Пределы и раскрытия неопределенности

Бураковская Анастасия

СО-11

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Предел функции

- ***Предел функции*** . *Число L называется пределом функции y = f (x) при x, стремящемся к a :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

если для любого E > 0 *найдётся такое положительное число* дельта *зависящее от* E *, что из условия* | *x- a* | < Дельта *следует*

| $f(x) - L$ | < E.

Неопределенности пределов

- При переходе к функциям более сложного вида мы обязательно столкнемся с появлением выражений, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями**.

Основные виды неопределенностей

- ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$ (*0 на 0*),

бесконечность делить на бесконечность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0 \cdot \infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty - \infty)$, единица в степени бесконечность (1^{∞}), ноль в степени ноль (0^{0}), бесконечность в степени ноль (∞^{0}).

!ВСЕ ДРУГИЕ ВЫРАЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ И ПРИНИМАЮТ ВПОЛНЕ КОНКРЕТНОЕ КОНЕЧНОЕ ИЛИ БЕСКОНЕЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

Раскрывать неопределенности

- Позволяет:

--упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);

--использование замечательных пределов;

--применение правила Лопиталя;

--использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным(использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Правило Лопиталя

- **Правило Лопиталя** очень широко применяется для **вычисления пределов**, когда имеет место неопределенность вида ноль делить на ноль , бесконечность делить на бесконечность .
- К этим видам неопределенностей сводятся неопределенности ноль умножить на бесконечность и бесконечность минус бесконечность .
- Дифференцирование функции и нахождение производной является неотъемлемой частью **правила Лопиталя**, так что рекомендуем обращаться к этому разделу.
- **Формулировка правила Лопиталя** следующая:
- Если , $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle$ *или* $\left\langle\dfrac{\infty}{\infty}\right\rangle$ и если функции *f(x)* и *g(x)* –

дифференцируемы в окрестности точки x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

- Совет: В случае, когда неопределенность не исчезает после применения правила Лопиталя, то его можно применять вновь.

Замена эквивалентных бесконечно малых

- Замена производится на основе таблицы.
- **Таблица эквивалентных бесконечно малых**.

$\sin(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$tg(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$\arcsin(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$arctg(\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$1-\cos(\alpha(x))$	эквивалентна	$\frac{(\alpha(x))^2}{2}$
$\ln(1+\alpha(x))$	эквивалентна	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1$	эквивалентна	$\alpha(x)\ln a$
$(1+\alpha(x))^p-1$	эквивалентна	$p\alpha(x)$
$(1+\alpha(x))^{\frac{1}{p}}-1$	эквивалентна	$\frac{\alpha(x)}{p}$

Таблица неопределенностей.

- Эта таблица вместе с таблицей пределов основных элементарных функций будут Вашими главными инструментами при нахождении любых пределов.

Виды неопределенностей	Методы нахождения предела
$\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$	Пробуем преобразовать и упростить выражение. Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяем первый замечательный предел. Если не помогает, то используем правило Лопиталя или таблицу эквивалентных бесконечно малых.
$\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$	Пробуем преобразовать и упростить выражение. Если не помогает, то используем правило Лопиталя.
$\langle 0 \cdot \infty \rangle$ или $\langle \infty - \infty \rangle$	Преобразуем неопределенность к виду $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$ или $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$, затем применяем правило Лопиталя.
$\langle 1^{\infty} \rangle$	Применяем второй замечательный предел.
$\langle 0^{0} \rangle$ или $\langle \infty^{0} \rangle$	Логарифмируем выражение и используем равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$

Примеры №1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-1}{\sqrt[3]{x^{10}+56x^7+12}}$$

- Решения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-1}{\sqrt[3]{x^{10}+56x^7+12}}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$$

- Степень числителя *3*, степень знаменателя *10/3*. Разделим и числитель и знаменатель на

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-1}{\sqrt[3]{x^{10}+56x^7+12}}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^{\frac{10}{3}}}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^{10}+56x^7+12}}{x^{\frac{10}{3}}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{10}{3}}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{56}{x^3}+\dfrac{12}{x^{10}}}}=\frac{\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{56}{\infty}+\dfrac{12}{\infty}}}=\frac{0+0-0}{\sqrt[3]{1+0+0}}=0$$

- Ответ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-1}{\sqrt[3]{x^{10}+56x^7+12}}=0$$

№2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$$

- Решения
- Подставляем значения

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1^2-1}{\sqrt{1-1}}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

- Пришли к неопределенности. Смотрим в таблицу неопределенностей для выбора метода решения. Пробуем упростить выражение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)}\sqrt{(x-1)}(x+1)}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left((x+1)\sqrt{x-1}\right)=$$

$$=(1+1)\sqrt{1-1}=2\cdot 0=0$$

- Ответ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=0$$

Спасибо за внимания!
Удачного дня.