

Муниципальное образовательное учреждение «Лицей №17»

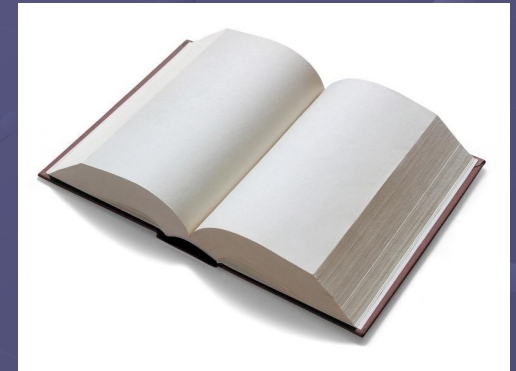
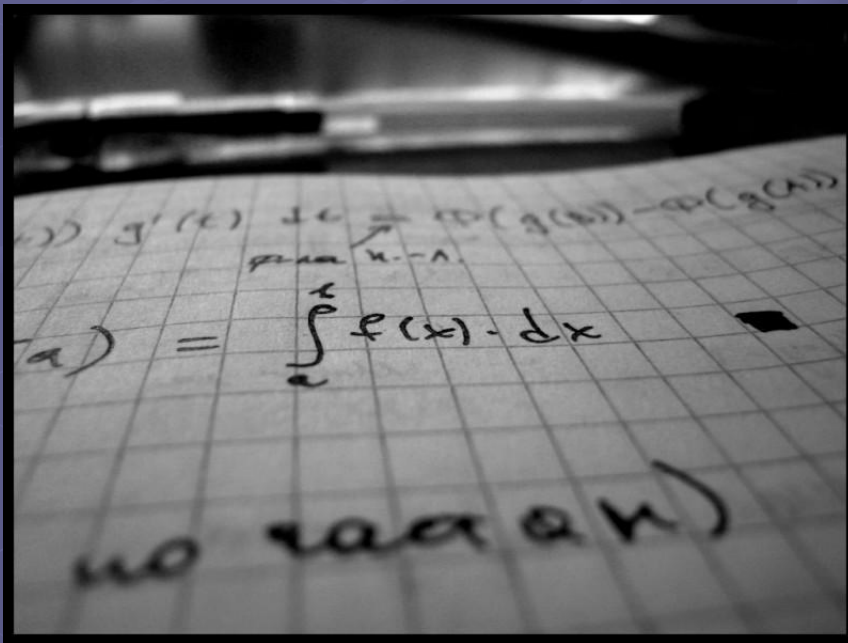
Фестиваль исследовательских и творческих работ учащихся
«Портфолио»

Проектная работа

Выполнила:
Шульгина Дарья,
ученица 8А класса
Руководитель:
Зандер
Светлана Ивановна,
учитель математики

Славгород, 2009

Решение нестандартных задач



- Какая же задача называется нестандартной? «нестандартные задачи – это такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих их решение» (Фридман Л.Н. Как научиться решать задачи).
- Однако понятие «нестандартная задача» относительное. Одна и та же задача может быть и стандартной и нестандартной, в зависимости от того, знаком ученик с задачами такого типа или нет.

Таким образом, нестандартная задача – это задача, алгоритм решения которой учащемуся неизвестен. Для решения таких задач мы выделили 4 ступени:

- 1.изучение условия задачи
- 2.поиск плана решения
- 3. осуществление плана, т.е. оформление найденного решения
- 4.изучение полученного решения – критический анализ результата и отбор полезной информации.

Идея создания проекта:

просмотрев задания олимпиад за несколько прошлых лет, я поняла, что не могу их так сразу решить, но убедилась, что это задачи нестандартного типа. Я попыталась классифицировать их и разбила на несколько групп.

