

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»



«Факультет математики и естественных наук»

Курс «Линейная алгебра»

Лекция. «Кривые II порядка на плоскости»

Автор Тюриков А.В., доц. Каф. «Высшая математика»

Ижевск
2015

Эллипс, гипербола и парабола

1. Эллипс

Определение. Эллипсом называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

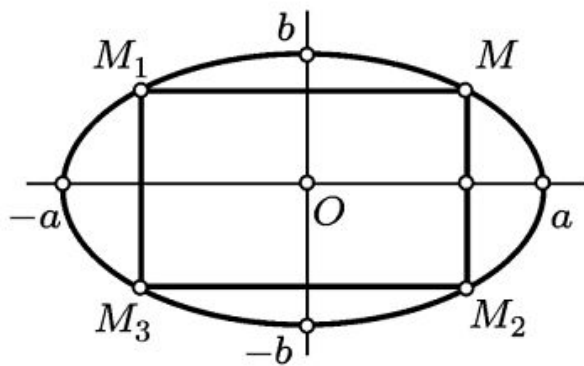
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

при условии $a \geq b > 0$.

Из уравнения (1) следует, что для всех точек эллипса $|x| \leq a$ и $|y| \leq b$. Значит, эллипс лежит в прямоугольнике со сторонами $2a$ и $2b$.

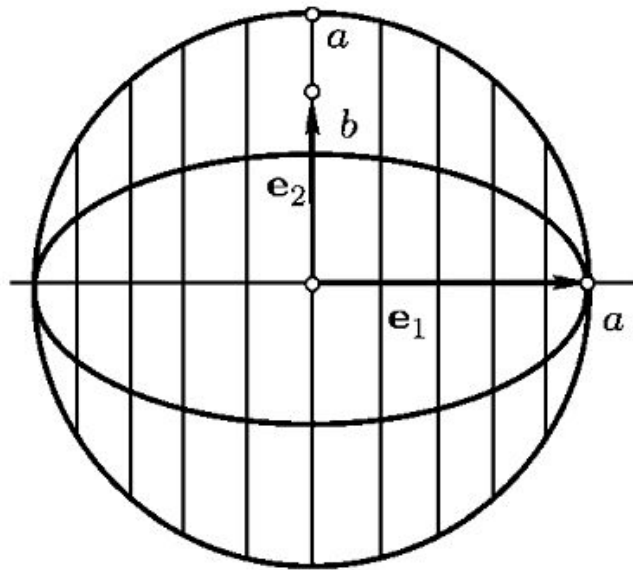
Определение. Точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат, имеющие координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$, называются вершинами эллипса. Числа a и b называются соответственно большей и малой полуосями эллипса.

Теорема. Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало канонической системы — его центром симметрии.



Доказательство. В каноническое уравнение входят только квадраты координат. Поэтому, если координаты (x, y) какой-либо точки M ему удовлетворяют, то ему удовлетворяют и координаты $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ точек M_1, M_2, M_3 . **Доказано.**

Внешний вид эллипса проще всего описать сравнением с окружностью радиуса a с центром в центре эллипса : $x^2 + y^2 = a^2$.



При каждом x таком, что $|x| < a$, найдутся две точки эллипса с ординатами

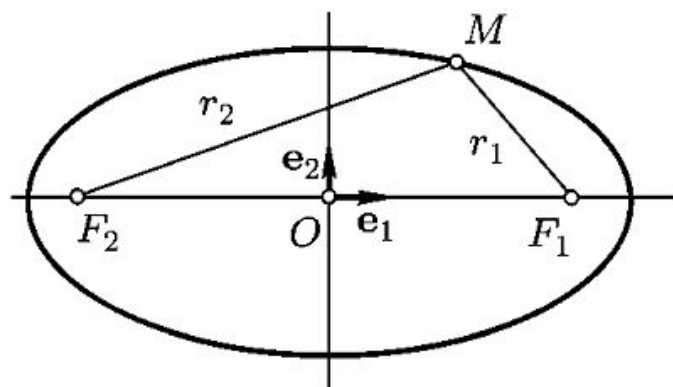
$$y_{\text{эл}} = \pm b \sqrt{1 - x^2/a^2}$$

и две точки окружности с ординатами

$$y_{\text{окр}} = \pm a \sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Следовательно для любого $|x| < a$,

$$\frac{y_{\text{эл}}}{y_{\text{окр}}} = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad y_{\text{эл}} = \frac{b}{a} y_{\text{окр}}.$$



С эллипсом связаны две замечательные точки, называемые его фокусами. Пусть по определению

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (2)$$

и $c \geq 0$.

