Тема 1. «Матрицы и действия над ними»

Основные понятия:

1. Определение **матрицы**
2. **Виды** матриц
3. **Действия** над матрицами

1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \ldots & \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \ldots & \grave{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \grave{a}_{m1} & \grave{a}_{m2} & \ldots & \grave{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

$\grave{a}_{ij}$ **элементы** матрицы.

Размер матрицы

Главная диагональ матрицы

Побочная диагональ матрицы

2. Виды матриц

- Прямоугольная
- Квадратная
- Нулевая
- Единичная
- Диагональная
- Симметричная
- Вырожденная
- Равные
- Треугольная
- Квазитреугольная (ступенчатая или трапециевидная)
- Матрица-строка или строчная матрица
- Матрица-столбец или столбцевая матриц

Матрица называется ***прямоугольной***, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***квадратной***, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***нулевой***, если все ее элементы нулевые :

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***единичной***, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***симметричной***, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***вырожденной***, если ее <u>определитель</u> равен нулю.

Матрицы А и В (одинаковых размерностей) называются ***равными***, если $a_{ij} = b_{ij}$:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются ***треугольными***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется ***квазитреугольной*** (ступенчатая или трапециевидная)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки называется ***матрицей-строкой*** или ***строчной матрицей***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется ***матрицей-столбцом*** или ***столбцевой матрицей***

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Линейные:
1) Сумма (разность) матриц;
2) Произведение матрицы на число.

Нелинейные:
1) Транспонирование матрицы;
2) Умножение матриц;
3) Нахождение обратной матрицы.

<u>Суммой (разностью)</u> двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

<u>Например:</u>

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} + b_{11} & \grave{a}_{12} + b_{12} & \grave{a}_{13} + b_{13} \\ \grave{a}_{21} + b_{21} & \grave{a}_{22} + b_{22} & \grave{a}_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

<u>Пример</u>

Пример

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$

<u>Ответ</u>

__Произведением матрицы на число__ называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

__Например:__

$$\alpha \cdot \grave{A} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot \grave{a}_{11} & \alpha \cdot \grave{a}_{12} & \alpha \cdot \grave{a}_{13} \\ \alpha \cdot \grave{a}_{21} & \alpha \cdot \grave{a}_{22} & \alpha \cdot \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

__Пример__

Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

1) $A + B = B + A$

2) $\left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right)$

3) $A + 0 = A$

4) $A + \left(-A\right) = 0$

5) $1 \cdot A = A$

6) $\alpha \cdot \left(\beta \cdot A\right) = \left(\alpha \cdot \beta\right) \cdot A$

7) $\alpha \cdot \left(A + B\right) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

8) $\left(\alpha + \beta\right) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, т**ранспонированной** относительно данной.

Например:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{21} \\ \grave{a}_{12} & \grave{a}_{22} \\ \grave{a}_{13} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

Свойства

Умножение матриц определяется для <u>***согласованных***</u> матриц.

<u>***Произведением***</u> матрицы $\grave{A}_{m\times n}=\left(\grave{a}_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times k}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times k}=\left(c_{ij}\right)$, для которой

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

т.е. каждый элемент матрицы С равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы А на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы В.

Спасибо за внимание!

Презентацию подготовил студент группы СО-11

Бирюков Владислав