Логика. Решение экзаменационных задач.

Автор: учитель информатики и ИКТ
МБОУ «СОШ №9» г. Энгельса
Ивачева Мария Александровна

Немного теории…

- **Алгебра логики** – это раздел математики, изучающий высказывания со стороны их логических значений истинности или ложности.
- **Высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.
- **Пример:**
- Москва – это столица России
- Сейчас идет снег
- Растения не выделяют кислород

Логические операции

1) Операция отрицания

$$НЕ\ A,\ \overline{A},\ \neg A$$

A	не A
0	1
1	0

2) Логическое умножение (конъюнкция)

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A\ И\ B,\ A \wedge B,\ A \& B$$

3) Логическое сложение (дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$A\ ИЛИ\ B,\ A \vee B,\ A|B$$

Логические операции

4) Импликация (следование)

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) Эквивалентность

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6) Исключающее или

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Законы алгебры логики

Коньюнкция	Дизьюнкция	Инверсия
$A \wedge \bar{A} = 0$ $A \wedge A = A$ $A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$	$A \vee \bar{A} = 1$ $A \vee A = A$ $A \vee 1 = 1$ $A \vee 0 = A$	$\bar{\bar{A}} = A$
Переместительный закон	**Сочетательный закон**	**Распределительный закон**
$A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
Закон инверсии	**Формулы склеивания**	**Формулы поглащения**
$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge B) = A$ $(A \vee B) \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$
$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$	$A \Leftrightarrow B \; (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	

Решение задач

Задача №1

задания

Для какого числа X истинно высказывание:

((x<4)→(x<3))^((x<3)→(x<1))

1)1 2)2 3)3 4)4

Решение:

Подставляем в выражение предложенные варианты ответа и определяем, истинно выражение или ложно:

1) x=1: ((1<4)→(1<3))^((1<3)→(1<1))=(1→1)^(1→0)

Сначала вычислим выражение в скобках:

(1→1)^(1→0)=1^0=0 (не подходит)

Аналогично подставляем другие варианты ответа, вычисляем:

2) x=2: ((2<4)→(2<3))^((2<3)→(2<1))=(1→1)^(1→0)=1^0=0 (не подходит)

3) x=3: ((3<4)→(3<3))^((3<3)→(3<1))=(1→0)^(0→0)=0^1=0 (не подходит)

4) x=4: ((4<4)→(4<3))^((4<3)→(4<1))=(0→0)^(0→0)=1^1=1 (подходит)

Ответ: 4.

Задача №2

задания

Для какого имени ложно высказывание:

(первая буква гласная ^последняя буква согласная)→ ¬ (третья буква согласная)?

1) Дмитрий 2) Антон 3) Екатерина 4) Анатолий

Решение:

Подставляем в выражение предложенные варианты ответа и определяем, истинно выражение или ложно:

1) Дмитрий: (0 ^ 1)→ ¬(0)=0→1 = 1 (не подходит)
2) Антон: (1 ^ 1)→ ¬(1)=1→0 = 0 (подходит)
3) Екатерина: (1 ^ 0)→ ¬(0)=0→1 = 1 (не подходит)

- Анатолий: (1 ^ 1)→ ¬(0)=1→1 = 1 (не подходит)

Ответ: 2.

Задача №3

задания

Построить таблицу истинности для следующей функции:

$$F(X,Y,Z)=(x\rightarrow y)\cdot z + \neg y$$

Решение:

1) Нарисуем таблицу на K строк, где $K=2^n$, n - количество высказываний в функции

N=3, k=8 строк

2) Запишем в таблице все варианты X,Y,Z и вычисляем выражение по действиям:

X	Y	Z	¬Y	X→Y	(X→Y)·Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Задача №4

задания

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X,Y,Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0

$$1)\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \quad 2)X \wedge Y \wedge \overline{Z} \quad 3)\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \quad 4)X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$$

Решение:

Подставляем значения X,Y,Z из таблицы в предложенные варианты ответа, сравниваем со значением F(X,Y,Z):

$$1)F(X,Y,Z) = \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z$$
$$\overline{1} \wedge \overline{0} \wedge 0 = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$
$$\overline{0} \wedge \overline{0} \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$
$$\overline{0} \wedge \overline{1} \wedge 1 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$2)F(X,Y,Z) = X \wedge Y \wedge \overline{Z}$$
$$1 \wedge 0 \wedge \overline{0} = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$
$$0 \wedge 0 \wedge \overline{1} = 0 \wedge 0 \wedge 0 = 0$$
$$0 \wedge 1 \wedge \overline{1} = 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

$$3)F(X,Y,Z) = \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z$$
$$\overline{1} \vee \overline{0} \vee 0 = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$$
$$\overline{0} \vee \overline{0} \vee 1 = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$$
$$\overline{0} \vee \overline{1} \vee 1 = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$$

$$4)F(X,Y,Z) = X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$$
$$1 \vee \overline{0} \vee \overline{0} = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$$
$$0 \vee \overline{0} \vee \overline{1} = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$$
$$0 \vee \overline{1} \vee \overline{1} = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$

Ответ: 4

задания

Задача №5

Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$

3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$

4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Решение: применим отрицание к выражению в скобках в соответствии с законом инверсии:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C = (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

Ответ: 2.

задания

Задача №6

Каково наименьшее натуральное число X, при котором истинно высказывание

$$(x\cdot(x-1)<99)\rightarrow((x-1)\cdot(x-1)>80)$$

Решение: Импликация ложна, когда первое выражение истинно, а второе ложно(см. таблицы истинности). Во всех остальных случаях импликация истинна. Первое выражение ложно для всех натуральных x>10 и истинно для всех натуральных x<11. Второе выражение истинно для всех натуральных x>9 и ложно для всех натуральных x<10. Следовательно, данная импликация истинна для всех натуральных x>9. Наименьшее число, соответствующее этому условию x=10.

Ответ: 10.

Задача №7

задания

Найдите все тройки значения L,M,N, при которых указанное выражение принимает ложное значение.

$$L \to (M \vee N \vee L)$$

Решение:

Из таблицы истинности импликации получаем, что L=0, а

$(M \vee N \vee L) = 1$

Подставляем полученное значение L в выражение в скобках:

$$M \vee N \vee L = M \vee N \vee 0 = M \vee N \vee 1 = 1$$

Из таблицы истинности дизъюнкции следует,

что выражение $M \vee N$ истинно тогда и только тогда, когда (M=1, N=0) или (M=0, N=1) или (M=1, N=1). Поскольку L=0, ответом будут все тройки (L=0, M=1, N=0), (L=0, M=0, N=1), (L=0,M=1, N=1).

Ответ: (L=0, M=1, N=0), (L=0, M=0, N=1), (L=0, M=1, N=1).

Задача №8

В таблице приведены запросы к поисковому серверу:

1	**живопись & литература**
2	живопись | литература
3	живопись | литература | графика
4	живопись & литература & графика

Расположите номера запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

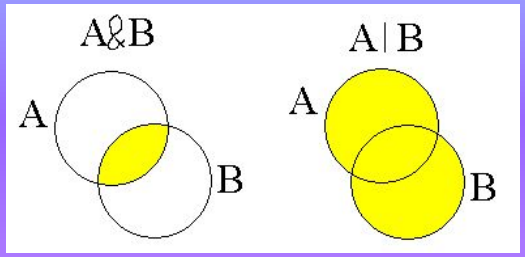
Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» − &.

задания

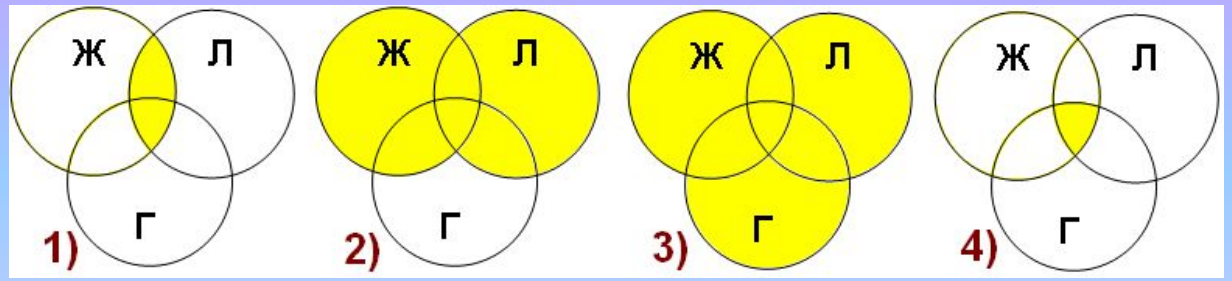
Задача №8

Решение:

Воспользуемся кругами Эйлера (диаграммами Вена):



1	**живопись & литература**
2	живопись | литература
3	живопись | литература | графика
4	живопись & литература & графика



Ответ: 4123.

