

Презентация на тему :
« Определенный
интеграл.
Приложение
определенного
интеграла »



«Свойства определенного интеграла»

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

$$1. \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$2. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k - \text{константа};$$

$$3. \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b;$$

$$5. \text{Если } 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } 0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$6. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$7. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$8. \text{Если } f(x) \geq 0 \text{ в интервале } [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

«Формула Ньютона-Лейбница»

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

«Площадь криволинейной трапеции»

криволинейной трапеции

фигуры, ограниченной осью Ox , двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции (рис. 1), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

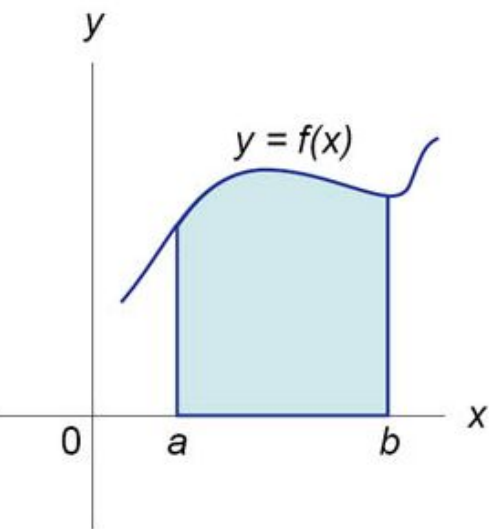


Рис.1

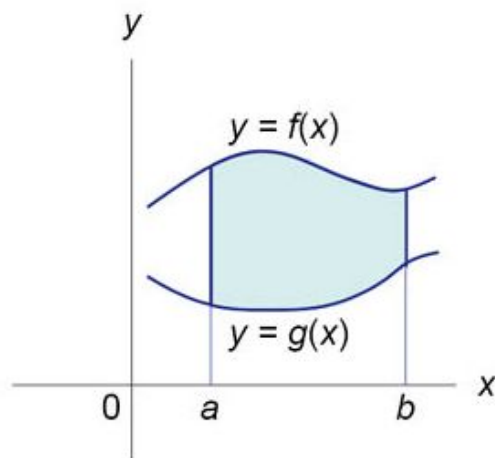


Рис.2

$F(x)$ и $G(x)$ - первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ на замкнутом $[a, b]$, то площадь области, ограниченной двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и вертикальными $x = a$, $x = b$ (рисунок 2), определяется формулой

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$



«Замена переменной в определенном

Замена переменной в определенном интеграле

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ по переменной x можно преобразовать в определенный интеграл относительно переменной t с помощью подстановки $x = g(t)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt.$$

Новые пределы интегрирования по переменной t определяются выражениями

$$c = g^{-1}(a), \quad d = g^{-1}(b),$$

где g^{-1} - обратная функция к g , т.е. $t = g^{-1}(x)$.

Интегрирование по частям для определенного интеграла

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv \Big|_a^b$ означает разность значений произведения функций uv при $x = b$ и $x = a$.

«Примеры



Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt$.

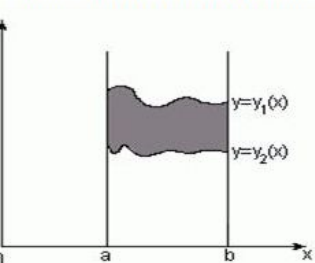
Решение.

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt = \int_0^1 (t^{1/3} - t^{1/2}) dt = \left(\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{3t^{4/3}}{4} - \frac{2t^{3/2}}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

«Приложения определенного интеграла»

Приложения определенного интеграла.

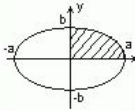
1. Вычисление площади криволинейной трапеции



$$S: \begin{cases} (x, y): & a \leq x \leq b \\ & y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

$$y_1(x), y_2(x) \in [a, b].$$

$$|S| = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$$



Пример. Вычислить площадь ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Ввиду очевидной симметрии эллипса относительно осей координат, достаточно вычислить четвертую часть площади, расположенную в правом верхнем квадранте.

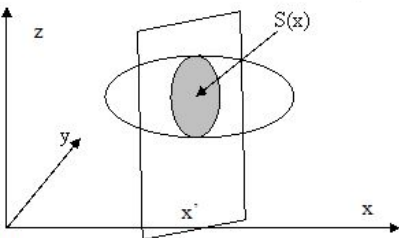
Из уравнения эллипса находим y как функцию от x : $y(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Тогда площадь эллипса вычисляем по формуле:

$$|S| = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx. \quad \text{Сделаем замену } x = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ получим интеграл:}$$

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \pi ab.$$

2. Вычисление объёмов тела, площади сечения которых известны.



Пусть для некоторого тела в пространстве известно значение $S(x)$ — площади сечения этого тела плоскостью, проходящей через точку x' и параллельной плоскости OYZ.

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Тогда объём этого тела может быть вычислен по формуле

«Пример

»

Пример. Вычислить объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

В сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через точку x , $-a \leq x \leq a$, параллельной плоскости OYZ будет эллипс: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})} = 1$.

Как было доказано в предыдущем примере, площадь $S(x)$ этого эллипса равна $S(x) = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$.
Следовательно, объём эллипсоида можно вычислить по формуле:

$$V = \int_{-a}^a \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

3. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Пусть кривая Γ задана на плоскости OXY уравнением $y=y(x)$, $x \in [a, b]$ и $y'(x) \in C[a, b]$.

Тогда длина этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Пример. Вычислить длину окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

В силу симметрии окружности относительно осей координат, достаточно длину четверти окружности, лежащей в первом квадранте. Выражая из уравнения окружности y как функцию от x :

$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ и подставляя значение $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ в формулу для вычисления длины дуги кривой, получим равенство:

$$|\Gamma_{\text{опр}}| = 4 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 2\pi R.$$

4. Вычисление площади поверхностей вращения плоской кривой вокруг неподвижной оси.

Пусть кривая Γ , заданная как и выше уравнением $y=y(x)$, $x \in [a, b]$, $y'(x) \in C[a, b]$, вращается вокруг оси OX. Тогда площадь поверхности вращения этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|S_{\text{OX}}| = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Пример. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Площадь поверхности сферы можно представить как площадь поверхности вращения кривой $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $|x| \leq R$ вокруг оси OX.

Пользуясь формулой для площади поверхности вращения кривой вокруг оси OX, получим значение площади поверхности сферы:

$$|S_{\text{сферы}}| = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R^2.$$

«Спасибо за внимание
»

