставляем другие варианты ответа, вычисляем:

$$2) x=2: ((2 < 4) \rightarrow (2 < 3)) \wedge ((2 < 3) \rightarrow (2 < 1)) = (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0 \quad (\text{не подходит})$$

$$3) x=3: ((3 < 4) \rightarrow (3 < 3)) \wedge ((3 < 3) \rightarrow (3 < 1)) = (1 \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow 0) = 0 \wedge 1 = 0 \quad (\text{не подходит})$$

$$4) x=4: ((4 < 4) \rightarrow (4 < 3)) \wedge ((4 < 3) \rightarrow (4 < 1)) = (0 \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow 0) = 1 \wedge 1 = 1 \quad (\text{подходит})$$

Ответ: 4.

Задача №2

Для какого имени ложно высказывание:

(первая буква гласная \wedge последняя буква согласная) \rightarrow \neg
(третья буква согласная)?

- 1) Дмитрий 2) Антон 3) Екатерина 4) Анатолий

Решение:

Подставляем в выражение предложенные варианты ответа и определяем, истинно выражение или ложно:

- 1) Дмитрий: $(0 \wedge 1) \rightarrow \neg(0) = 0 \rightarrow 1 = 1$ (не подходит)
2) Антон: $(1 \wedge 1) \rightarrow \neg(1) = 1 \rightarrow 0 = 0$ (подходит)
3) Екатерина: $(1 \wedge 0) \rightarrow \neg(0) = 0 \rightarrow 1 = 1$ (не подходит)
• Анатолий: $(1 \wedge 1) \rightarrow \neg(0) = 1 \rightarrow 1 = 1$ (не подходит)

Ответ: 2.

Задача №3

Построить таблицу истинности для следующей функции:

$$F(X,Y,Z)=(x \rightarrow y) \cdot z + \neg y$$

Решение:

1) Нарисуем таблицу на K строк, где $K=2^n$, n - количество высказываний в функции

$N=3$, $k=8$ строк

2) Запишем в таблице все варианты X, Y, Z и вычисляем выражение

по

действиям:

| X | Y | Z | $\neg Y$ | $X \rightarrow Y$ | $(X \rightarrow Y) \cdot Z$ | $F(X, Y, Z)$ |
|---|---|---|----------|-------------------|-----------------------------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Задача №4

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X,Y,Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |

$$1) \bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge Z \quad 2) X \wedge Y \wedge \bar{Z} \quad 3) \bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z \quad 4) X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}$$

Решение:

Подставляем значения X,Y,Z из таблицы в предложенные варианты ответа, сравниваем со значением F(X,Y,Z):

$$1) F(X, Y, Z) = \bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge Z$$

$$\bar{1} \wedge \bar{0} \wedge 0 = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

$$\bar{0} \wedge \bar{0} \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

$$\bar{0} \wedge \bar{1} \wedge 1 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$2) F(X, Y, Z) = X \wedge Y \wedge \bar{Z}$$

$$1 \wedge 0 \wedge \bar{0} = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$0 \wedge 0 \wedge \bar{1} = 0 \wedge 0 \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge 1 \wedge \bar{1} = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

$$3) F(X, Y, Z) = \bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z$$

$$\bar{1} \vee \bar{0} \vee 0 = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$$

$$\bar{0} \vee \bar{0} \vee 1 = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$$

$$\bar{0} \vee \bar{1} \vee 1 = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$$

$$4) F(X, Y, Z) = X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}$$

$$1 \vee \bar{0} \vee \bar{0} = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \vee \bar{0} \vee \bar{1} = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$$

$$0 \vee \bar{1} \vee \bar{1} = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$

Ответ: 4

Задача №5

Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$

3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$

4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Решение: применим отрицание к выражению в скобках в соответствии с законом инверсии:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C = (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

Ответ: 2.

Задача №6

Каково наименьшее натуральное число X , при котором истинно высказывание

$$(x \cdot (x - 1) < 99) \rightarrow ((x - 1) \cdot (x - 1) > 80)$$

Решение: Импликация ложна, когда первое выражение истинно, а второе ложно (см. таблицы истинности). Во всех остальных случаях импликация истинна. Первое выражение ложно для всех натуральных $x > 10$ и истинно для всех натуральных $x < 11$. Второе выражение истинно для всех натуральных $x > 9$ и ложно для всех натуральных $x < 10$. Следовательно, данная импликация истинна для всех натуральных $x > 9$. Наименьшее число, соответствующее этому условию $x = 10$.

