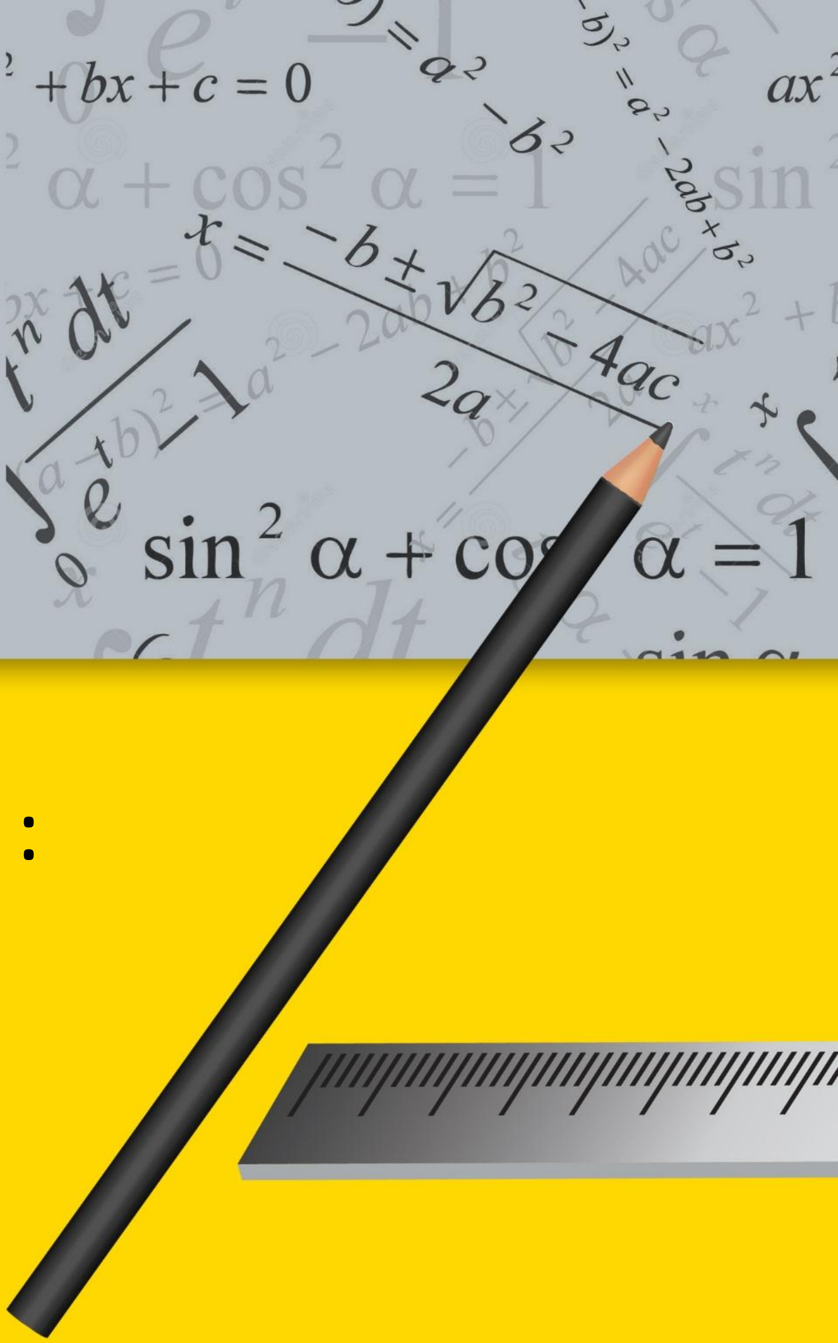


Презентация на тему :
« Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла »

«Свойства определенного интеграла»

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. $\int_a^b 1dx = b - a$

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k - константа;

3. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$;

5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

8. Если $f(x) \ge 0$ в интервале $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

«Формула Ньютона-Лейбница»

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ - *первообразная* функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

«Площадь криволинейной трапеции»

риволинейной трапеции

фигуры, ограниченной осью $0x$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции
нок 1), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