Цель данного проекта: научиться решать олимпиадные задачи определённого типа

В связи с этим можно выделить следующие задачи проекта:

- составить подборку задач по теме: задачи на делимость многозначного числа на натуральное
- решить эти задачи различными способами
- использовать вспомогательные задачи
- попытаться научиться составлять вспомогательные задачи
- использовать метод полной индукции (метод перебора всех возможных случаев), метод неполной индукции (рассмотрение некоторых частных примеров) и решение в общем виде – дедукции
- закрепить признаки делимости

Я попытаюсь изложить материал так, чтобы он стал доступен и понятен и другим учащимся, для этого выступлю на элективных курсах, на конференции. В своём проекте я постараюсь показать ход действий, направление мысли при решении одной интересной задачи. Во что вылились наши поиски, исследования, вы и увидите в этом проекте

При просмотре олимпиадных заданий мы столкнулись с такой задачей:

- * Дано многозначное число $\overline{abc\dots kxyz}$.
Отделив от него трёхзначное число, образованное последними цифрами, получим два числа $\overline{abc\dots k}$ и \overline{xyz} .
Доказать, что если разность полученных чисел делится на 7 (11, 13), то и данное число делится на 7 (11, 13)

Решить сразу эту задачу я не смогла,
тогда учительница предложила решить
вспомогательную задачу



- **В шестизначном числе 1-я цифра совпадает с 4-й, 2-я с 5-й, 3-я с 6-й. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13

Я не смогла найти подход к этой задаче, пришлось изучить некоторые основные понятия, условности, обозначения по этой теме, затем прорешать задачи повышенной сложности из учебника алгебры 7 класса

Основные понятия

- \overline{abc} означает число, в котором a – сотни, b – десятки, c – единицы. Это число можно представить в виде многочлена: $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$



Закрепим на примерах

1. Представим в виде многочлена:

а) $\overline{xy} = 10x + y$

б) $\overline{yx} = 10y + x$

в) $\overline{aov} = 100a + 10o + v$

г) $\overline{avcd} = 1000a + 100v + 10c + d$



2. Представъте в виде многочлена и упростите его:

а) $\overline{abc} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101a + 20b + 101c$

б) $\overline{abc} + \overline{bca} = 100a + 10b + c + 10b + c = 100a + 20b + 2c$

в) $\overline{abc} - \overline{bac} = 100a + 10b + c - 10b - a = 99a + c$

г) $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 10a - c = 90a + 10b$

3. Доказать что:

а) Сумма чисел $\overline{av} + \overline{va}$ кратна сумме $(a + v)$.

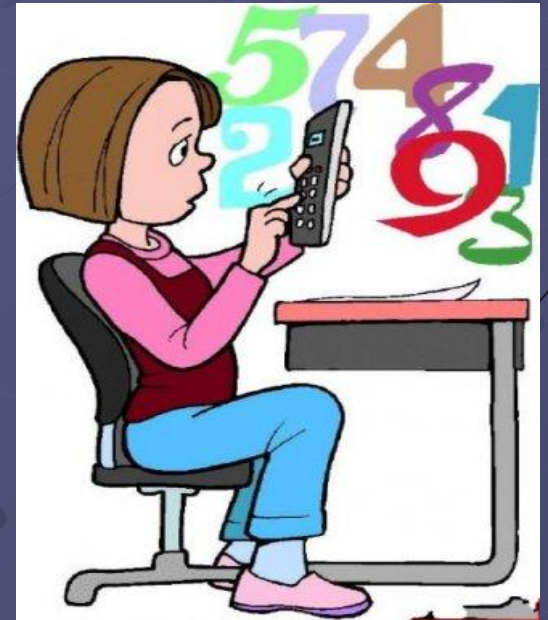
Представим в виде многочлена: $10a + v + 10v + a = 11a + 11v = 11(a+v)$ т.к один из множителей делится на $(a+v)$, то и все произведение делится на $(a+v)$

б) Разность чисел $\overline{av} - \overline{va}$ кратна 9

Представим в виде многочлена: $\overline{av} - \overline{va} = 10a + v - 10v - a = 9a - 9v = 9(a-v)$ т.к один из множителей делится на 9, то и все произведение кратно 9.

Задача

Доказать, что если к двузначному числу прибавить число оканчивающееся теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученная сумма будет кратна 11. Выполняется ли свойство для трехзначных чисел?