Ответ: 10.

Задача №7

Найдите все тройки значения L,M,N, при которых указанное выражение принимает ложное значение.

$$L \rightarrow (M \vee N \vee L)$$

Решение:

Из таблицы истинности импликации получаем, что $L=0$, а

$$(M \vee N \vee L) = 1$$

Подставляем полученное значение L в выражение в скобках:

$$M \vee N \vee L = M \vee N \vee 0 = M \vee N \vee 1 = 1$$

Из таблицы истинности дизъюнкции следует,

что выражение $M \vee N$ истинно тогда и только тогда, когда $(M=1, N=0)$ или $(M=0, N=1)$ или $(M=1, N=1)$. Поскольку $L=0$, ответом будут все тройки $(L=0, M=1, N=0)$, $(L=0, M=0, N=1)$, $(L=0, M=1, N=1)$.

Ответ: $(L=0, M=1, N=0)$, $(L=0, M=0, N=1)$, $(L=0, M=1, N=1)$.

Задача №8

В таблице приведены запросы к поисковому серверу:

| | |
|----------|----------------------------------|
| 1 | живопись & литература |
| 2 | живопись литература |
| 3 | живопись литература графика |
| 4 | живопись & литература & графика |

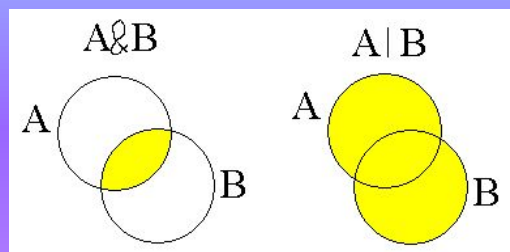
Расположите номера запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.

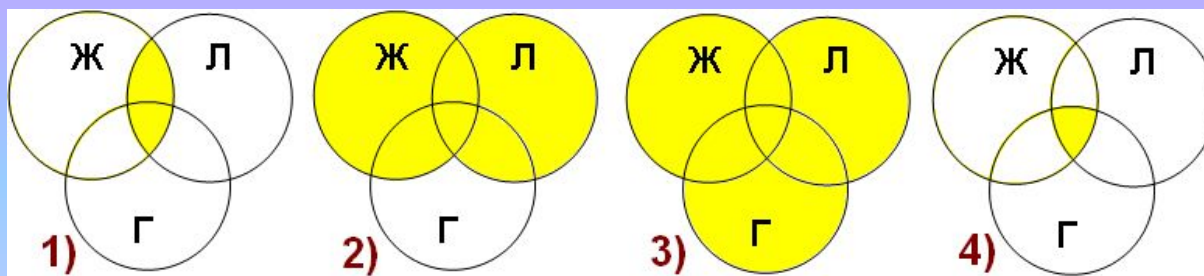
Задача №8

Решение:

Воспользуемся кругами Эйлера (диаграммами Вена):



| | |
|---|---------------------------------|
| 1 | живопись & литература |
| 2 | живопись литература |
| 3 | живопись литература графика |
| 4 | живопись & литература & графика |



Ответ: 4123.

Задача №9

В табличной форме представлен фрагмент базы данных о результатах тестирования учащихся :

| Фамилия | Пол | Математика | Русский язык | Химия | Информатика | Биология |
|------------|-----|------------|--------------|-------|-------------|----------|
| Аганян | ж | 82 | 56 | 46 | 32 | 70 |
| Воронин | м | 43 | 62 | 45 | 74 | 23 |
| Григорчук | м | 54 | 74 | 68 | 75 | 83 |
| Роднина | ж | 71 | 63 | 56 | 82 | 79 |
| Сергеенко | ж | 33 | 25 | 74 | 38 | 46 |
| Черепанова | ж | 18 | 92 | 83 | 28 | 61 |

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

а) «Пол='м' ИЛИ Химия>Биология»?