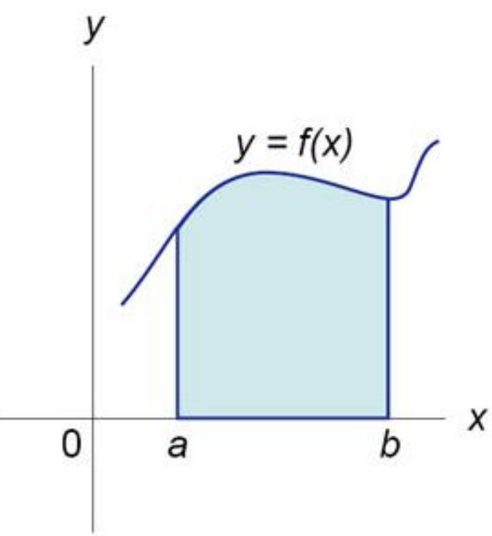


Рис.1

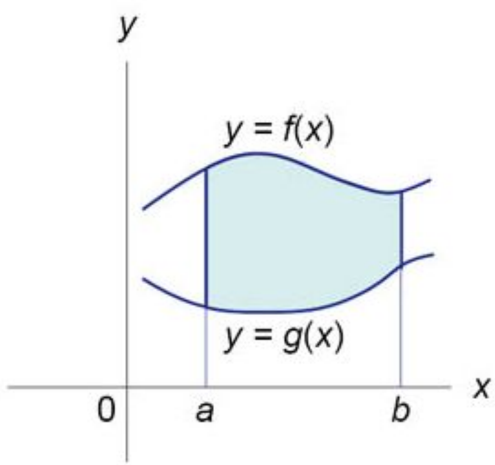


Рис.2

) и $G(x)$ - первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ на замкнутом
$[a, b]$, то площадь области, ограниченной двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и вертикальными
$= a$, $x = b$ (рисунок 2), определяется формулой

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$

«Замена переменной в определенном и

Замена переменной в определенном интеграле

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ по переменной x можно преобразовать в определенный интеграл относительно переменной t с помощью подстановки $x = g(t)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left(g(t)\right)g'(t)\,dx.$$

Новые пределы интегрирования по переменной t определяются выражениями

$$c = g^{-1}(a),\ \ d = g^{-1}(b),$$

где g^{-1} - обратная функция к g, т.е. $t = g^{-1}(x)$.

Интегрирование по частям для определенного интеграла

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

где $uv\Big|_a^b$ означает разность значений произведения функций uv при $x = b$ и $x = a$.

«Примеры »

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right) dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right) dt$.

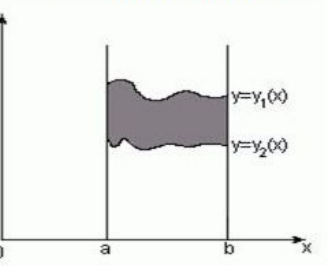
Решение.

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right) dt = \int_0^1 \left(t^{1/3} - t^{1/2}\right) dt = \left(\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3t^{4/3}}{4} - \frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

«Приложения определенного интеграла»

Приложения определенного интеграла.

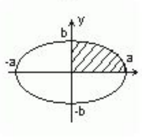
1. Вычисление площади криволинейной трапеции.



$$S:\left\{(x,y):\begin{array}{c} a\le x\le b \\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{array}\right.$$

$y_1(x), y_2(x)\in[a,b]$.

$$|S|=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx$$



Пример. Вычислить площадь ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

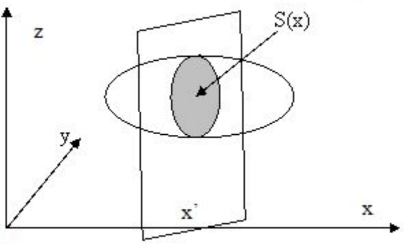
Ввиду очевидной симметрии эллипса относительно осей координат, достаточно вычислить четвёртую часть площади, расположенную в правом верхнем квадранте.

Из уравнения эллипса находим y как функцию от x: $y(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Тогда площадь эллипса вычисляем по формуле:

$|S|=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx.$ Сделав замену $x=a\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, получим интеграл: $S=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=\pi ab.$

2. Вычисление объёмов тела, площади сечения которых известны.



Пусть для некоторого тела в пространстве известно значение $S(x)$ – площади сечения этого тела плоскостью, проходящей через точку x' и параллельной плоскости OYZ.

Тогда объём этого тела может быть вычислен по формуле $V=\int_a^b S(x)dx.$

«Пример »

<u>Пример.</u> Вычислить объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

В сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через точку x, $-a\le x\le x$, параллельной плоскостью OYZ будет эллипс: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1.$

Как было доказано в предыдущем примере, площадь $S(x)$ этого эллипса равна $S(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2}).$
Следовательно, объём эллипсоида можно вычислить по формуле:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})=\frac{4}{3}\pi abc.$$

<u>3. Вычисление длинны дуги плоской кривой.</u>
Пусть кривая Г задана на плоскости OXY уравнением y=y(x), $x\in[a,b]$ и $y'(x)\in C[a,b]$.
Тогда длинна этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить длину окружности $x^2+y^2=R^2$.
В силу симметрии окружности относительно осей координат, достаточно длину четверти окружности, лежащей в первом квадранте. Выражая из уравнения окружности y как функцию от x:

$y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ и подставляя значение $y'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ в формулу для вычисления длинны дуги кривой, получим равенство:

$$|\Gamma_{окр}|=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4\int_0^R\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=2\pi R.$$

<u>4. Вычисление площади поверхностей вращения плоской кривой вокруг неподвижной оси.</u>
Пусть кривая Г, заданная как и выше уравнением $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, $y'(x)\in C[a,b]$, вращается вокруг оси OX. Тогда площадь поверхности вращения этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|S_{OX}|=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Площадь поверхности сферы можно представить как площадь поверхности вращения кривой $y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\le R$ вокруг оси OX.
Пользуясь формулой для площади поверхности вращения кривой вокруг оси OX, получим значение площади поверхности сферы:

$$|S_{сферы}|=2\pi\int_{-R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}\,dx=4\pi R^2.$$

«Спасибо за внимание
»