Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

«Факультет математики и естественных наук»

Курс «Линейная алгебра»

Лекция. «Кривые II порядка на плоскости»

Автор Тюриков А.В., доц. Каф. «Высшая математика»

Ижевск
2015

Эллипс, гипербола и парабола

1. Эллипс

Определение. Эллипсом называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

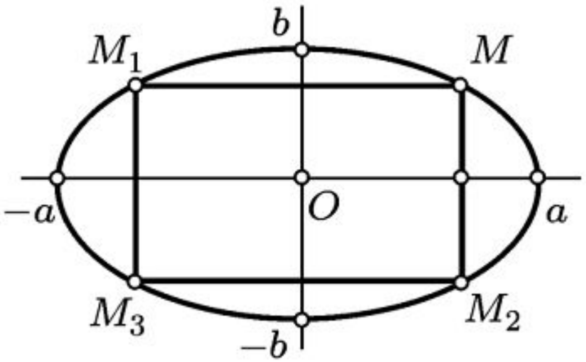
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

при условии $a \geqslant b > 0.$

Из уравнения (1) следует, что для всех точек эллипса $|x| \leqslant a$ и $|y| \leqslant b$. Значит, эллипс лежит в прямоугольнике со сторонами $2a$ и $2b$.

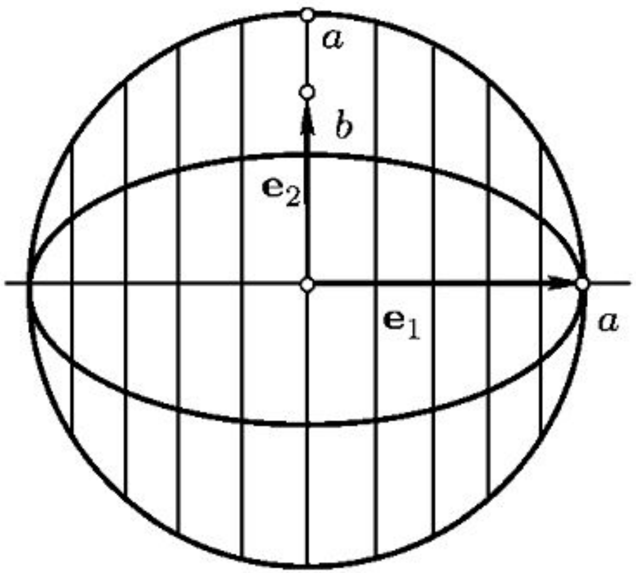
Определение. Точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат, имеющие координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$, называются вершинами эллипса. Числа a и b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Теорема. Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало канонической системы — его центром симметрии.



Доказательство. В каноническое уравнение входят только квадраты координат. Поэтому, если координаты (x, y) какой-либо точки M ему удовлетворяют, то ему удовлетворяют и координаты $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ точек M_1, M_2, M_3. **Доказано.**

Внешний вид эллипса проще всего описать сравнением с окружностью радиуса a с центром в центре эллипса : $x^2 + y^2 = a^2$.



При каждом x таком, что $|x| < a$, найдутся **две точки эллипса** с ординатами

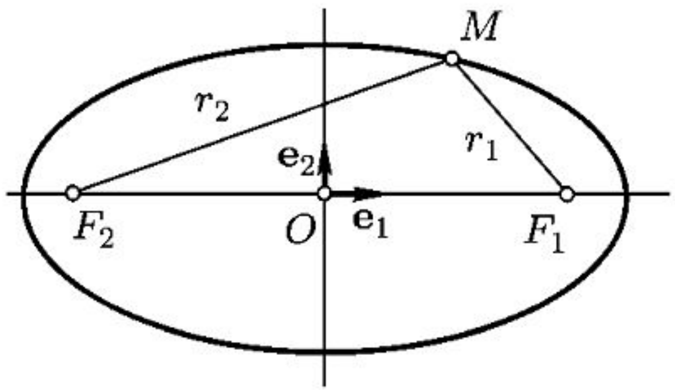
$$y_{эл} = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$$

и две точки окружности с ординатами

$$y_{окр} = \pm a\sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Следовательно для любого $|x| < a$,

$$\frac{y_{эл}}{y_{окр}} = \frac{b}{a} \text{ или } y_{эл} = \frac{b}{a} y_{окр}.$$



С эллипсом связаны две замечательные точки, называемые его фокусами. Пусть по определению

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad (2)$$

и $c \geqslant 0$.