Задача №9

В табличной форме представлен фрагмент базы данных о результатах тестирования учащихся :

Фамилия	Пол	Математика	Русский язык	Химия	Информатика	Биология
Аганян	ж	82	56	46	32	70
Воронин	м	43	62	45	74	23
Григорчук	м	54	74	68	75	83
Роднина	ж	71	63	56	82	79
Сергеенко	ж	33	25	74	38	46
Черепанова	ж	18	92	83	28	61

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

а) «Пол=’м’ ИЛИ Химия>Биология»?

б) «Пол=’м’ И Химия>Биология»?

Задача №9

задания

Фамилия	Пол	Математика	Русский язык	Химия	Информатика	Биология
Аганян	ж	82	56	46	32	70
Воронин	м	43	62	45	74	23
Григорчук	м	54	74	68	75	83
Роднина	ж	71	63	56	82	79
Сергеенко	ж	33	25	74	38	46
Черепанова	ж	18	92	83	28	61

Решение:

Первому условию *Пол='м'* удовлетворяют записи №2, №3.
Второму условию *Химия>Биология* удовлетворяют записи №2,№5,№6.

Значит условию *«Пол='м' ИЛИ Химия>Биология»* удовлетворяет 4 записи.
Условию *«Пол='м' И Химия>Биология»* удовлетворяет 1 запись.

Ответ: а) 4,
б) 1.

Задания

1) Для какого числа X истинно высказывание:

$$\neg((X < 5) \to (X > 1))$$

1)1 2)3 3)4 4)2

2) Для какого числа X истинно высказывание:

$$\neg((x > 3) \to (x > 4))$$

1)1 2)2 3)3 4)4

3) Для какого числа X истинно высказывание:

$$((x > 2) \vee (x < 2)) \to (x > 4)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

4) Для какого числа X истинно высказывание:

$$((x > 3) \vee (x < 3)) \to (x < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

5) Для какого числа X истинно высказывание:

$$(x > 4) \vee ((x > 1) \to (x > 4))$$

1)1 2)2 3)3 4)4

Задания

1) Для какого имени истинно высказывание:

$$\neg(\text{первая буква имени согласная} \rightarrow \text{третья буква имени гласная})$$

1) КСЕНИЯ 2) ЮЛИЯ 3) ПЕТР 4) АЛЕКСЕЙ

2) Для какого имени истинно высказывание:

$$\neg(\text{первая буква имени гласная} \rightarrow \text{четвертая буква имени согласная})$$

1) Антон 2) Федор 3) Елена 4) Вадим

3) Для какого имени истинно высказывание:

$$\text{первая буква имени согласная} \wedge (\neg\text{вторая буква имени согласная} \rightarrow \text{четвертая буква имени гласная})$$

1) Иван 2) Петр 3) Елена 4) Павел

4) Для какого слова ложно высказывание:

$$\neg(\text{вторая буква согласная} \wedge \text{пятая буква гласная}) \rightarrow$$
$$(\text{последняя буква согласная} \vee \text{первая буква гласная})$$

1) кенгуру 2) антилопа 3) ящерица 4) крокодил

5) Для какого слова истинно высказывание:

$$\neg(\text{третья буква согласная} \wedge \text{четвертая буква гласная}) \rightarrow$$
$$(\text{вторая буква согласная} \vee \text{последняя буква гласная})$$

1) гаоцин 2) скворец 3) ласточка 4) моёвка

Задания

Заполните таблицу истинности логических выражений:

1) $A \vee \neg B \vee C$

2) $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$

3) $\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$

Задания

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X,Y,Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.
Какое выражение соответствует F?

