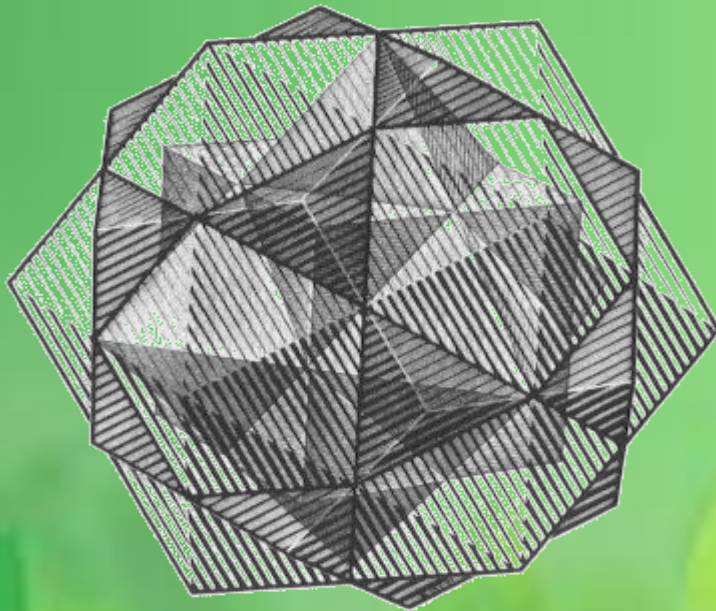


Теорема Минковского о многогранниках



Выполнила
ст. гр. 4219-1
Прожуган Яна

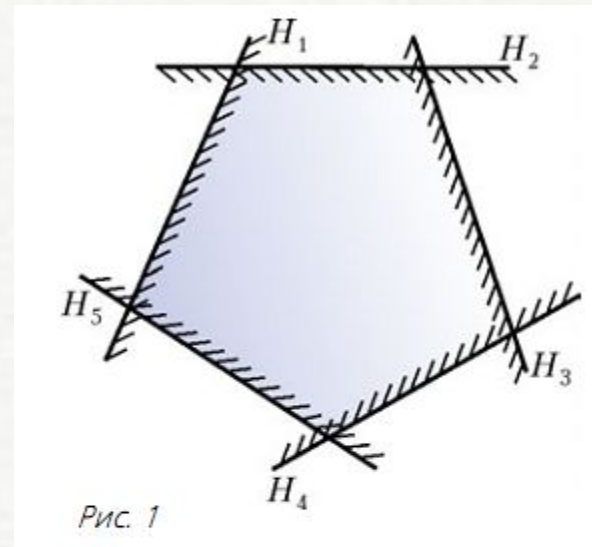
Теорема, о которой пойдет речь, наряду со знаменитыми теоремами Эйлера, Коши, Александрова, принадлежит к числу наиболее удивительных и глубоких результатов о многогранниках.

● Эта теорема была доказана в 1897 году выдающимся немецким математиком Германом Минковским (1864-1909).



Выпуклые многогранники и их «ежи»

Под выпуклым многогранником будем понимать пространственное тело, являющееся пересечением конечного числа полупространств.





5



7



3

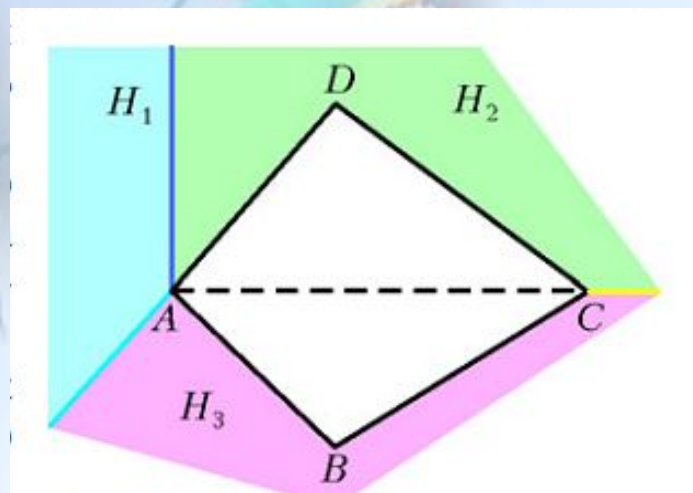


Введем важное понятие опорной плоскости.