Определение. Фокусами эллипса называются точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат.

Для окружности $c = 0$, и оба фокуса совпадают с центром. Ниже мы будем предполагать, что эллипс не является окружностью.

Определение. Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (3)$$

называется **эксцентриситетом** эллипса. Отметим, что $\varepsilon < 1$.

Теорема. Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы x :

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x, \quad r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x. \quad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что $r_1^2 = (x - c)^2 + y^2$. Подставим сюда выражение

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

найденное из уравнения эллипса. Мы получим

$$r_1^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

Учитывая равенство $c^2 = a^2 - b^2$, его можно преобразовать к виду:

$$r_1^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} = (a - \varepsilon x)^2.$$

Так как $x \leq a$ и $\varepsilon < 1$, отсюда следует, что справедливо первое из равенств (4): $r_1 = a - \varepsilon x$. Второе равенство доказывается аналогично. **Доказано.**

Теорема. Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большей оси эллипса $2a$.

Необходимость условия очевидна: если мы сложим равенства (4):

$$r_1 = |F_1 M| = a - \varepsilon x, \quad r_2 = |F_2 M| = a + \varepsilon x. \quad (4)$$

почленно, то увидим, что

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (5)$$

Докажем достаточность. Пусть для точки $M(x, y)$ выполнено условие (5), т. е.

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и приведем подобные члены:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \quad (6)$$

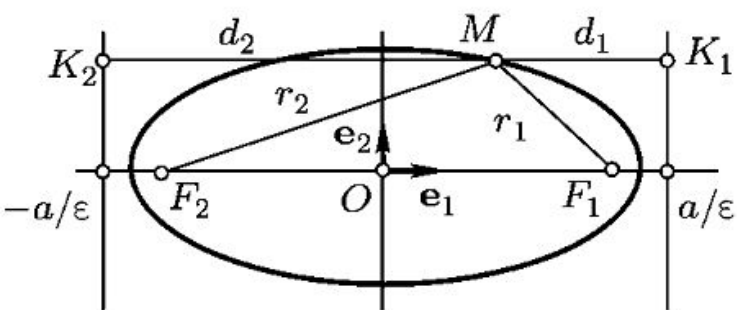
Это равенство также возведем в квадрат и приведем подобные члены, используя соотношение $c^2 = a^2 - b^2$. Мы приходим к равенству $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, равносильному уравнению эллипса (1).

Определение. С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его *директрисами*. Их уравнения в канонической системе координат:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Директриса и фокус, которые лежат по одну сторону от центра, называются соответствующими друг другу.

Теорема. Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса ε .



Доказательство. Докажем для фокуса $F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Расстояние от M до директрисы с уравнением $x = -a/\varepsilon$:

$$d_2 = \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon x + a).$$

Из формулы (4) мы видим теперь, что $r_2/d_2 = \varepsilon$. **Обратно**, пусть для какой-то точки плоскости $r_2/d_2 = \varepsilon$, т. е.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \varepsilon \left(x + \frac{a}{\varepsilon} \right).$$

Так как $\varepsilon = c/a$, это равенство легко приводится к виду (6):

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \quad (6)$$

Из него следует уравнение эллипса. **Доказано.**

2. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

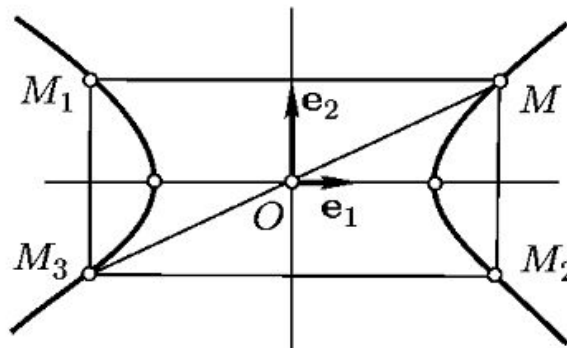
Из этого уравнения видно, что для всех точек гиперболы $|x| \geq a$, т. е. все точки гиперболы лежат вне вертикальной полосы ширины $2a$.

