

Пределы и раскрытия неопределенности

Бураковская Анастасия

СО-11

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$$

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Предел функции

- **Предел функции** . Число L называется пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

если для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое положительное число дельта зависящее от ϵ , что из условия $|x - a| < \text{Дельта}$ следует $|f(x) - L| < \epsilon$.



Неопределенности пределов

- При переходе к функциям более сложного вида мы обязательно столкнемся с появлением выражений, значение которых не определено. Такие выражения называют неопределенностями.



Основные виды неопределенностей

- ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$ (0 на 0),
бесконечность делить на
бесконечность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на
бесконечность $(0 \cdot \infty)$ бесконечность минус
бесконечность $(\infty - \infty)$, единица в степени
бесконечность (1^∞) , ноль в степени
ноль (0^0) бесконечность в степени
ноль (∞^0) .

! ВСЕ ДРУГИЕ ВЫРАЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ НЕ
ЯВЛЯЮТСЯ И ПРИНИМАЮТ ВПОЛНЕ КОНКРЕТНОЕ КОНЕЧНОЕ
ИЛИ БЕСКОНЕЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ.



Раскрывать неопределенности

- Позволяет:
 - упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);
 - использование замечательных пределов;
 - применение правила Лопиталя;
 - использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным (использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).



Правило Лопиталя

- **Правило Лопиталя** очень широко применяется для **вычисления пределов**, когда имеет место неопределенность вида ноль делить на ноль , бесконечность делить на бесконечность .
- К этим видам неопределенностей сводятся неопределенности ноль умножить на бесконечность и бесконечность минус бесконечность .
- Дифференцирование функции и нахождение производной является неотъемлемой частью **правила Лопиталя**, так что рекомендуем обращаться к этому разделу.
- **Формулировка правила Лопиталя** следующая:

- Если , $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$ или $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ и если функции $f(x)$ и $g(x)$ –

дифференцируемы в окрестности точки x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- **Совет:** В случае, когда неопределенность не исчезает после применения правила Лопиталя, то его можно применять вновь.

Замена эквивалентных бесконечно малых

- Замена производится на основе таблицы.
- Таблица эквивалентных бесконечно малых.

$\sin(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$\operatorname{tg}(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$\arcsin(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$\operatorname{arctg}(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$1 - \cos(\alpha(x))$	эквивалентна	$\frac{(\alpha(x))^2}{2}$
$\ln(1 + \alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)} - 1$	эквивалентна	$\alpha(x) \ln a$
$(1 + \alpha(x))^p - 1$	эквивалентна	$p\alpha(x)$
$(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{p}} - 1$	эквивалентна	$\frac{\alpha(x)}{p}$

Таблица неопределенностей.

- Эта таблица вместе с таблицей пределов основных элементарных функций будут Вашими главными инструментами при нахождении любых пределов.

Виды неопределенностей	Методы нахождения предела
$\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$	<p>Пробуем преобразовать и упростить выражение.</p> <p>Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяем первый замечательный предел.</p> <p>Если не помогает, то используем правило Лопиталья или таблицу эквивалентных бесконечно малых.</p>
$\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$	<p>Пробуем преобразовать и упростить выражение.</p> <p>Если не помогает, то используем правило Лопиталья.</p>
$\langle 0 \cdot \infty \rangle$ или $\langle \infty - \infty \rangle$	<p>Преобразуем неопределенность к виду $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$ или $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$, затем применяем правило Лопиталья.</p>
$\langle 1^\infty \rangle$	<p>Применяем второй замечательный предел.</p>
$\langle 0^0 \rangle$ или $\langle \infty^0 \rangle$	<p>Логарифмируем выражение и используем равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$</p>

Примеры №1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^{10} + 56x^7 + 12}}$$

- Решения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^{10} + 56x^7 + 12}} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$$

- Степень числителя 3, степень знаменателя 10/3. Разделим и числитель и знаменатель на

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^{10} + 56x^7 + 12}} &= \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^3}}{\sqrt[3]{\frac{x^{10} + 56x^7 + 12}{x^3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{10}{3}}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{56}{x^3} + \frac{12}{x^{10}}}}} = \frac{0 + 0 - 0}{\sqrt[3]{1 + 0 + 0}} = 0 \end{aligned}$$

- Ответ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^{10} + 56x^7 + 12}} = 0$$

№2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

- Решения
- Подставляем значения

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1^2 - 1}{\sqrt{1} - 1} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$$

- Пришли к неопределенности. Смотрим в таблицу неопределенностей для выбора метода решения. Попробуем упростить выражение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x-1)} \sqrt{(x-1)}(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} ((x+1)\sqrt{x-1}) =$$

$$= (1+1)\sqrt{1-1} = 2 \cdot 0 = 0$$

- Ответ:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 0$$

TUDENTS

**Спасибо за внимания!
Удачного дня.**