Определение. ***Фокусами*** эллипса называются точки F_1 и F_2 с координатами (c, 0) и (—c, 0) в канонической системе координат.

Для окружности $c = 0$, и оба фокуса совпадают с центром. Ниже мы будем предполагать, что эллипс не является окружностью.

Определение. Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (3)$$

называется ***эксцентриситетом*** эллипса. Отметим, что $\varepsilon < 1$.

Теорема. Расстояние от произвольной точки M(x,y), лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы x:

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x, \quad r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x. \qquad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$. Подставим сюда выражение

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

найденное из уравнения эллипса. Мы получим

$$r_1^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Учитывая равенство $c^2 = a^2 - b^2$, его можно преобразовать к виду:

$$r_1^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = (a - \varepsilon x)^2.$$

Так как $x \leqslant a$ и $\varepsilon < 1$, отсюда следует, что справедливо первое из равенств (4): $r_1 = a - \varepsilon x$. Второе равенство доказывается аналогично. **Доказано.**

Теорема. Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большой оси эллипса $2a$.

Необходимость условия очевидна: если мы сложим равенства (4):

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x, \quad r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x. \tag{4}$$

почленно, то увидим, что

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{5}$$

Докажем достаточность. Пусть для точки $M(x,y)$ выполнено условие (5), т. е.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и приведем подобные члены:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{6}$$

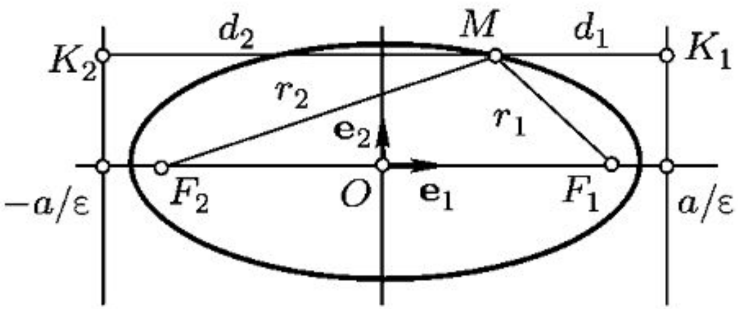
Это равенство также возведем в квадрат и приведем подобные члены, используя соотношение $c^2 = a^2 - b^2$. Мы придем к равенству $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, равносильному уравнению эллипса (1).

Определение. С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его ***директрисами***. Их уравнения в канонической системе координат:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (7)$$

Директриса и фокус, которые лежат по одну сторону от центра, называются соответствующими друг другу.

Теорема. Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса ε.



Доказательство. Докажем для фокуса $F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Расстояние от М до директрисы с уравнением $x = -a/\varepsilon$:

$$d_2 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x + a).$$

Из формулы (4) мы видим теперь, что $r_2/d_2 = \varepsilon$. **Обратно,** пусть для какой-то точки плоскости $r_2/d_2 = \varepsilon$, т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right).$$

Так как $\varepsilon = c/a$, это равенство легко приводится к виду (6):

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (6)$$

Из него следует уравнение эллипса. **Доказано.**

2. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Из этого уравнения видно, что для всех точек гиперболы $|x| \geq a$, т. е. все точки гиперболы лежат вне вертикальной полосы ширины $2a$.

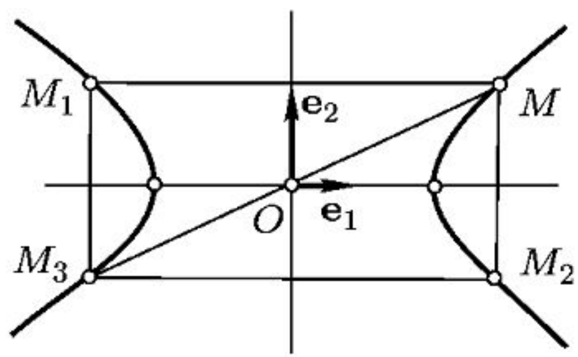
Определение. Ось абсцисс канонической системы координат пересекает гиперболу в точках с координатами (a, 0) и (-a,0), называемых ***вершинами*** *гиперболы.*

Ось ординат не пересекает гиперболу.