Плоскость, имеющая с данным многогранником общие точки, но оставляющая многогранник по одну от себя сторону, называется **опорной**

Так как многогранник выпуклый, каждая опорная плоскость содержит:

- либо единственную точку многогранника – **вершину**;
- либо целый отрезок многогранника – его **ребро**;
- либо целый многоугольник, называемый **гранью**.



Теорема Минковского

Предположим, что дана система векторов в трехмерном пространстве с нулевой суммой.

Является ли она ежом какого-нибудь многогранника?

Удивительная теорема Минковского утверждает, что да, является.



$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$



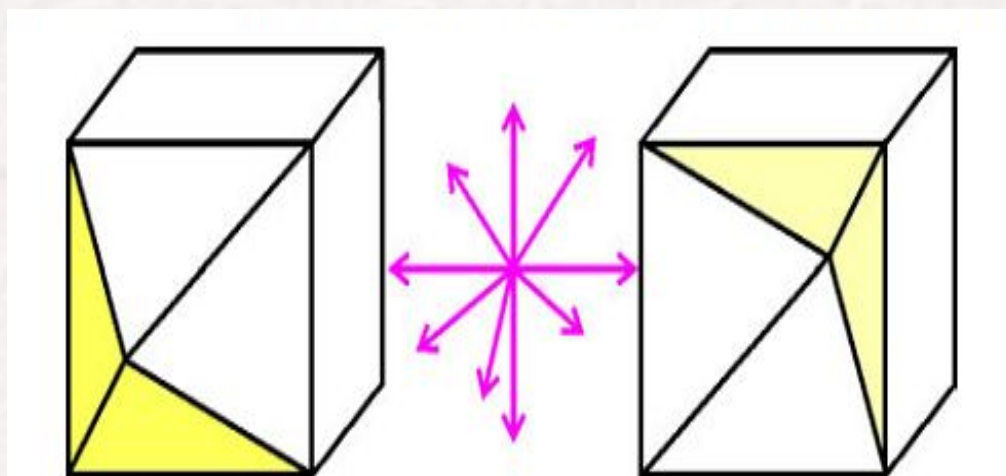
Теорема 1: (Г.Минковский).

Пусть $\{\vec{F}_i\}$ - множество векторов в пространстве, отложенных от одной точки, такое, что оно не лежит в одной плоскости. Тогда существует ограниченный многогранник P , еж которого есть множество векторов. Более того, многогранник P определен однозначно с точностью до параллельного переноса.

Для единственности многогранника условие выпуклости существенно.



Доказательство, данное Минковским, опирается на известный из Лагранжа. Другое доказательство было дано выдающимся российским геометром А.Д. Александровым(1912-1999).





