Методы решения экстремальных задач

Актуальность темы

Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний. Возникает необходимость знакомить учащихся с различными методами их решения, так как в 11 классе решаются задачи только с помощью дифференциального исчисления.

Цель изучения занятий

формировать у школьников представление о том, что экстремальная задача — математическая модель процессов реальной действительности; формировать у учащихся умения решать оптимизационные задачи методами, характерными для данного класса задач.

Диагностируемые цели:

В результате проведения занятий по теме ученик *знает:*

- Что называется экстремальной задачей;
- алгоритм решения экстремальных задач;
- основные методы решения экстремальных задач: метод опорных функций; метод, основанный на применении некоторых теорем.

Планирование занятий

- *Тема 1*. «Использование свойств квадратичной функции при решении задач» (1 час) *Тема 2*. «Использование понятия синуса и косинуса угла при решении задач» (2 часа)
- *Тема 3*. «Решение экстремальных задач с применением некоторых теорем» (2 часа)
- *Тема 4*. «Решение прикладных задач» (1 час)
- *Тема 5*. «Решение древнейших задач с помощью производной» (1 час)
- *Тема 6*. Итоговое занятие (2 часа)

Содержание занятий

Занятие 1

Цель: Сформировать представление учащихся о понятии экстремальной задачи, об алгоритме её решения; Выделить свойства квадратичной функции, которые могут быть использованы при решении задач.

Задача 1. Зависимость между размером используемой площади полей и валовым доходом из расчета на 100 га угодий лесостепной зоны Львовской области выражена функцией $y = 9+9x-1,5x^2$ где x – площадь сельскохозяйственных угодий (в тыс. га), y – валовой доход на 100 га сельскохозяйственных угодий (в тыс. руб.). При какой площади хозяйство будет иметь наибольший доход?

Занятия 2,3,4

Цель: Создать условия, при которых школьники установят, каким образом понятия синуса и косинуса угла могут быть использованы при решении задач. Повторяются теоретические положения.

Цель: Закрепить изученный материал решением задач.

Цель: Рассмотреть применимость некоторых теорем при решении задач.

Занятия 5, 6

Цель: Рассмотреть применимость некоторых теорем при решении экстремальных задач.

Цель: Рассмотреть методы решения прикладных экстремальных задач различными способами.

На занятиях решаются задачи на закрепление изученного материала по данной теме.

Занятия 7,8,9

Цель: Рассмотреть применимость производной к решению древнейших задач.

Задача Герона, задача Кеплера о вписанном цилиндре, задача Тартальи, задача Евклида о параллелограмме наибольшей площади, вписанном в треугольник. Перевод задач на математический язык, их решение основным методом.

Цель: Систематизировать и обобщить основные теоретические факты, полученные при изучении занятий.

Цель: Систематизировать и обобщить основные теоретические факты, получить обратную связь от учащихся .

Конспект занятия

Занятие 1. «Экстремальные задачи. Использование свойств квадратичной функции при решении задач»

Цель: создать условия, при которых школьники установят, какие свойства квадратичной функции могут быть использованы при решении задач.

Диагностируемые цели:

В результате ученик *знает:*

- что называется экстремальной задачей;
- алгоритм решения экстремальных задач;
- один из методов решения задачи, а именно – использование свойств квадратичной функции.

Диагностируемые цели:

В результате ученик *умеет:*

- находить наибольшее или наименьшее значение квадратичной функции (используя теорему о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции)

Методы обучения:

- по источнику передачи и характеру восприятия информации – словесные (эвристическая беседа), а также практические (поиск наибольшего или наименьшего значения квадратичной функции по готовым чертежам);
- по характеру познавательной деятельности учащихся – частично-поисковая;
- по степени управления учебной деятельностью – под руководством учителя через систему целесообразно подобранных задач и вопросов;
- метод мотивации – практическая необходимость;

Ход занятия

На доске написана цитата:

«…особенную важность имеют те науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды»

П. Л. Чебышев (1821-1894)

Учитель. Так как квадратичная функция принимает своё наименьшее или наибольшее значение в вершине параболы, то для нахождения наименьшего или наибольшего значения достаточно найти координаты вершины.