Определение. Ось абсцисс канонической системы координат пересекает гиперболу в точках с координатами $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, называемых **вершинами гиперболы**.

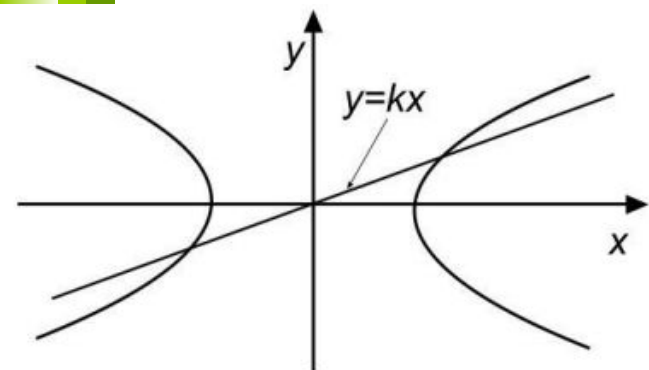
Ось ординат не пересекает гиперболу.

Определение. Гипербола состоит из двух не связанных между собой частей. Они называются ее **ветвями**. Числа a и b называются соответственно **вещественной** и **мнимой полуосями** гиперболы.

Теорема. Для гиперболы оси канонической системы координат являются осями симметрии, а начало канонической системы — центром симметрии.



Доказательство аналогично тому же для эллипса.

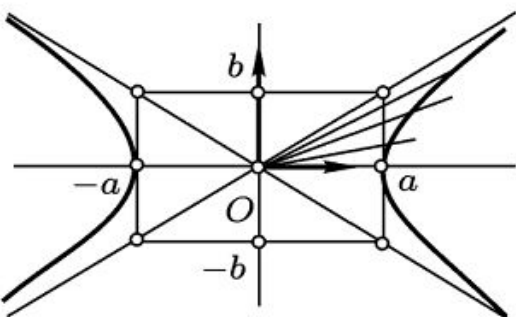


Для исследования формы гиперболы найдем ее пересечение с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Уравнение прямой возьмем в виде $y = kx$, поскольку мы уже знаем, что прямая $x=0$ не пересекает гиперболу. Абсциссы точек пересечения находятся из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1.$$

Поэтому, если $b^2 - a^2 k^2 > 0$, то

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}.$$



Это позволяет указать координаты точек пересечения $(ab/v, abk/v)$ и $(-ab/v, -abk/v)$, где $v = (b^2 - a^2 k^2)^{1/2}$. Достаточно проследить за движением первой из точек при изменении k . Числитель дроби ab/v постоянен, а знаменатель принимает наибольшее значение при $k=0$. Следовательно, наименьшую абсциссу имеет вершина $(a, 0)$. При $k \rightarrow b/a$ $x \rightarrow \infty$. Прямая $y = bx/a$ уже не пересекает гиперболу. То же относится и к прямой $y = -bx/a$. Из приведенных рассуждений

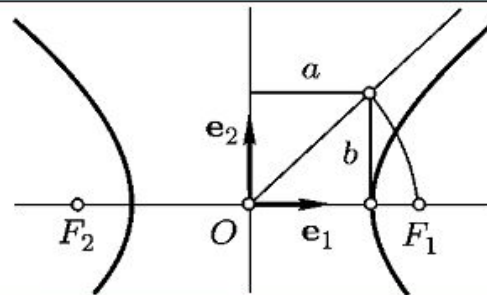
вытекает, что гипербола имеет вид, изображенный на рисунке.

Определение. Прямые с уравнениями $y = bx/a$ и $y = -bx/a$ в канонической системе координат называются **асимптотами** гиперболы.