1)

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$	2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$	3) $X \vee \neg Y \vee \neg Z$	4) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$

2)

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1) $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$	2) $X \vee \neg Y \vee Z$	3) $X \wedge \neg Y \wedge Z$	4) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$

3)

X	Y	Z	F
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1

1) $X \vee Y \vee Z$	2) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$	3) $X \vee \neg Y \vee Z$	4) $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$

Задания

1) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$A \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge \neg D$$

1) $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$
2) $A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$
3) $A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg D$
4) $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

2) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(A \wedge \neg B \wedge C)$$

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
2) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$
3) $\neg A \vee B \vee \neg C$
4) $A \vee \neg B \vee C$

3) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$
2) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
3) $A \vee \neg B \vee \neg C$
4) $A \vee B \vee \neg C$

Задания

1) Каково наименьшее натуральное число X, при котором истинно высказывание

$$(x \cdot (x+2) < 50) \rightarrow (x \cdot x > 35)$$

2) Каково наибольшее целое число X, при котором ложно высказывание

$$(x \cdot (x+1) > 55) \rightarrow (x \cdot x > 50)$$

3) Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(x \cdot (x+1) > x \cdot x + 7) \rightarrow (x \cdot (x+1) \leq x \cdot x + 7)$$

4) Каково наибольшее целое число X, при котором ложно высказывание

$$(9 \cdot x + 5 > 60) \rightarrow (x \cdot x > 80)$$

5) Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(x \cdot x - 1 > 100) \rightarrow (x \cdot (x-1) < 100)$$

Задания

1) Найдите значения логических A,B,C,D, при которых указанное логическое выражение ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных A,B,C,D (в указанном порядке). Так, например, строка 0101 соответствует тому, что A=0, B=1, C=0, D=1.

a) $(A \wedge \neg B) \rightarrow (C \vee D)$

b) $\neg(A \vee B \vee C) \rightarrow (C \vee \neg D)$

2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \rightarrow L \rightarrow M) \rightarrow (L \rightarrow \neg M \rightarrow N) = 0$$

где K, L, M, N - логические переменные?

Задания

В таблицах приведены запросы к поисковому серверу:

1)

А	Волейбол | баскетбол | подача
Б	Волейбол | баскетбол | подача | блок
В	Волейбол | баскетбол
Г	Волейбол & баскетбол & подача

Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

2)

А	Продажа | принтеры
Б	Сервис | продажа | принтеры | сканеры
В	Принтеры & сканеры &продажа & сервис
Г	(продажа | принтеры) & (сервис | сканеры)

Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

3)

А	Разведение & содержание & меченосцы & сомики
Б	Содержание & меченосцы
В	(Содержание & меченосцы) | сомики
Г	Содержание & меченосцы & сомики

Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдёт поисковый сервер по каждому запросу.

Задания

1) Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных о погоде.

Дата	Температура	Давление (мм рт. ст.)	Ветер (м/с)	Осадки
01.05.2010	17	754	9	Нет
02.05.2010	16	752	11	Нет
03.05.2010	14	749	15	Нет
04.05.2010	14	747	17	Дождь
05.05.2010	15	745	14	Дождь
06.05.2010	13	750	13	Дождь
07.05.2010	12	751	8	Нет
08.05.2010	15	749	5	нет

а) Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию *(Осадки=«дождь») ИЛИ (давление < 750)?*

б) Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию *(Осадки=«дождь») И (давление ≤ 750)?*

К следующему заданию

Задания

2) В таблице приведены данные о составе и калорийности некоторых продуктов:

Продукт	Вода	Белки	Жиры	Углеводы	Ккал
Абрикосы	86	0,9	0	10,5	46
Апельсины	87,5	0,9	0	8,4	38
Бананы	74	1,5	0	22,4	91
Брусника	87	0,7	0	8,6	40
Виноград	80,2	0,4	0	17,5	69
Вишня	85,5	0,8	0	11,3	49

Сколько записей в данной таблице удовлетворяют условию:

Вода>85 ИЛИ (белки+углеводы<11 И ккал>38) ?

Источники материалов:

- http://s99-omsk.narod.ru/pupil/vip/i2003/i2003/logika/be.gif
- http://school.sgu.ru
- П. А. Якушкин, С. С. Крылов, ЕГЭ 2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. М.: Эксмо, 2009
- П. А. Якушкин, В. Р. Лещинер, Информатика: типовые тестовые задания. М.: Экзамен, 2012
- Л. Н. Евич, С. Ю. Кулабухов, Информатика и ИКТ. 10-11 классы. Тематические тесты. Подготовка к ЕГЭ. Базовый, повышенный, высокий уровни: типовые тестовые задания. Ростов-на-Дону: Легион - М, 2011
- Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2012 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