б) «Пол='м' И Химия>Биология»?

Задача №9

задания

| Фамилия | Пол | Математика | Русский язык | Химия | Информатика | Биология |
|------------|-----|------------|--------------|-------|-------------|----------|
| Аганян | ж | 82 | 56 | 46 | 32 | 70 |
| Воронин | м | 43 | 62 | 45 | 74 | 23 |
| Григорчук | м | 54 | 74 | 68 | 75 | 83 |
| Роднина | ж | 71 | 63 | 56 | 82 | 79 |
| Сергеенко | ж | 33 | 25 | 74 | 38 | 46 |
| Черепанова | ж | 18 | 92 | 83 | 28 | 61 |

Решение:

Первому условию $Пол='м'$ удовлетворяют записи №2, №3.

Второму условию $Химия > Биология$ удовлетворяют записи №2, №5, №6.

Значит условию « $Пол='м'$ ИЛИ $Химия > Биология$ » удовлетворяет 4 записи.

Условию « $Пол='м'$ И $Химия > Биология$ » удовлетворяет 1 запись.

Ответ: а) 4,
б) 1.



Задания

1) Для какого числа X истинно высказывание:

$$\neg((X < 5) \rightarrow (X > 1))$$

1)1 2)3 3)4 4)2

2) Для какого числа X истинно высказывание:

$$\neg((x > 3) \rightarrow (x > 4))$$

1)1 2)2 3)3 4)4

3) Для какого числа X истинно высказывание:

$$((x > 2) \vee (x < 2)) \rightarrow (x > 4)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

4) Для какого числа X истинно высказывание:

$$((x > 3) \vee (x < 3)) \rightarrow (x < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

5) Для какого числа X истинно высказывание:

$$(x > 4) \vee ((x > 1) \rightarrow (x > 4))$$

1)1 2)2 3)3 4)4

Задания



1) Для какого имени истинно высказывание:

¬(первая буква имени согласная → третья буква имени гласная)

1) КСЕНИЯ 2) ЮЛИЯ 3) ПЕТР 4) АЛЕКСЕЙ

2) Для какого имени истинно высказывание:

¬(первая буква имени гласная → четвертая буква имени согласная)

1) Антон 2) Федор 3) Елена 4) Вадим

3) Для какого имени истинно высказывание:

первая буква имени согласная ∧ (¬вторая буква имени согласная → четвертая буква имени гласная)

1) Иван 2) Петр 3) Елена 4) Павел

4) Для какого слова ложно высказывание:

¬(вторая буква согласная ∧ пятая буква гласная) →

(последняя буква согласная ∨ первая буква гласная)

1) кенгуру 2) антилопа 3) ящерица 4) крокодил

5) Для какого слова истинно высказывание:

¬(третья буква согласная ∧ четвертая буква гласная) →

(вторая буква согласная ∨ последняя буква гласная)

1) гаоцин 2) скворец 3) ласточка 4) моёвка



Задания

Заполните таблицу истинности логических выражений:

1) $A \vee \neg B \vee C$

2) $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$

3) $\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$

Задания



Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X, Y, Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

Какое выражение соответствует F?

1)

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$

2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$

3) $X \vee \neg Y \vee \neg Z$

4) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$

2)

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

2) $X \vee \neg Y \vee Z$

3) $X \wedge \neg Y \wedge Z$

4) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$

3)

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

1) $X \vee \neg Y \vee Z$

2) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

3) $X \vee \neg Y \vee Z$

4) $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$



Задания

1) Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$A \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge \neg D$$

1) $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$

2) $A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$

3) $A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg D$

4) $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

2) Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(A \wedge \neg B \wedge C)$$

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

2) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$

3) $\neg A \vee B \vee \neg C$

4) $A \vee \neg B \vee C$

3) Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

3) $A \vee \neg B \vee \neg C$

4) $A \vee B \vee \neg C$



Задания

1) Каково наименьшее натуральное число X , при котором истинно высказывание

$$(x \cdot (x + 2) < 50) \rightarrow (x \cdot x > 35)$$

2) Каково наибольшее целое число X , при котором ложно высказывание

$$(x \cdot (x + 1) > 55) \rightarrow (x \cdot x > 50)$$

3) Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание

$$(x \cdot (x + 1) > x \cdot x + 7) \rightarrow (x \cdot (x + 1) \leq x \cdot x + 7)$$