Введем число c :

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (10)$$

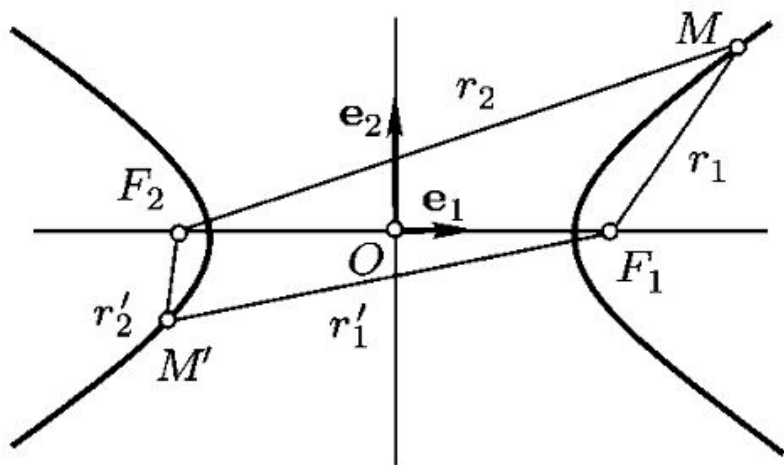
Определение. **Фокусами** гиперболы называются точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат.



Определение. Отношение $\varepsilon = c/a$, как и для эллипса, называется **эксцентриситетом**. У гиперболы $\varepsilon > 1$.

Теорема. Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ на гиперболе до каждого из фокусов следующим образом зависят от ее абсциссы x :

$$r_1 = |F_1 M| = |a - \varepsilon x|, \quad r_2 = |F_2 M| = |a + \varepsilon x|. \quad (11)$$



Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Заметим, что равенства (11) можно подробнее записать так: для правой ветви гиперболы ($x \geq a$)

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

для левой ветви гиперболы ($x \leq -a$)

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Итак, для правой ветви $r_2 - r_1 = 2a$, а для левой ветви $r_1 - r_2 = 2a$. В обоих случаях

$$|r_2 - r_1| = 2a \quad (12)$$

Теорема. Для того чтобы точка M лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы разность ее расстояний до фокусов по абсолютной величине равнялась вещественной оси гиперболы $2a$.

Доказательство. Необходимость условия уже доказана. Для доказательства достаточности условия его нужно представить в виде

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

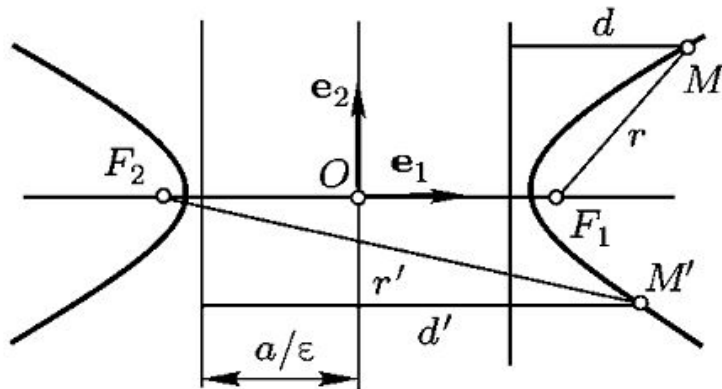
Дальнейшее аналогично доказательству для эллипса.

Определение. *Директрисами* гиперболы называются прямые, задаваемые в канонической системе координат уравнениями

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

(13)

Теорема. Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету ε .



Доказательство аналогично доказательству подобного утверждения для эллипса.

3. Парабола

Определение. *Параболой* называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$y^2 = 2px \quad (15)$$

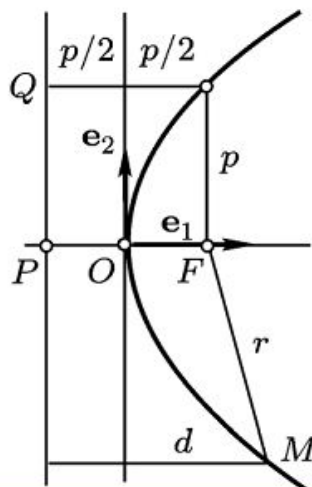
при условии $p > 0$.

Определение. Из уравнения (15) вытекает, что для всех точек параболы $x \geq 0$. Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется **вершиной** параболы.

Форма параболы известна из курса средней школы, где она встречается в качестве графика функции $y = ax^2$. Отличие уравнений объясняется тем, что в канонической системе координат по сравнению с прежней оси координат поменялись местами.