РЕШЕНИЕ:

$$\overline{av} + \overline{va} = 10a + v + 10v + a = 11a + 11v = 11(a+v)$$

число кратно 11

Попробуем использовать этот же алгоритм для трехзначных чисел.

$$\overline{avc} + \overline{cva} = 100a + 10v + c + 100c + 10v + a = 101a + 20v + 101c$$

свойство не выполняется. Число не делится на 11

Вернёмся к вспомогательной задаче

**

Обозначим 1ц – а, 2я – в, 3я – с , тогда
число $\overline{авсаавс} = 100000а + 10000в + 1000с + 100а + 10в + с = 1000 (100а + 10в + с) + \overline{авс} = 1000\overline{авс} + \overline{авс} = 1001\overline{авс} = 11 \cdot 7 \cdot 13 \overline{авс}$ кратно 7, 11, 13



Вернёмся к первоначальной задаче *

$$\overline{авс\dots к} - \overline{хуз} = ?$$

Сначала я никак не могла расписать разность, но потом я поняла, что разность делится на 7

$$\overline{авс\dots к} - \overline{хуз} = 1000 (\overline{авс\dots к}) - \overline{хуз} = 1000$$

$\overline{авс\dots к} + \overline{авс\dots к} - \overline{авс\dots к} + \overline{хуз} = 1001 \overline{авс\dots к} + (\overline{хуз} - \overline{авс\dots к})$ скобка уже делится на 7, то и число 1001 тоже делится на 7, т.к. каждое слагаемое делится на 7, то и вся сумма делится на 7 (признак делимости суммы)

Теперь мы можем сами вывести признак делимости на 7, 11, 13

ГИПОТЕЗА!

Если разность между самым многозначным числом и числом, состоящим из 3х последних цифр, делится на 7,11,13, то и все число делится на 7,11,13

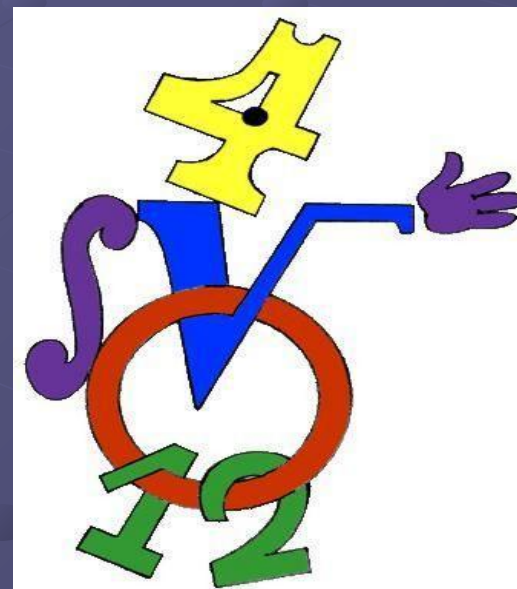
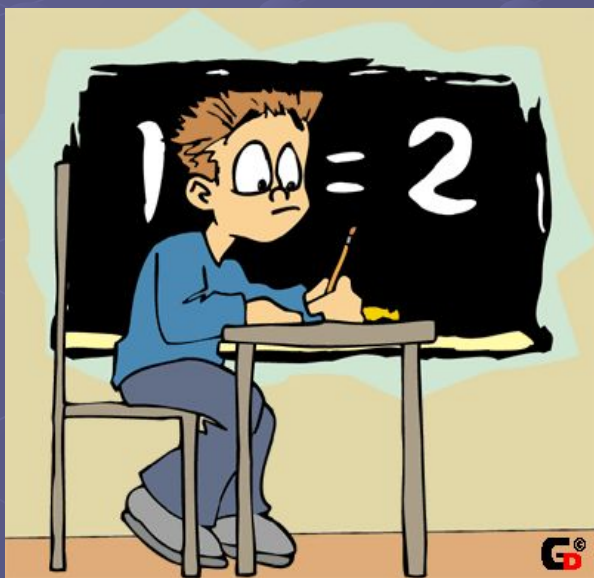
НАПРИМЕР: 235 123 Вычтем из самого числа меньшее число и разность разделим на 7

$$235 - 123 = 112 : 7 = 16$$

Проверим делится ли само число на 7. Число делится!

