Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №30»

Тригонометрические функции

Подготовила:
Шунайлова М., ученица 11 «Д»
Руководители:
Крагель Т.П., Гремяченская Т.В..

2006

- ***Тригонометрические функции*** острого угла есть отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника
- 1) *Синус - отношение противолежащего катета к гипотенузе:* sin A = *a / c .*
- 2) *Косинус - отношение прилежащего катета к гипотенузе:* cos A = *b / c .*
- 3) *Тангенс - отношение противолежащего катета к прилежащему:* tg A = *a / b .*
- 4) *Котангенс - отношение прилежащего катета к противолежащему:* ctg A = *b / a .*
- 5) *Секанс - отношение гипотенузы к прилежащему катету:* sec A = *c / b .*
- 6) *Косеканс - отношение гипотенузы к противолежащему катету:* cosec A =
- = *c / a .*
- Аналогично записываются формулы для другого острого угла B

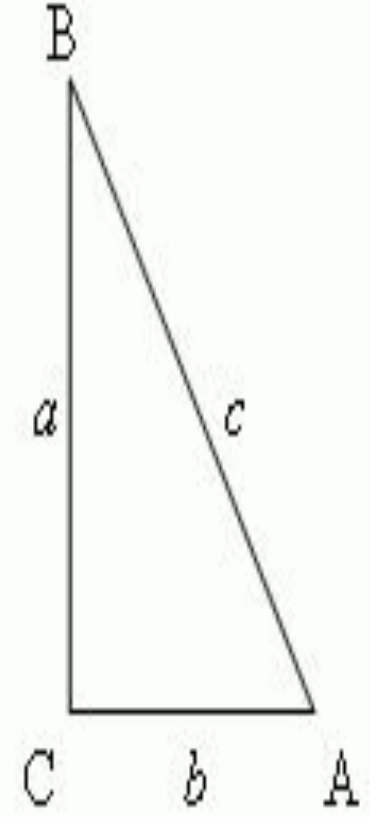


Рис. 2

П р и м е р :

Прямоугольный треугольник АВС (рис.2) имеет катеты:

$$a = 4, \; b = 3.$$

Найти синус, косинус и тангенс угла A.

Р е ш е н и е . Во-первых, найдём гипотенузу, используя теорему Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

Согласно вышеприведенным формулам имеем:

sin A = a / c = 4 / 5

cos A = b / c = 3 / 5

tg A = a / b = 4 / 3

Для некоторых углов можно записать точные значения их тригонометрических функций. Наиболее важные случаи приведены в таблице:

A	sin A	cos A	tan A	cot A	sec A	cosec A
0°	0	1	0	∞	1	∞
30 °	1 / 2	$\sqrt{3}$ / 2	1 / $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2 / $\sqrt{3}$	2
45°	$\sqrt{2}$ / 2	$\sqrt{2}$ / 2	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}$ / 2	1 / 2	$\sqrt{3}$	1 / $\sqrt{3}$	2	2 / $\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

- Углы 0° и 90°, не являются острыми в прямоугольном треугольнике, однако при расширении понятия тригонометрических функций эти углы также рассматриваются. Символ ∞ в таблице означает, что абсолютное значение функции неограниченно возрастает, если угол приближается к указанному значению.

Связь тригонометрических функций острого угла

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Тригонометрические функции двойного угла:

sin 2*x* = 2 sin*x* cos*x*

cos 2*x* = cos2*x* - sin2*x*

tg 2*x* = 2 tg *x* /(1- tg2*x*)

ctg 2*x* = ctg2*x*-1/(2 ctg *x*)

Тригонометрические функции половинного угла

Часто бывают полезны формулы, выражающие степени sin и cos простого аргумента через sin и cos кратного, например:

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

Формулы для cos2x и sin2x можно использовать для нахождения значений Т. ф. половинного аргумента

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Тригонометрические функции суммы углов

sin(*x*+*y*)= sin *x* cos *y* + cos *x* sin *y*

sin(*x*-*y*)= sin *x* cos *y* - cos *x* sin *y*

cos(*x*+*y*)= cos *x* cos *y* - sin *x* sin *y*

cos(*x*-*y*)= cos *x* cos *y* + sin *x* sin *y*

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y)=-\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}$$

$$\operatorname{tg}\left(x+y)\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{tg}\left(x-y)\right)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

- Для больших значений аргумента можно пользоваться так называемыми формулами приведения, которые позволяют выразить Т. ф. любого аргумента через
- Т. ф. аргумента x, что упрощает составление таблиц Т. ф. и пользование ими, а также построение графиков. Эти формулы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{c}
\sin(\varphi + n\pi) = \pm\sin\varphi \\
\cos(\varphi + n\pi) = \pm\cos\varphi \\
tg(\varphi + n\pi) = tg\varphi \\
\sin(\varphi + n\dfrac{\pi}{2}) = \pm\cos\varphi \\
\cos(\varphi + n\dfrac{\pi}{2}) = \mp\sin\varphi \\
tg(\varphi + n\dfrac{\pi}{2}) = -ctg\varphi
\end{array}\right\}$$

- в первых трёх формулах *n* может быть любым целым числом, причём верхний знак соответствует значению *n* = 2*k*, а нижний - значению *n* = 2*k* + 1; в последних - *n* может быть только нечётным числом, причём верхний знак берётся при *n* = 4*k* + 1, а нижний при *n* = 4*k* - 1.