- Из курса восьмого класса вам известно, что любую квадратичную функцию $y=ax^2+вx+c$ с помощью выделения полного квадрата можно записать в виде $y=ax^2+вx+c=a\,(x+в/2a)^2+(4ac-в^2)/4a$
- . Основные возможности квадратичной функции, в плане решения оптимизационных задач, связаны именно с таким её представлением: $y=a\,(x-x_0)^2+y_0$
- Скажите, какие координаты имеет тогда вершина параболы?

Ход занятия

- *Учитель* Далее, учитывая знак числа а, то есть направление ветвей параболы, можно без труда найти наименьшее или наибольшее значение квадратичной функции . Чему оно будет равно? Теперь сформулируем теорему о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции. *Ученики (записывают в тетрадь)*. Теорема о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции. Если а>0 ($a<0$), то функция $y=ax^2+вx+c$ при $x = -в /2a$ принимает наименьшее (наибольшее) значение, равное $4ac-в^2/4a$.

Задача и ее решение

Учитель. Начнём работу с решения задачи 1.

Задача 1. Зависимость между размером используемой площади полей и валовым доходом из расчета на 100 га сельскохозяйственных угодий лесостепной зоны Львовской области выражена функцией $y = 9+9x-1{,}5x^2$, где x – площадь сельскохозяйственных угодий (в тыс. га), y – валовой доход на 100 га сельскохозяйственных угодий (в млн. руб.). При какой площади хозяйство будет иметь наибольший доход? Каков будет этот доход?

На доске и в тетрадях учеников появляются записи:

Задача 1. Функция $y = 9+9x-1{,}5x^2$ принимает наибольшее значение при $x=-9/2(-1{,}5)$, $x=3$ (тыс. га.),

$y_{наиб}=4(-1{,}5)9-9^2/4(-1{,}5)$, $y=22{,}5$(млн. руб.).

Ответ: хозяйство будет иметь наибольший доход на 100 га сельск. угодий, равный приблизительно22,5 млн. руб., при площади 3 тыс. га.

x

Схема решения задач

- *Учитель* любая экстремальная задача может быть решена по следующей схеме, состоящей из пяти этапов.
- Проанализировав условие задачи, определяют, наибольшее или наименьшее значение какой величины следует найти (часто говорят: какую величину следует оптимизировать?).
- Одну из неизвестных величин принимают за независимую переменную и обозначают её буквой x . Определяют границы изменения x.

- Исходя из условия задачи величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, выражают через x и известные величины (чаще всего зависимость выражается с помощью функции $y=f(x)$)).
- Находят средствами математики наибольшее или наименьшее значение на промежутке изменения x .
- Интерпретируют результат для рассматриваемой задачи. Записывают ответ.

Задача №2

<u>Задача 2.</u> На плоскости даны три точки *A*, *B* и *C*, не лежащие на одной прямой. Из точки *A* на *BC* опущен перпендикуляр *АД*, при чём *АД=а,ВД=в* , и *СД=с* . На отрезке *ВД* отмечена точка *М* так, чтобы значение суммы квадратов расстояний от *М* до *А*,*В* и *С* было наименьшим. Найти это значение.

Решение. 1 этап. Оптимизируемая величина: $AM^2+BM^2+CM^2$.

