Тригономет рия

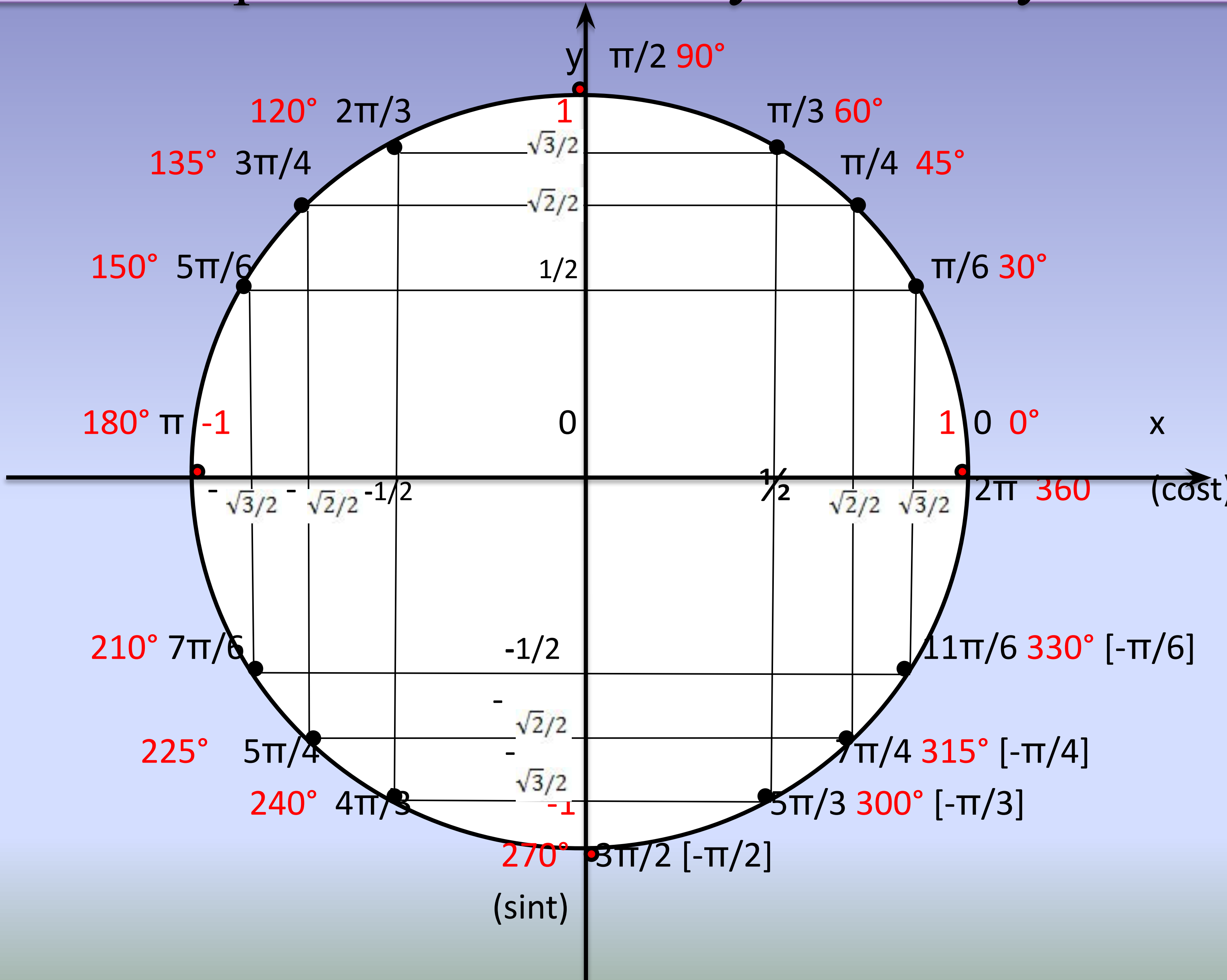
Тригонометрические уравнения и неравенства