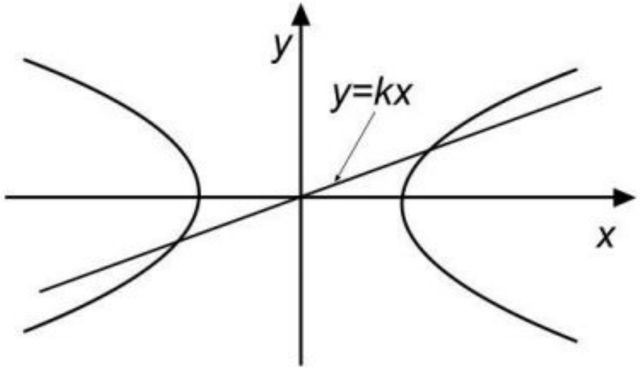
Определение. Гипербола состоит из двух не связанных между собой частей. Они называются ее ***ветвями.*** Числа a и b называются соответственно ***вещественной*** и ***мнимой полуосями*** гиперболы.

Теорема. Для гиперболы оси канонической системы координат являются осями симметрии, а начало канонической системы — центром симметрии.

.



Доказательство аналогично тому же для эллипса.

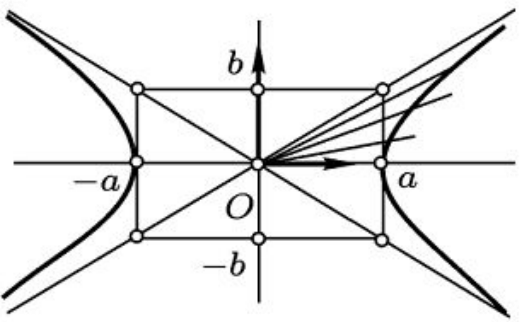


Для исследования формы гиперболы найдем ее пересечение с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Уравнение прямой возьмем в виде $y = кx$, поскольку мы уже знаем, что прямая x=0 не пересекает гиперболу. Абсциссы точек перечения находятся из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1.$$

Поэтому, если $b^2 - a^2k^2 > 0$, то

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}.$$



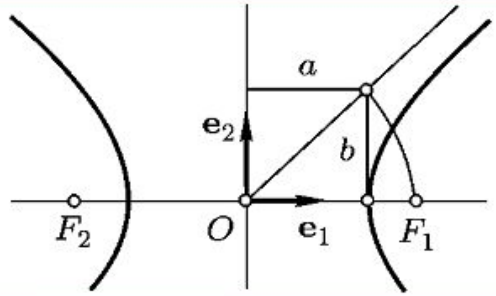
Это позволяет указать координаты точек пересечения $(ab/v, abk/v)$ и $(-ab/v, -abk/v)$, где $v = (b^2 - a^2k^2)^{1/2}$. Достаточно проследить за движением первой из точек при изменении k. Числитель дроби ab/v постоянен, а знаменатель принимает наибольшее значение при $к$=0. Следовательно, наименьшую абсциссу имеет вершина (a,0). При $k \to b/a$ $x \to \infty$. Прямая $y = bx/a$ уже не пересекает гиперболу. Тоже относится и к прямой $y = -bx/a$. Из приведенных рассуждений вытекает, что гипербола имеет вид, изображенный на рисунке.

Определение. Прямые с уравнениями $y = bx/a$ и $y = -bx/a$ в канонической системе координат называются ***асимптотами*** гиперболы.