А, например, число 234123 не делится на 7.
(проверено на 10 примерах)

Решив данную задачу, стало интересно, можно ли этот подход применить к другим подобным задачам, например таким:



Задача. Найти двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр

Решение: (1 способ) пусть само число $\overline{av} = 10a + v$, $0 < a < 9$, $0 < v < 9$

По условию задачи составим уравнение

$$10a + v = 4(a + v)$$

$$6a = 3v$$

$$2a = v$$

в этом уравнении нужно решать с помощью подбора, учитывая что a, v – цифры (использовать метод полной индукции)

Если $a = 1$ то $v = 2$, т.е число = 12

$a = 2$ то $v = 4$ т.е число = 24

$a = 3$ то $v = 6$ т.е число = 36

$a = 4$ то $v = 8$ т.е число = 48

$a = 5$ то $v = 10$ такого быть не может т.к v не должно быть больше 9

ОТВЕТ: 12, 24, 36, 48

2 – ой способ

РЕШЕНИЕ: \overline{av} больше $(a + v)$ в 4 раза

Возьмем например $a = 1$ ($1 * 10$), $v = 4$

$av = 14$

14 не больше 5 в 3 раза

Возьмем $a = 1$ ($1 * 10$), $v = 3$

$av = 13$

13 не больше 4 в 4 раза

Возьмем $a = 1$ ($1 * 10$), $v = 2$

$av = 12$

12 больше 3 в 4 раза !

Так же можно взять числа 24, 36, 48



ЗАДАЧА

К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по 1. В результате получили число, в 23 раза больше первоначального. Найти это двузначное число.

$$\text{РЕШЕНИЕ 1: } 1\overline{ав}1 = 23\overline{ав} \quad \overline{ав} = 10a + b$$

$$1000 + 10\overline{ав} + 1 = 23\overline{ав}$$

$$1001 = 13\overline{ав}$$

$$\overline{ав} = 77$$

Ответ: 77

РЕШЕНИЕ (способ 2):

$$1\overline{a}v1 = 23\overline{a}v$$

Вместо v должно быть число 7 т.к $3*7=$ (а $1\overline{a}v1$ заканчивается 1)

$$1a71 = 23 a7$$

$$1000 + 100a + 10v + 1 = 230a + 23v$$

$$130a + 13v = 1001$$

$$130a + 13*7 = 1001$$

$$130a = 910$$

$$a = 910/130$$

$$a = 7 \quad a - \text{десятки, } v - \text{единицы} \quad av = 77$$

ответ: 77

ЗАДАЧА

Если к задуманному числу справа приписать 0 и результат вычесть из числа 143, то получится утроенное задуманное число. Какое число задумано?

РЕШЕНИЕ: $143 - xo = 3x$

Если x - однозначное, то xo - двузначное число

$$143 - 10x - o = 3x$$

$$143 = 13x$$

$x = 11$ (задуманное число)

Если x - двузначное число, то xo - трехзначное

$$143 - 100x - o = 3x$$

$$143 = 103x$$

$x = 1$ (приблизительно) (ВАРИАНТ не подходит)

Вспомогательные задачи

(придуманные мною)

1. К числу x приписали справа цифру 3, представить полученное число в виде суммы, если x а) двузначное число б) трёхзначное число
2. К числу y приписали слева цифру 7, представить полученное число в виде суммы, если y а) двузначное число б) трёхзначное число

Рефлексия

- Мне очень понравилось работать с этим типом задач (разложение на множители в виде разрядных слагаемых). Эти задачи не просты в решении, поэтому к ним нужен особый подход. Может поэтому они мне очень понравились. Тем более эти задачи помогут при подготовке и проведении олимпиадных задач. В дальнейшем я хочу разобраться в решении задач со степенями

Литература

- Энциклопедический словарь юного математика/Составитель Э-68 А.П. Савин,-М., Педагогика,1989
- Алгебра, 7класс. Под редакцией С.А. Теляковского

Спасибо за внимание!