
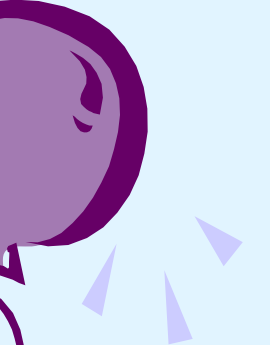




Тема 1. «Матрицы и действия над ними»

Основные понятия:

1. Определение матрицы
 2. Виды матриц
 3. Действия над матрицами
- 
- 

1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

a_{ij} — элементы матрицы.


Размер матрицы

Главная диагональ матрицы

Побочная диагональ матрицы

2. Виды матриц

- Прямоугольная
- Квадратная
- Нулевая
- Единичная
- Диагональная
- Симметричная
- Вырожденная
- Равные
- Треугольная
- Квазитреугольная (ступенчатая или трапециевидная)
- Матрица-строка или строчная матрица
- Матрица-столбец или столбцевая матрица





Матрица называется *прямоугольной*, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$




Матрица называется *квадратной*, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$


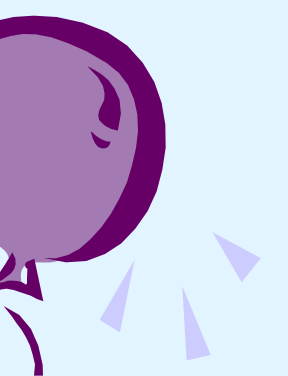


Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы нулевые :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :


$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


Квадратная матрица называется **диагональной**, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:


$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется **симметричной**, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$:

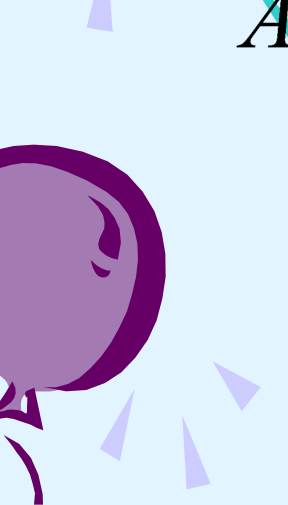
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$



Квадратная матрица называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.



Матрицы A и B (одинаковых размерностей) называются **равными**, если $a_{ij} = b_{ij}$:


$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes \text{ или } \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются *треугольными*.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1m} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & a_{2m} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{mm} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **квazitреугольной** (ступенчатая или трапециевидная)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$



Матрица, состоящая из одной строки называется *матрицей-строкой* или *строчной матрицей*.

$$A = (1 \quad 2 \quad -3 \quad 0)$$



Матрица, состоящая из одного столбца называется *матрицей-столбцом* или *столбцовой матрицей*.

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Операции над матрицами

Линейные:

- 1) Сумма (разность) матриц;
- 2) Произведение матрицы на число.

Нелинейные:

- 1) Транспонирование матрицы;
- 2) Умножение матриц;
- 3) Нахождение обратной матрицы.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Пример



Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

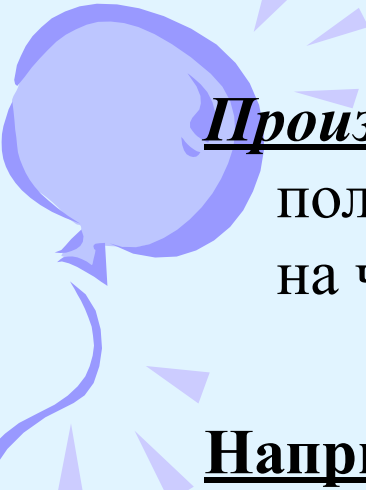

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$

Ответ





Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

Например:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$



Пример





Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $A + 0 = A$


4) $A + (-A) = 0$

5) $1 \cdot A = A$

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

8) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$



Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Свойства

Умножение матриц определяется для **согласованных** матриц.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k} = (c_{ij})$ для которой

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

т.е. каждый элемент матрицы C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .



Спасибо за внимание!

**Презентацию подготовил студент
группы СО-11**

Бирюков Владислав