Введем число c:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (10)$$

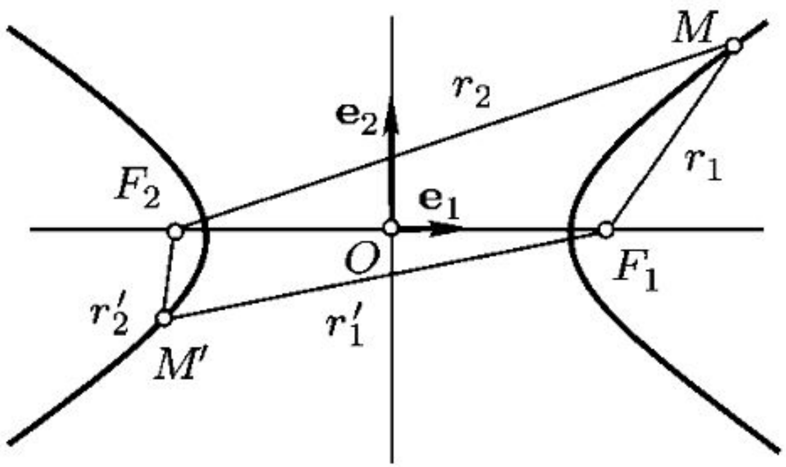
Определение. ***Фокусами*** гиперболы называются точки F_1 и F_2 с координатами (c, 0) и (-c, 0) в канонической системе координат.



Определение. Отношение $\varepsilon = c/a$, как и для эллипса, называется ***эксцентриситетом***. У гиперболы $\varepsilon > 1$.

Теорема. Расстояния от произвольной точки *M(x,y)* на гиперболе до каждого из фокусов следующим образом зависят от ее абсциссы *x*:

$$r_1 = |F_1M| = |a - \varepsilon x|, \quad r_2 = |F_2M| = |a + \varepsilon x|. \qquad (11)$$



Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Заметим, что равенства (11) можно подробнее записать так: для правой ветви гиперболы $(x \geqslant a)$

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

для левой ветви гиперболы $(x \leqslant -a)$

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Итак, для правой ветви $r_2 - r_1 = 2a$, а для левой ветви $r_1 - r_2 = 2a$. В обоих случаях

$$|r_2 - r_1| = 2a \qquad (12)$$

Теорема. Для того чтобы точка M лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы разность ее расстояний до фокусов по абсолютной величине равнялась вещественной оси гиперболы $2a$.

Доказательство. Необходимость условия уже доказана. Для доказательства **достаточности** условия его нужно представить в виде

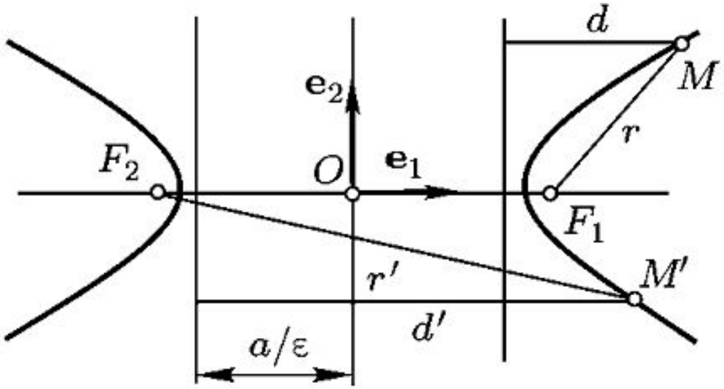
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Дальнейшее аналогично доказательству для эллипса.

Определение. ***Директрисами*** гиперболы называются прямые, задаваемые в канонической системе координат уравнениями

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Теорема. Для того чтобы точка лежала на гиперболе,необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету ε.



Доказательство аналогично доказательству подобного утверждения для эллипса.

3. Парабола

Определение. ***Параболой*** называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$y^2 = 2px \tag{15}$$

при условии $p > 0$.

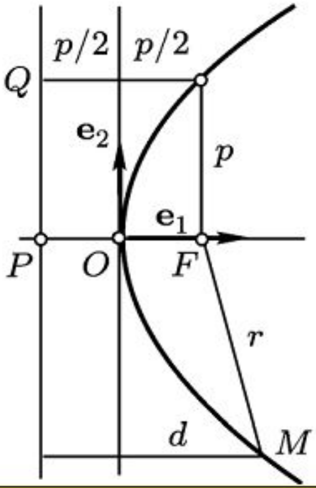
Определение. Из уравнения (15) вытекает, что для всех точек параболы $x \geqslant 0$ Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется **вершиной** параболы.

Форма параболы известна из курса средней школы, где она встречается в качестве графика функции $y = ax^2$. Отличие уравнений объясняется тем, что в канонической системе координат по сравнению с прежней оси координат поменялись местами.