Определение. *Фокусом* параболы называется точка F с координатами $(p/2, 0)$ в канонической системе координат.

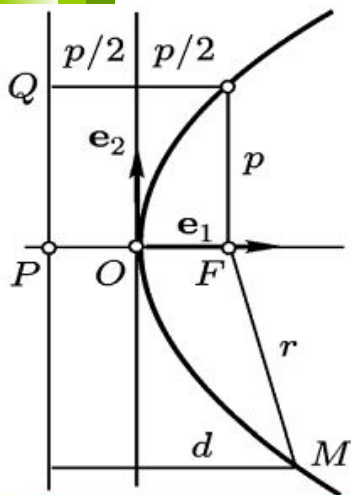
Определение. *Директрисой* параболы называется прямая с уравнением $x = -p/2$ в канонической системе координат



Теорема. Расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на параболе, до фокуса равно

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

(16)



Доказательство. Квадрат расстояния от точки $M(x, y)$ до фокуса по координатам этих точек:

$$r^2 = (x - p/2)^2 + y^2$$

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

При этом :

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

Теорема. Для того чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы она была одинаково удалена от фокуса и от директрисы этой параболы.

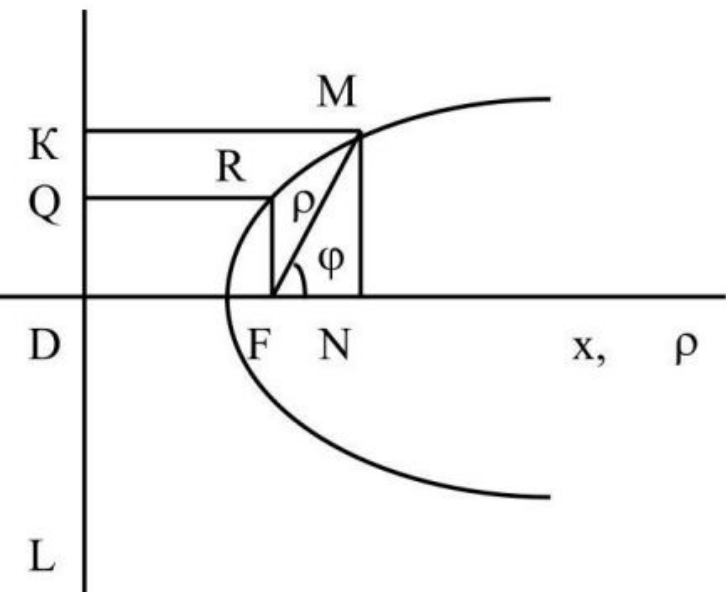
Доказательство. Необходимость доказана выше. Докажем достаточность. Пусть точка $M(x, y)$ одинаково удалена от фокуса и от директрисы параболы:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и приводя в нем подобные члены, мы получаем из него уравнение параболы (15). **Доказано.**

Определение. Параболе приписывается **эксцентриситет** $\varepsilon = 1$. В силу этого соглашения формула $\frac{r}{d} = \varepsilon$ верна и для эллипса, и для гиперболы, и для параболы

4. Общее полярное уравнение кривой второго порядка



Возьмем на кривой произвольную точку $M(\rho; \varphi)$. Обозначим $FR=p$ и будем называть это число фокальным параметром. На основании общего свойства кривых второго порядка.

$$\frac{FM}{KM} = \varepsilon; \quad FM = p; \quad KM = DF + p \cos \phi$$

По тем же соображениям: $\frac{FR}{QR} = \varepsilon$ или $\frac{p}{DF} = \varepsilon$,

откуда $DF = \frac{p}{\varepsilon}$. Подставим найденные выражения

для FM и KM в равенство $\frac{FM}{KM} = \varepsilon$, получим: $\frac{p}{\frac{p}{\varepsilon} + p \cos \phi} = \varepsilon$. $p = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$

Определение. Последнее уравнение называется **общим полярным уравнением кривой второго порядка**. При $\varepsilon > 1$ кривая является эллипсом, при $\varepsilon > 1$ - ветвью гиперболы, при $\varepsilon = 1$ - параболой.