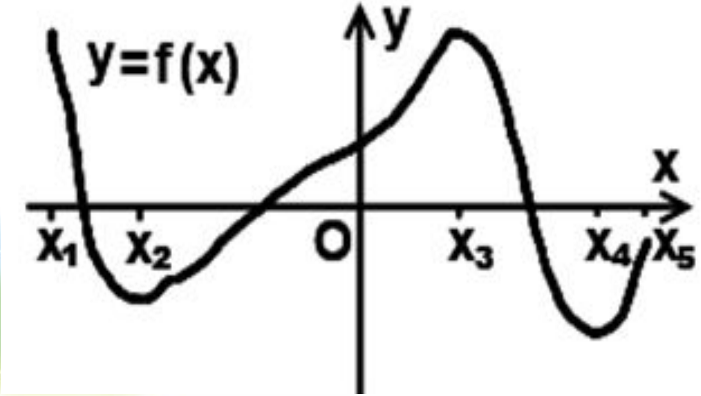
Производная функции. Её составляющие.

- Экстремумы
- точки перегиба
- геометрический смысл
- и многое другое..



Гапонов Д.С.
гр. СО-11

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $y'(x)$

Определение производной

Определение

Производной $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

или

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Пример

Задание. Найти производную функции $y = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдем приращение заданной функции в точке x_0 :

$$\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0) = y(\Delta x) - y(0) =$$

$$= (\Delta x)^2 + 3\Delta x - 0 = \Delta x(\Delta x + 3)$$

Тогда

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 0 + 3 = 3$$

Ответ. $y'(0) = 3$

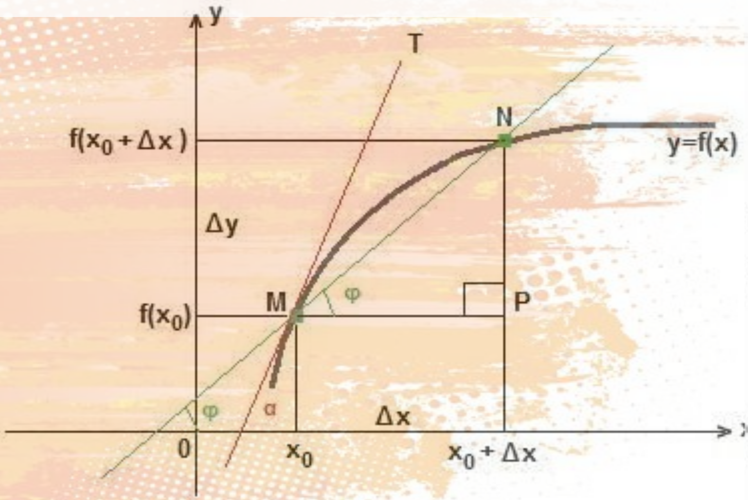
Δy

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной заключается в том, что численно производная функции в данной точке равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной через эту точку к данной кривой, и положительным направлением оси **Ox**:

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ или $f'(x_0) = k$

k - угловой коэффициент касательной.



Найти угол наклона касательной к графику функции **y=f (x)** в точке x_0, если $f'(x_0) = 1$.

Решение.

Значение производной в точке касания x_0 и есть значение тангенса угла наклона касательной (геометрический смысл производной). Имеем: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45°$, так как $\operatorname{tg}45° = 1$.

Ответ: касательная к графику данной функции образует с положительным направлением оси Ох угол, равный **45°**.

Физический смысл, диффиринцируемость

Физический смысл производной

Если x = f(t) — закон прямолинейного движения точки, то x' = f'(t) — скорость этого движения в момент времени t. **Быстрота протекания** физических, химических и других **процессов выражается с помощью производной**.

Если отношение dy/dx при x->x0 имеет предел справа (или слева), то он называется производной справа (соответственно производной слева). *Такие пределы называются односторонними производными.*

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Очевидно, функция f{x) определенная в некоторой окрестности точки x0, имеет производную f'{x) тогда и только тогда, когда односторонние производные существуют и равны между собой.

Производная функции, согласно ее математического определения (5) и (6) – это некий предел. Но, как и всякий предел, он может оказаться:

а) конечным; б) бесконечным; в) вообще не существовать.

Если для данного *x* имеет место вариант (а), то есть если при заданном *x* производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ *существует и конечна*, то эта функция называется *дифференцируемой в точке x*.

Функция, дифференцируемая в *каждой точке x* некоторого промежутка оси *ox* (например, интервала (*a*; *b*) или отрезка [*a*; *b*]) называется *дифференцируемой на этом промежутке*. Кстати, сама процедура вычисления производной функции называется ее *дифференцированием* (продифференцировать функцию – это значит найти ее производную).