$$asinx + bcosx = 0$$

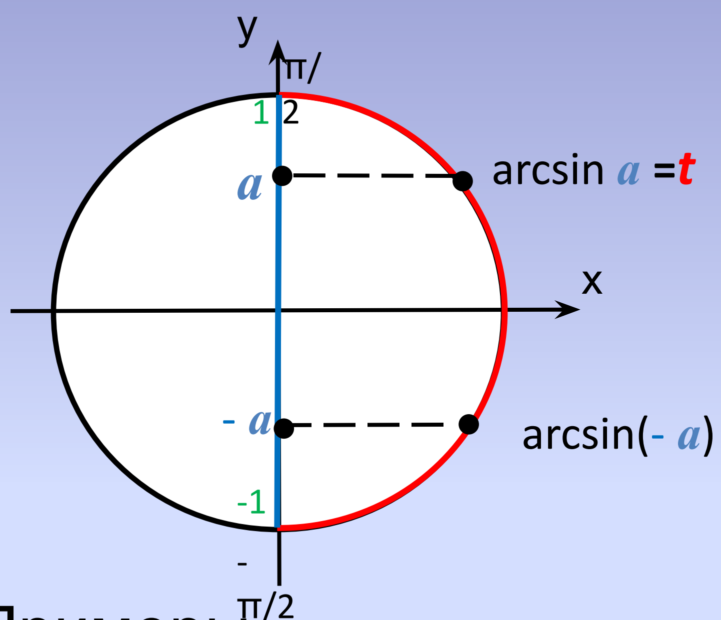
$$asin^2x + c \cdot sinxcosx + bcos^2x = 0$$

Попкова Т.Г. МОУ СОШ № 2 Горячий Ключ

Повторим значения синуса косинуса



Арксинус



Арксинусом числа a называется такое число (угол) t из **[-π/2;π/2]**, что $\sin t = a$.
Причём, $|a| \le 1$.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

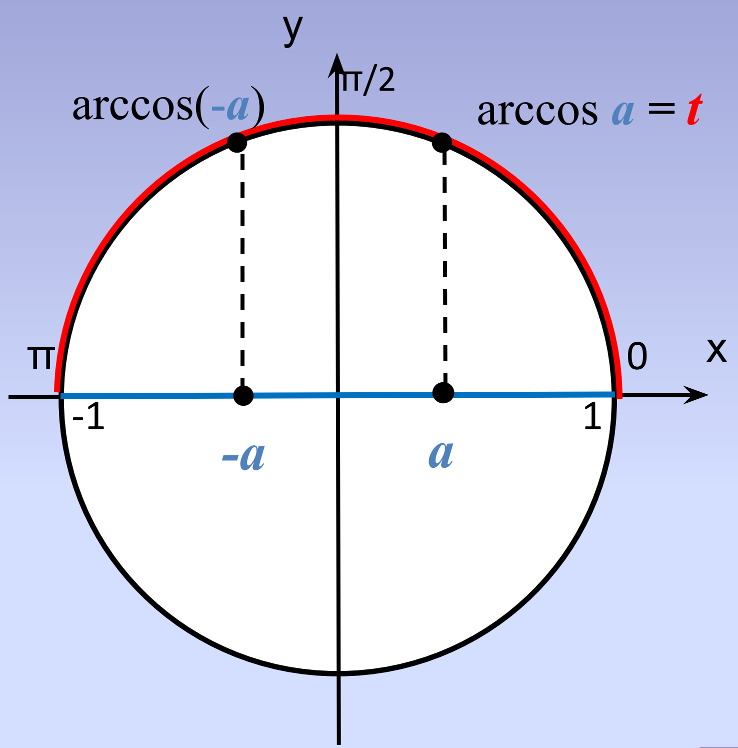
Примеры:

$$1)\ \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$3)\ \arcsin 0 = 0$$

Арккосинус



Арккосинусом числа *a* называется такое число (угол) *t* из [0;π], что

cos *t* = *a*.

Причём, | *a* |≤ **1**.

arccos(- *a*) = π- arccos *a*

Примеры:

1)arccos(-1) $= \boldsymbol{\pi}$

2)arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \frac{\pi}{6}$

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2x+1)$

1) $-1 \leq \mathbf{2x-1} \leq 1$

$-2 \leq \mathbf{2x} \leq 0$

$-1 \leq \mathbf{x} \leq 0$

Ответ: $[-1;0]$

2. $\arccos(5-2x)$

2) $-1 \leq \mathbf{5-2x} \leq 1$

$-6 \leq \mathbf{-2x} \leq -4$

$2 \leq \mathbf{x} \leq 3$

Ответ: $[2;3]$

3. $\arccos(x^2-1)$

$-1 \leq \mathbf{x^2-1} \leq 1$

$0 \leq \mathbf{x^2} \leq 2$

Ответ:

$[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$-1 \leq 4x^2-3x \leq 1$

$\begin{cases} 4x^2-3x \geq -1 \\ 4x^2-3x \leq 1 \end{cases}$

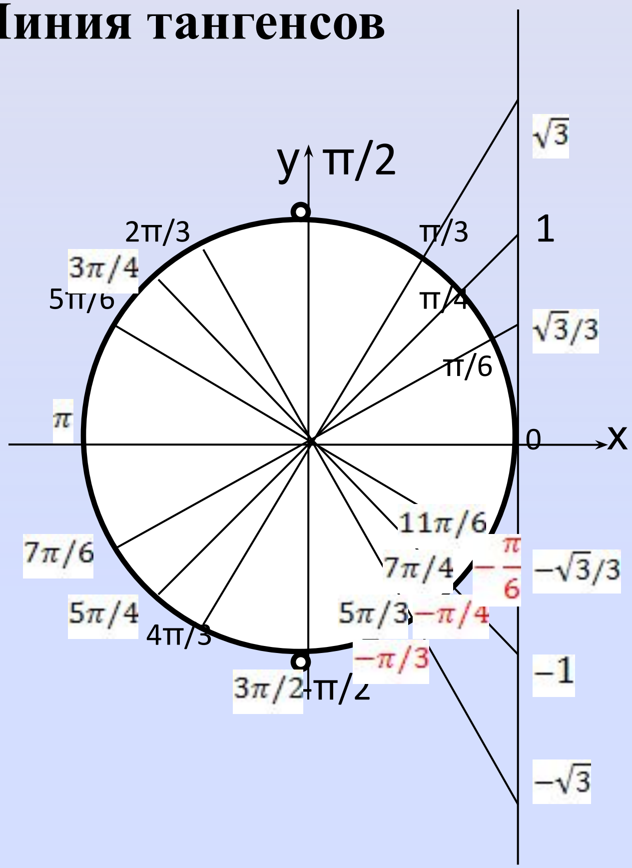
$4x^2-3x-1 \leq 0$

Ответ:

$\left[-\frac{1}{4};1\right]$

Повторим значения тангенса и котангенса

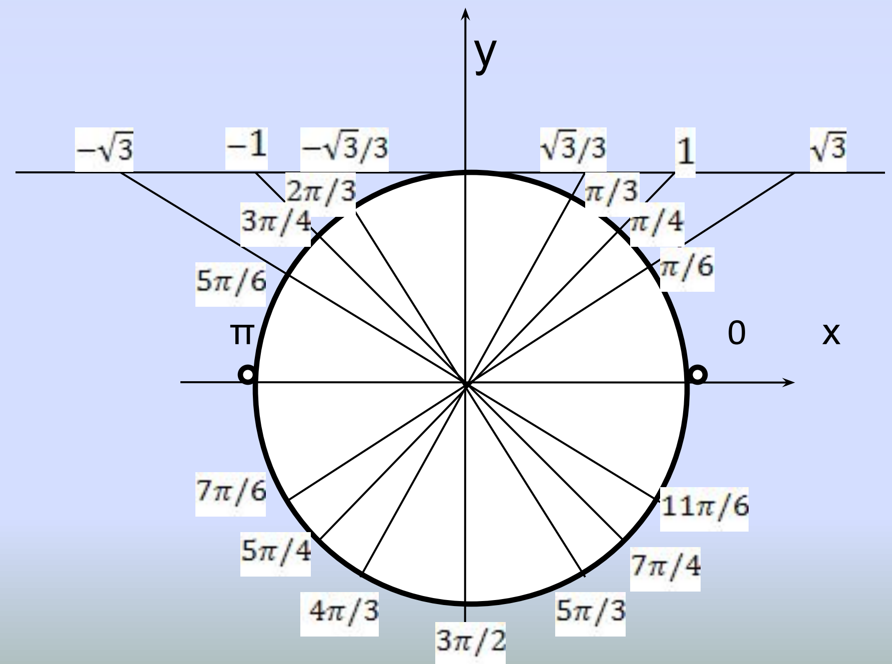
Линия тангенсов



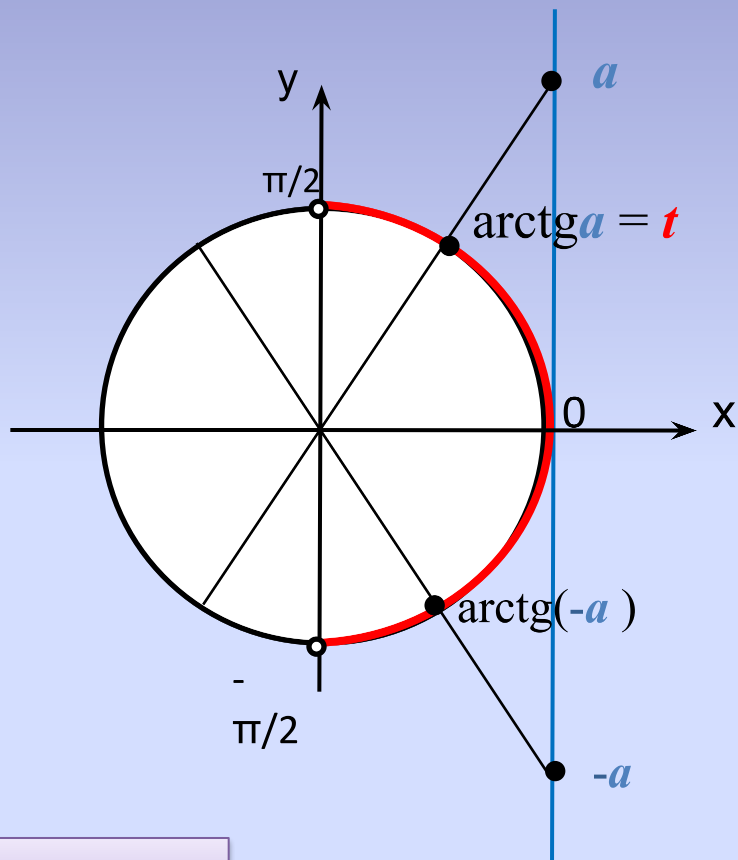
tg t ЄR , но t ‡ $\pi/2$ + π k, kЄZ

ctg t ЄR, но t ‡ 0 + πk, kЄZ

Линия котангенсов



Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из (-π/2;π/2), что **$tg\ t = a$.**

Причём, a **Є R.**

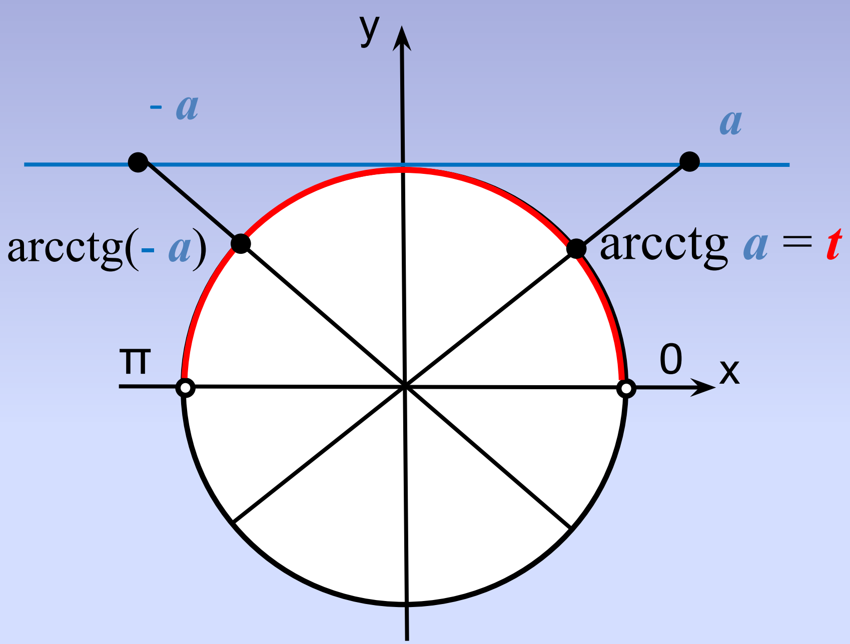
arctg(-a) = - arctg a

Примеры:

1) arctg√3/3 = π/6

2) arctg(-1) = -π/4

Арккотангенс



Арккотангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(0;\pi)$, что $ctg\ t = a$. Причём, $a \in R$.