5



7



3



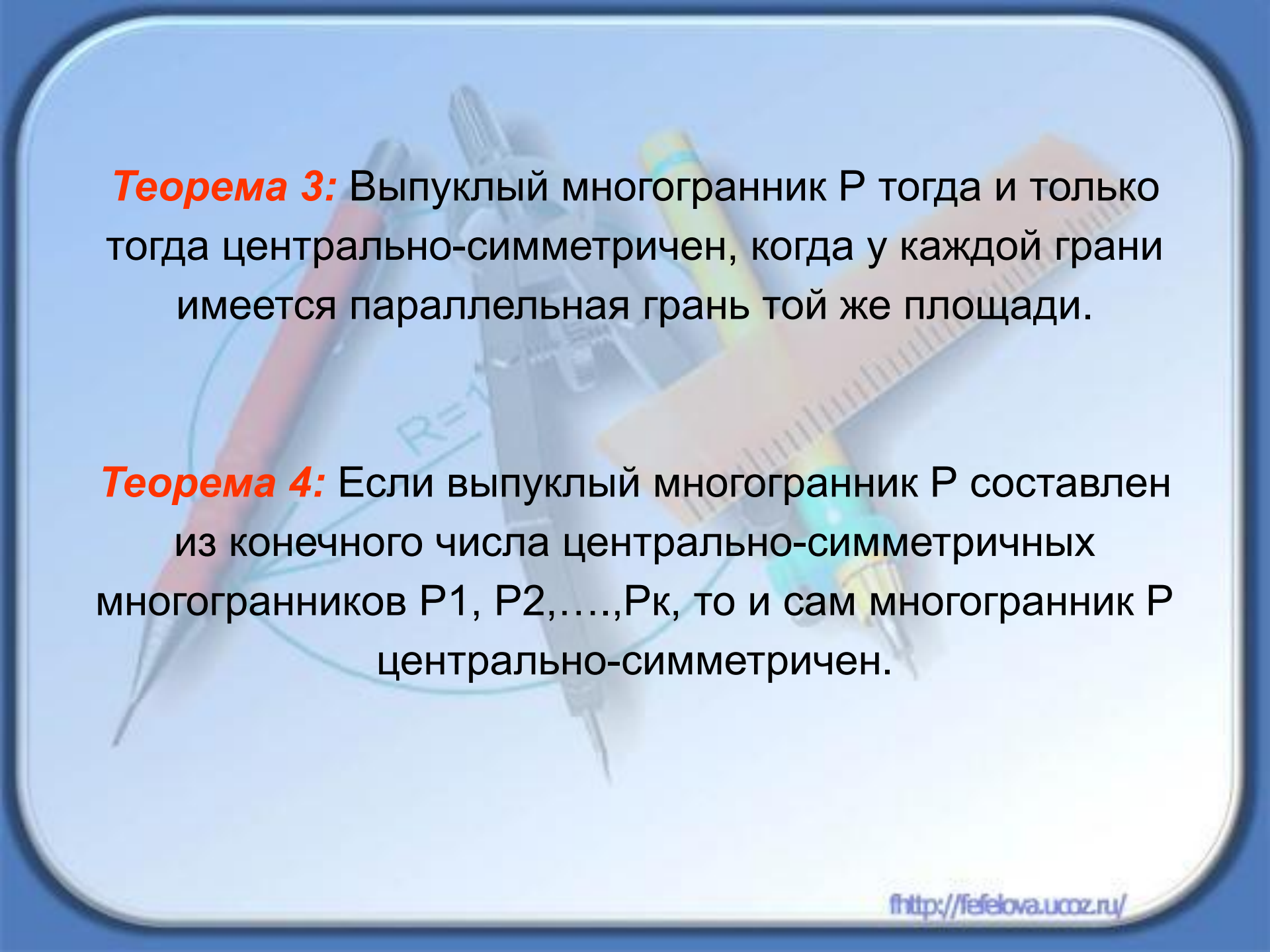
Теорема Минковского (точнее, ее
аналог) верна для многогранников
любой
размерности. Для случая плоских
многоугольников она доказывается
несложно.

Центрально-симметричные многогранники

Теорема Минковского чрезвычайно продуктивна. С ее помощью доказываются ряд теорем:

Теорема 2: Если P — центрально-симметричный многогранник, то его проекция P' также центрально-симметрична.





Теорема 3: Выпуклый многогранник P тогда и только тогда центрально-симметричен, когда у каждой грани имеется параллельная грань той же площади.

Теорема 4: Если выпуклый многогранник P составлен из конечного числа центрально-симметричных многогранников P_1, P_2, \dots, P_k , то и сам многогранник P центрально-симметричен.

Многогранники с центрально-симметричными гранями

Грани у центрально-симметричного многогранника не обязательно симметричны. Например, у октаэдра, который является центрально-симметричным многогранником, все грани – треугольники. Так что симметричность граней не является необходимым условием центрально-симметричного многогранника. Но является ли она достаточным условием? Оказывается да, является.





Теорема 5: (А.Д.Александров).

Если все грани выпуклого многогранника P центрально-симметричны, то и сам многогранник P центрально-симметричный.

Доказательство теоремы Александрова также опирается на теорему Минковского.