Дифференцирование функции

$C'=0,$

$(kx+b)'=k,$

$(x^r)'=rx^{r-1},$

$(e^x)'=e^x,$

$(a^x)'=a^x\ln a,$

$(\ln x)'=\frac{1}{x},$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},$

$(\sin x)'=\cos x,$

$(\cos x)'=-\sin x,$

$(\mathrm{tg}\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$

$(\mathrm{ctg}\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$

$(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$(\mathrm{arctg}\, x)'=(-\mathrm{arcctg}\, x)'=\frac{1}{1+x^2}.$

C - любое число;
U, V - любая функция.

1. $C' = 0$
2. $(CU)' = CU'$
3. $(U+V)' = U' + V'$
4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

При решении задач дифференцирования приходится искать производные функций различных классов. Мы рассмотрим основные **правила дифференцирования**, которые используем при нахождении производных. Обязательно остановимся на подробном решении примеров, чтобы понять принцип их применения.

Дифферинцирование функции. Сложная производная. Примеры

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'.$
2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$
3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'.$
5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'.$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
8. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$
12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u$
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
17. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
18. $(\operatorname{th} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

Задание. Найти производную сложной функции $y = \sqrt{x^2 - 3x + 17}$

Решение. Используем правила дифференцирования и таблицу производных сложных функций:

$$y' = \left(\sqrt{x^2 - 3x + 17}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot (x^2 - 3x + 17)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot \left[(x^2)' - (3x)' + (17)'\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot \left[2x^{2-1} - 3 \cdot (x)' + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot (2x - 3 \cdot 1) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}}$$

Ответ. $y' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}}$

Основные понятия : критические точки, экстремумы, тд. и зачем мы исследуем

Критическими точками функции называют внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Первое достаточное условие экстремума

Теорема

(Первое достаточное условие экстремума)

Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1. функция непрерывна в окрестности точки x_0;
2. $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует;
3. производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак.

Тогда в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса на минус.

Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то экстремума в точке $x = x_0$ нет.

Таким образом, для того чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на экстремум, необходимо:

1. найти производную $f'(x)$;
2. найти критические точки, то есть такие значения x, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует;
3. исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки;
4. найти значение функции в экстремальных точках.

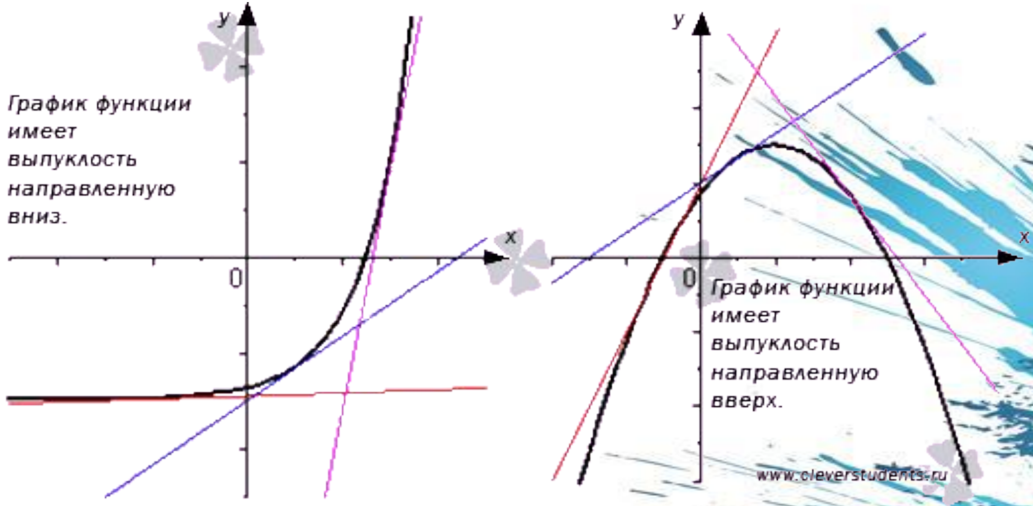
Точки перегиба, выпуклость и вогнутость

Определение.

Дифференцируемая функция называется **выпуклой вниз** на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.

Определение.

Дифференцируемая функция называется **выпуклой вверх** на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.



Выпуклую вверх функцию часто называют **выпуклой**, а выпуклую вниз – **вогнутой**. Посмотрите на чертеж, иллюстрирующий эти определения, он слева.

Точки перегиба

Пример решения задачи на обнаружения перегиба и выпуклостей

Пример

Задание. Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1$

Решение. Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1\right)'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3\right)' = x - 2$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:

$$\underset{}{-} \quad \xrightarrow[\quad 2 \quad]{} \quad + \quad x$$

Так как на промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ выпукла; в силу того, что на промежутке $(2; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$ - функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x = 2$ - точка перегиба графика функции.

На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла, на промежутке $(2; +\infty)$ функция вогнута.

Сподіваюся, що вам сподобалося

Миру вам)))

The end.