4) Каково наибольшее целое число X , при котором ложно высказывание

$$(9 \cdot x + 5 > 60) \rightarrow (x \cdot x > 80)$$

5) Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание

$$(x \cdot x - 1 > 100) \rightarrow (x \cdot (x - 1) < 100)$$



Задания

1) Найдите значения логических A, B, C, D , при которых указанное логическое выражение ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных A, B, C, D (в указанном порядке). Так, например, строка 0101 соответствует тому, что $A=0, B=1, C=0, D=1$.

a) $(A \wedge \neg B) \rightarrow (C \vee D)$

b) $\neg(A \vee B \vee C) \rightarrow (C \vee \neg D)$

2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \rightarrow L \rightarrow M) \rightarrow (L \rightarrow \neg M \rightarrow N) = 0$$

где K, L, M, N - логические переменные?

Задания



В таблицах приведены запросы к поисковому серверу:

1)

| | |
|---|--------------------------------------|
| А | Волейбол баскетбол подача |
| Б | Волейбол баскетбол подача блок |
| В | Волейбол баскетбол |
| Г | Волейбол & баскетбол & подача |

Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

2)

| | |
|---|---|
| А | Продажа принтеры |
| Б | Сервис продажа принтеры сканеры |
| В | Принтеры & сканеры & продажа & сервис |
| Г | (продажа принтеры) & (сервис сканеры) |

Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

3)

| | |
|---|--|
| А | Разведение & содержание & меченосцы & сомики |
| Б | Содержание & меченосцы |
| В | (Содержание & меченосцы) сомики |
| Г | Содержание & меченосцы & сомики |

Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.



Задания

- 1) Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных о погоде.

| Дата | Температура | Давление (мм рт. ст.) | Ветер (м/с) | Осадки |
|------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| 01.05.2010 | 17 | 754 | 9 | Нет |
| 02.05.2010 | 16 | 752 | 11 | Нет |
| 03.05.2010 | 14 | 749 | 15 | Нет |
| 04.05.2010 | 14 | 747 | 17 | Дождь |
| 05.05.2010 | 15 | 745 | 14 | Дождь |
| 06.05.2010 | 13 | 750 | 13 | Дождь |
| 07.05.2010 | 12 | 751 | 8 | Нет |
| 08.05.2010 | 15 | 749 | 5 | нет |

- а) Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию (Осадки=«дождь») ИЛИ (давление < 750)?
- б) Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию (Осадки=«дождь») И (давление \leq 750)?

К следующему заданию



Задания

2) В таблице приведены данные о составе и калорийности некоторых продуктов:

| Продукт | Вода | Белки | Жиры | Углеводы | Ккал |
|-----------|------|-------|------|----------|------|
| Абрикосы | 86 | 0,9 | 0 | 10,5 | 46 |
| Апельсины | 87,5 | 0,9 | 0 | 8,4 | 38 |
| Бананы | 74 | 1,5 | 0 | 22,4 | 91 |
| Брусника | 87 | 0,7 | 0 | 8,6 | 40 |
| Виноград | 80,2 | 0,4 | 0 | 17,5 | 69 |
| Вишня | 85,5 | 0,8 | 0 | 11,3 | 49 |

Сколько записей в данной таблице удовлетворяют условию:
Вода > 85 ИЛИ (белки + углеводы < 11 И ккал > 38) ?



Источники материалов:

- <http://s99-omsk.narod.ru/pupil/vip/i2003/i2003/logika/be.gif>
- <http://school.sgu.ru>
- П. А. Якушкин, С. С. Крылов, ЕГЭ 2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. М.: Эксмо, 2009
- П. А. Якушкин, В. Р. Лещинер, Информатика: типовые тестовые задания. М.: Экзамен, 2012
- Л. Н. Евич, С. Ю. Кулабухов, Информатика и ИКТ. 10-11 классы. Тематические тесты. Подготовка к ЕГЭ. Базовый, повышенный, высокий уровни: типовые тестовые задания. Ростов-на-Дону: Легион - М, 2011
- Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2012 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