Определение. ***Фокусом*** параболы называется точка F с координатами (p/2,0) в канонической системе координат.

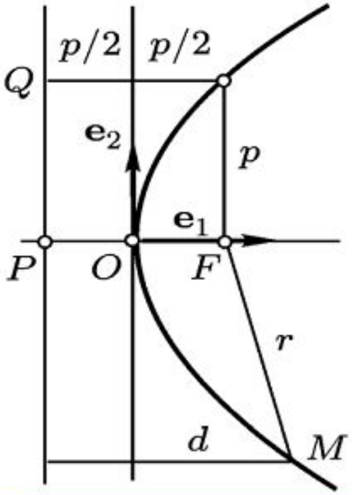
Определение. ***Директрисой*** параболы называется прямая с уравнением

$x = -p/2$ в канонической системе координат



Теорема. Расстояние от точки M(x,y), лежащей на параболе, до фокуса равно

$$r = x + \frac{p}{2}. \quad (16)$$



Доказательство. Квадрат расстояния от точки M(x, y) до фокуса по координатам этих точек:

$$r^2 = (x - p/2)^2 + y^2$$

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

При этом :

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

Теорема. Для того чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы она была одинаково удалена от фокуса и от директрисы этой параболы.

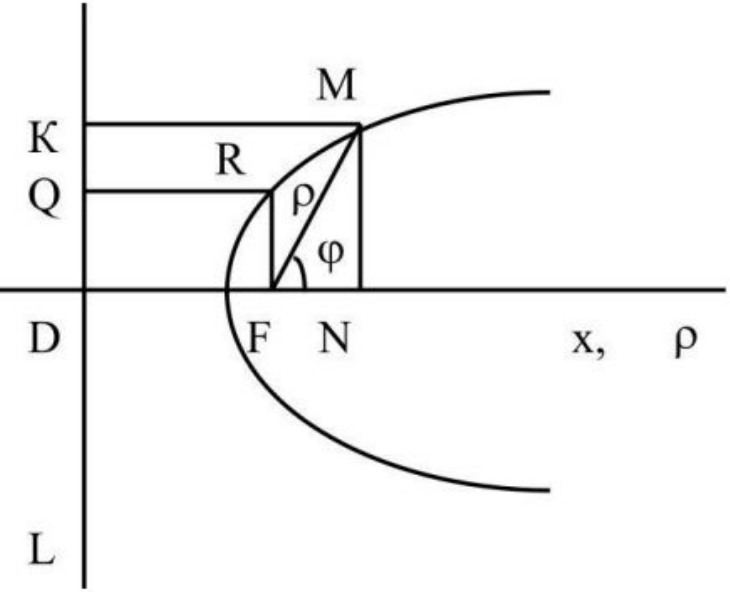
Доказательство. **Необходимость** доказана выше. Докажем **достаточность**. Пусть точка M(x,y) одинаково удалена от фокуса и от директрисы параболы:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и приводя в нем подобные члены, мы получаем из него уравнение параболы (15). **Доказано**.

Определение. Параболе приписывается ***эксцентриситет*** $\varepsilon = 1$. В силу этого соглашения формула $\frac{r}{d} = \varepsilon$ верна и для эллипса, и для гиперболы, и для параболы

4. Общее полярное уранение кривой второго порядка



Возьмем на кривой произвольную точку M(ρ;φ). Обозначим $FR=p$ и будем называть это число фокальным параметром. На основании общего свойства кривых второго порядка.

$$\frac{FM}{KM}=\varepsilon;\ FM=p;\ KM=DF+p\cos\phi$$

По тем же соображениям: $\frac{FR}{QR}=\varepsilon$ или $\frac{p}{DF}=\varepsilon$, откуда $DF=\frac{P}{\varepsilon}$. Подставим найденные выражения для FM и KM в равенство $\frac{FM}{KM}=\varepsilon$, получим: $\dfrac{p}{\dfrac{p}{\varepsilon}+p\cos\phi}=\varepsilon.\ p=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\phi}$

Определение. Последнее уравнение называется ***общим полярным уравнением кривой второго порядка.*** При ε>1 кривая является эллипсом, при ε>1 - ветвью гипиерболы, при ε=1 - параболой.