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Примеры:

1) $\operatorname{arcctg}(-1) =$ $3\pi/4$

2) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} =$ $\pi/6$

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где |***a***| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)<u>cost=0</u>
t = π/2+πk, kЄZ

2)<u>cost=1</u>
t = 0+2πk, kЄZ

3)<u>cost = -1</u>
t = π+2πk, kЄZ

2.sint = a, где | a |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k arcsin\boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)<u>sint=0</u>
t = 0+πk, kЄZ

2)<u>sint=1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

3)<u>sint = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

3. tgt = *a*, *a*ЄR

t = arctg ***a*** + πk, kЄZ

4. ctgt = *a*, *a*ЄR

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

Примеры

:

1) $\cos t = -\frac{1}{2}$;

$t = \pm\arccos(-1/2) + 2\pi k,\ k \in Z$
$t = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

2) $\sin t = 0$;

Частный случай:
$t = 0 + \pi k,\ k \in Z$

3) $\operatorname{tg} t = 1$;

$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,\ k \in Z$
$t = \pi/4 + \pi k,\ k \in Z$.

4) $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$

$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$
$t = 5\pi/6 + \pi k,\ k \in Z$.

Решение простейших уравнений

1) $tg2x = -1$

$2x = arctg(-1) + \pi k, k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$.

2) **$\cos(x+\pi/3) = ½$**

$x+\pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

3) **$\sin(\pi – x/3) = 0$**

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k, k \in Z$

$x = 3\pi k, k \in Z$.

Ответ: $3\pi k, k \in Z$.

Другие тригонометрические уравнения

1.Сводимые к квадратным

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда

$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

1)Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим: простое уравнение

$$a \cdot \mathrm{tg}\, x + b = 0 \text{ или } \mathrm{tg}\, x = m$$

2)Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

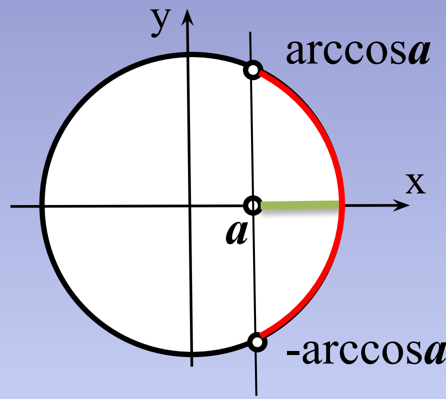
Разделим обе части на $\cos^2 x$.

Получим квадратное уравнение:

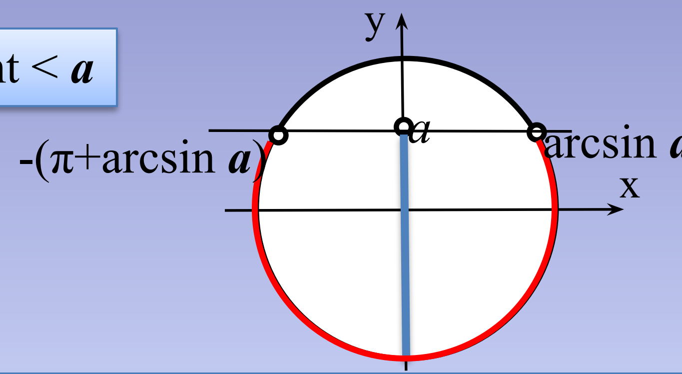
$$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg}\, x + c = 0.$$

Простые тригонометрические неравенства

1) $\cos t > a$



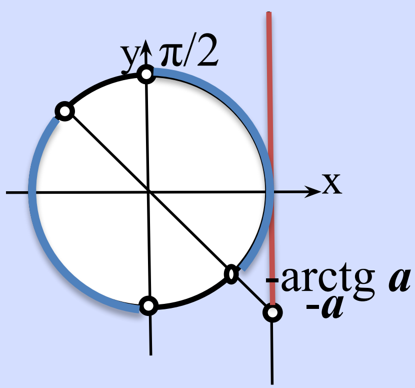
2) $\sin t < a$



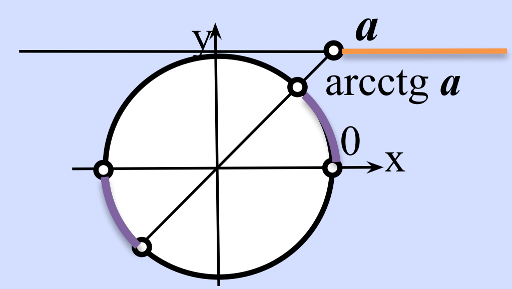
Ответ: (-(π+arcsin ***a***)+2πk; arcsin ***a***+2πk), kЄZ

Ответ: (-arccos ***a***+2πk; arccos ***a***+2πk), kЄZ

3) tgt > -***a***



4) ctgt > ***a***



Ответ: (0+πk; arcctg ***a***+πk), kЄZ.

Ответ: (-arctg ***a***+πk; π/2+πk), kЄZ