2этап. Независимая переменная: $MД=x$, $o<x<в$,

3 этап. 1) $\Delta АДМ$*- прямоугольный ,*

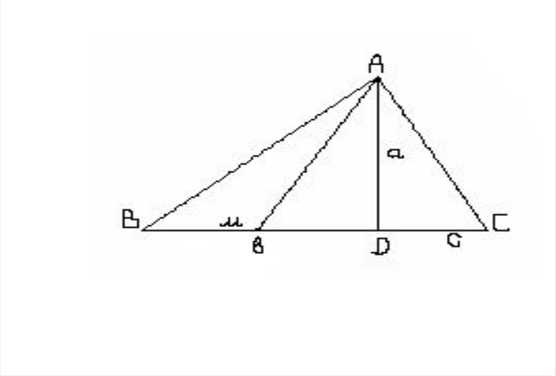
поэтому по теореме Пифагора

$AM^2=MД^2+AД^2=x^2+a^2$ *; 2)* $BM=(в\text{-}x)^2$ *;*

3) $CM=(c+x)^2$ *;4)* $y=3x^2+2(c\text{-}в)x+a^2+в^2+c^2$

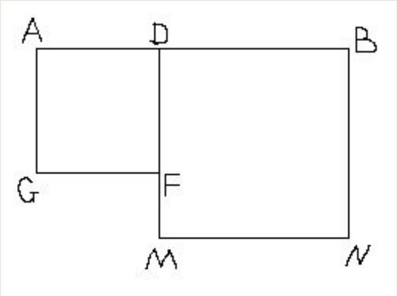
4 этап. $y_{наим}=a^2+2/3(в^2+вс+с^2)$ *5 этап.*

Ответ: наим. значение суммы квадратов расстояний $a^2+2/3(в^2+вс+с^2)$ *равно .*



Задача №3

<u>Задача 3.</u> Отрезок длиной *a* разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на его частях, была наименьшей. *Учитель.* Какую величину следует оптимизировать? Чему равна площадь квадрата *ADFG*? *DBNM ?* Какой вид примет оптимизируемая величина?



Подумайте, какую из величин следует принять за независимую переменную? Теперь определите границы изменения *x*. Выразим оптимизируемую величину через *x*. Найдем наименьшее значение функции и интерпретируем результат задачи.

Ответ: следует разделить отрезок пополам.

Решение задачи

На доске и в тетрадях учеников появляются следующие записи:

Задача 3. 1 этап. Оптимизируемая величина: $S_{ADFG}+S_{DBNM}$,

2 этап. Независимая переменная: $AD=x$, $o<x<a$,

3 этап. $S_{ADFG}+S_{DBNM}=AD^2+DB^2=x^2+(a-x)^2=x^2+a^2-2ax+x^2=2x^2-2ax+a^2$,

4 этап. $y(x)=2x^2-2ax+a^2$ $\quad x=a|2$.

5 этап. Ответ: следует разделить отрезок пополам.

Домашнее задание

Сегодня на уроке вы узнали много нового. Дома вы решите задачу 4, используя рассмотренную на уроке схему.

Задача 4. На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении неразрывающимся снарядом. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, если начальная скорость снаряда $V_0 = 300$ *т/с.*

Ускорение земного притяжения считать равным 10 *т/с*^{2}, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Литература

- Смирнова И., Смирнов В. Экстремальные задачи по геометрии. — М.: Чистые пруды, 2007. — 32 с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. Учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение,2002. —384с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 8 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение, 1991. — 239 с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 9 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение, 1991. — 239 с.: ил.
- Виленкин Н.Я. Алгебра для 9 кл. с угл. изуч. математики. М.: «Посвещение».-2005год.

Литература

- Нагибин Ф. Ф. Экстремумы. – М.: Просвещение, 1966. – 119с.
- Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2000. – 144с.: ил.
  Зильберберг Н. И. Алгебра и начала анализа. Для углубленного изучения в 10 классе. – Псков, 1994.
- Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции// Математика.- 2007.- №7.- С.2-7
  Решение прикладных задач по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции»// Математика.- 2007.- №7.- С.11
  Итоговое повторение по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции»// Математика.- 2007.- №7.- С.8-10
- Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие/ Т.А Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. Проф. Т.А. Ивановой.- Н. Новгород: НГПУ,2003, 320с