- Важнейшими тригонометрическими формулами являются формулы сложения, выражающие Т. ф. суммы или разности значений аргумента через Т. ф. этих значений:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \pm \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ tg(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \frac{tg\varphi_1 \pm tg\varphi_2}{1 \mp tg\varphi_1 tg\varphi_2} \end{aligned}\right\}$$

- знаки в левой и правой частях всех формул согласованы, то есть верхнему (нижнему) знаку слева соответствует верхний (нижний) знак справа. Из них, в частности, получаются формулы для Т. ф. кратных аргументов, например:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$tg 2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

Производные всех Тригонометрических функций выражаются через Тригонометрические функции

-

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

График функции $y = \sin x$ *имеет вид:*

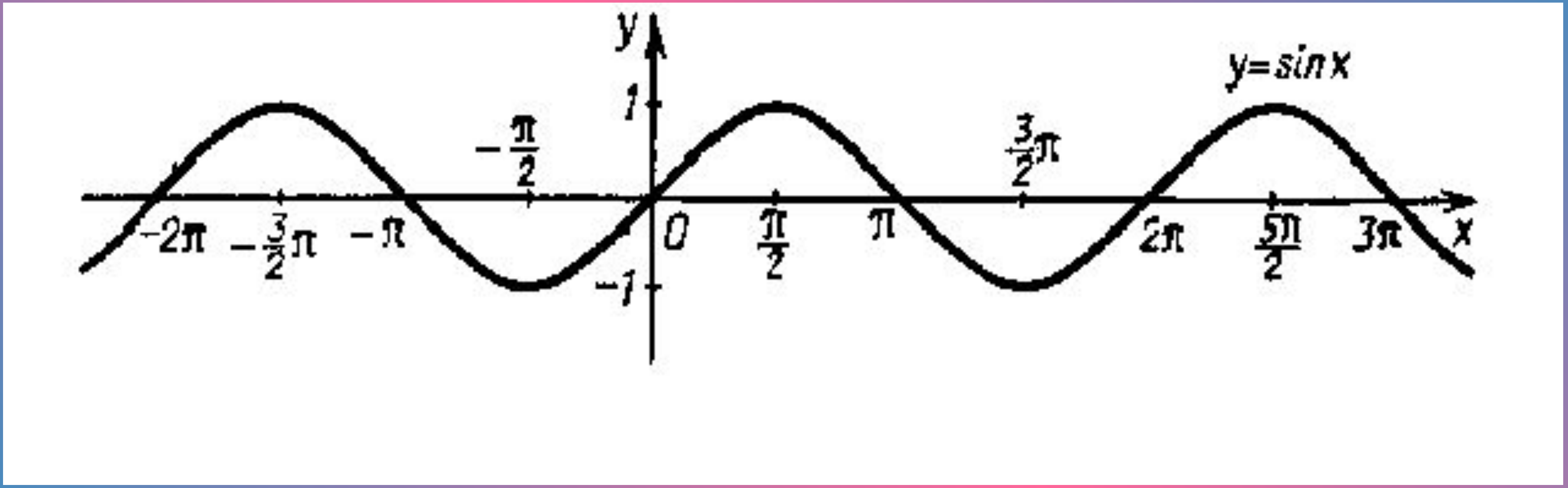


График функции *y = cosx имеет вид:*

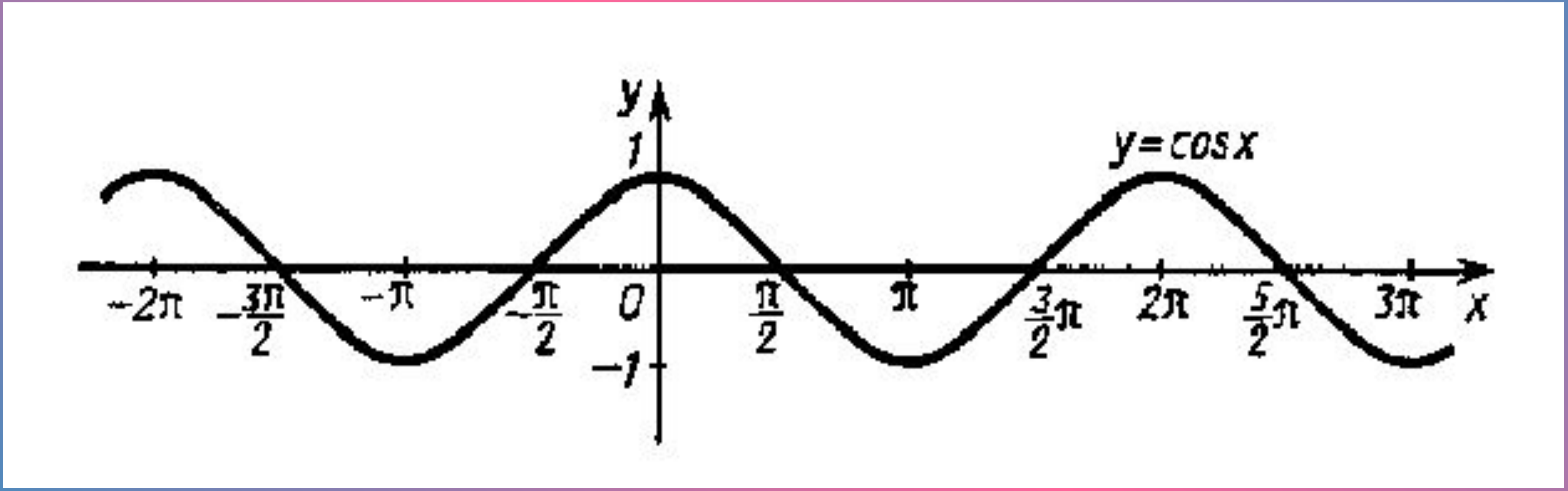


График функции y = *tgx имеет вид:*

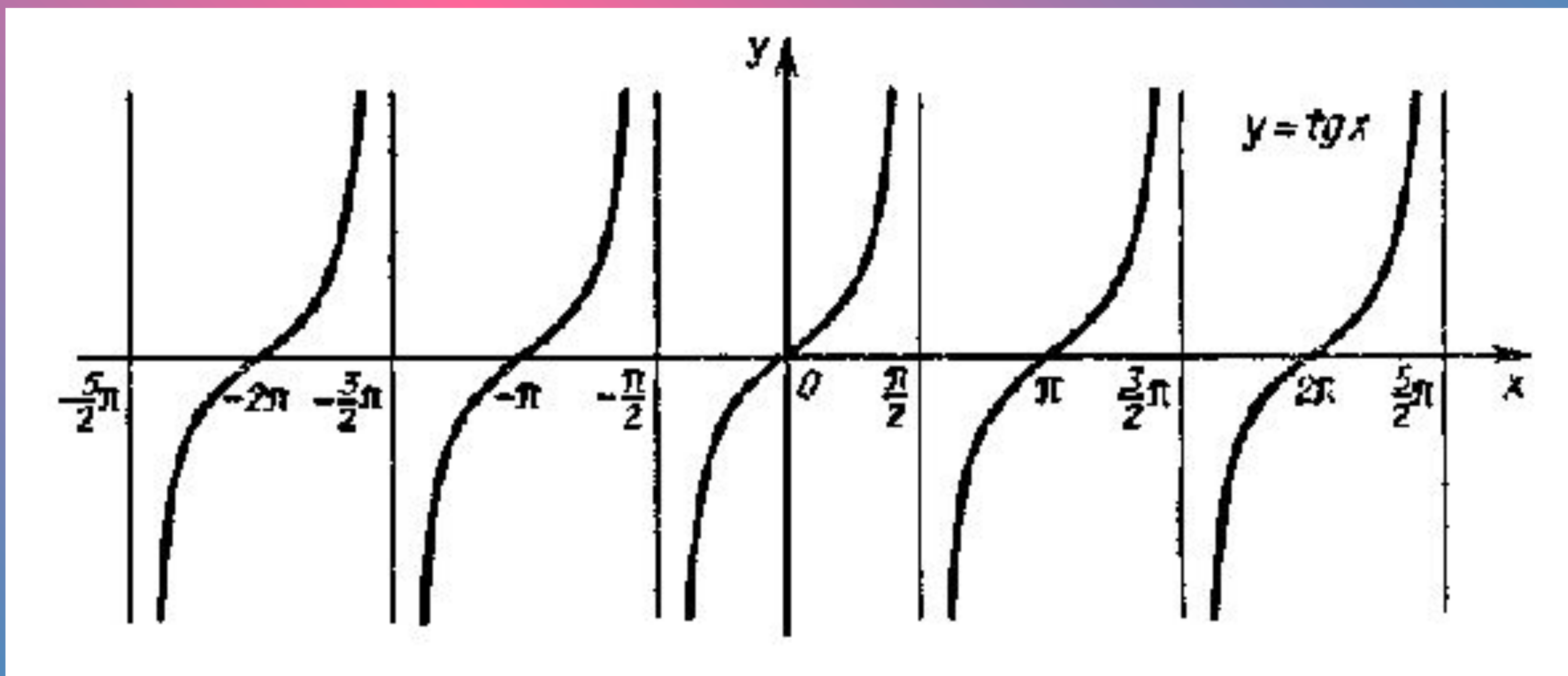
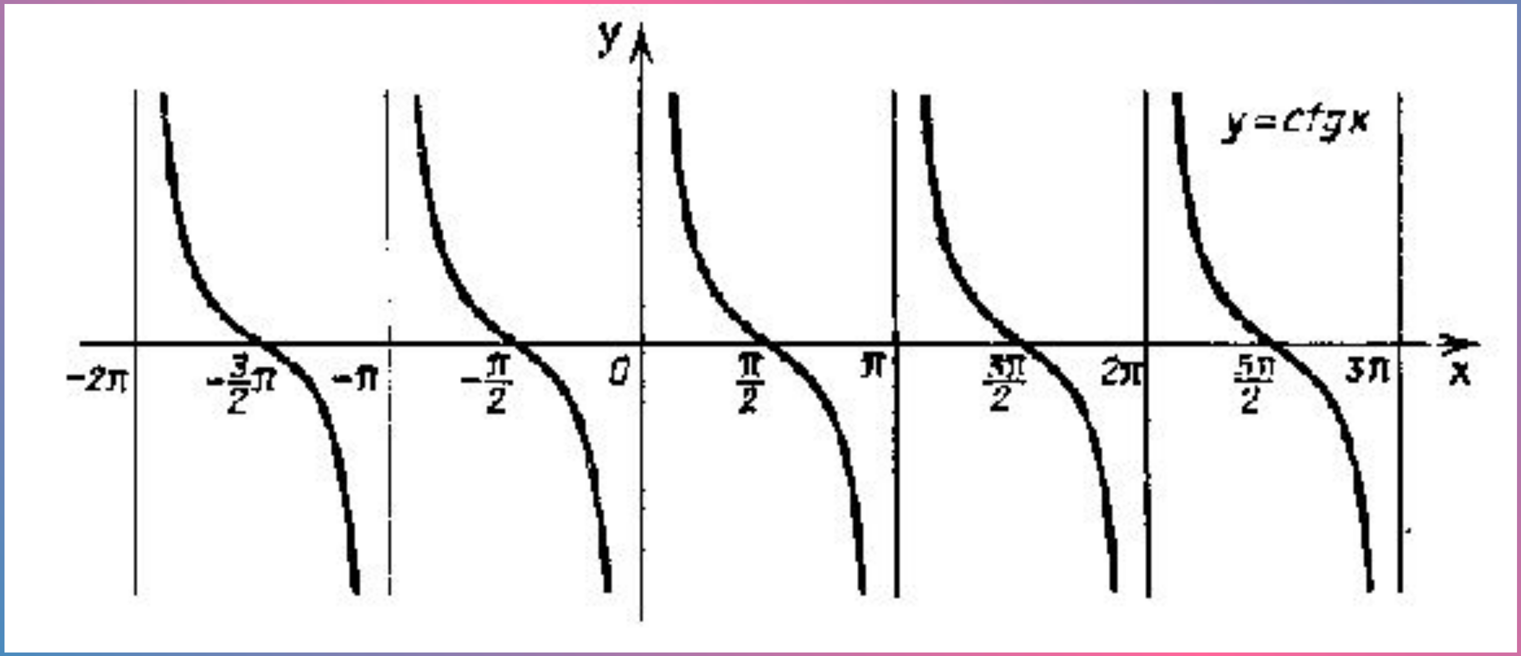


График функции *y = ctgx имеет вид:*



История возникновения тригонометрических функций

- Т. ф. возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу Т. ф., встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции - Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и др. Однако эти соотношения не являются у них самостоятельным объектом исследования, так что Т. ф. как таковые ими не изучались. Т. ф. рассматривались первоначально как отрезки и в такой форме применялись Аристархом (конец 4 - 2-я половина 3 вв. до н. э.)

- Гиппархом (2 в. до н. э.), Менелаем (1 в. н. э.) и Птолемеем (2 в. н. э.) при решении сферических треугольников. Птолемей составил первую таблицу хорд для острых углов через 30' с точностью до 10-6. Разложение Т. ф. в степенные ряды получено И. Ньютоном (1669). В современную форму теорию Т. ф. привёл Л. Эйлер (18 в.). Ему принадлежат определение Т. ф. для действительного и комплексного аргументов, принятая ныне символика, установление связи с показательной функцией, ортогональности системы синусов и косинусов