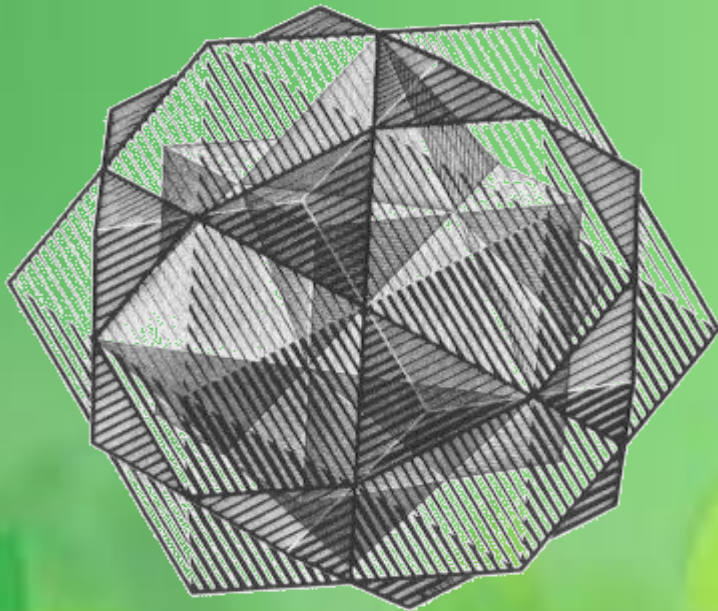


# Теорема Минковского о многогранниках



Выполнила  
ст. гр. 4219-1  
Прожуган Яна

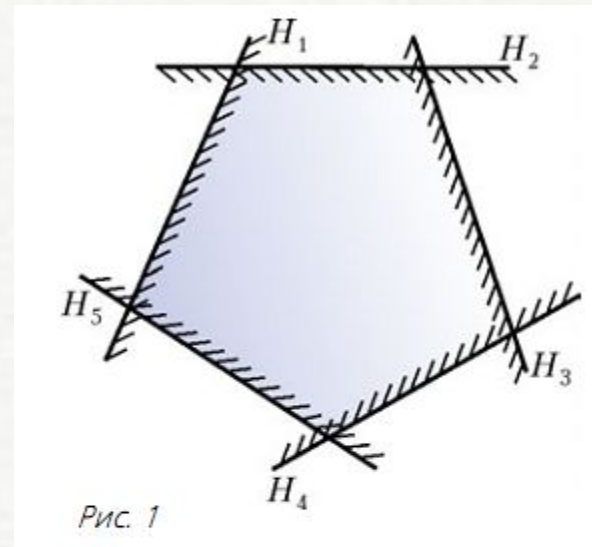
Теорема, о которой пойдет речь, наряду со знаменитыми теоремами Эйлера, Коши, Александрова, принадлежит к числу наиболее удивительных и глубоких результатов о многогранниках.

● Эта теорема была доказана в 1897 году выдающимся немецким математиком Германом Минковским (1864-1909).



# Выпуклые многогранники и их «ежи»

Под выпуклым многогранником будем понимать пространственное тело, являющееся пересечением конечного числа полупространств.







5



7



3

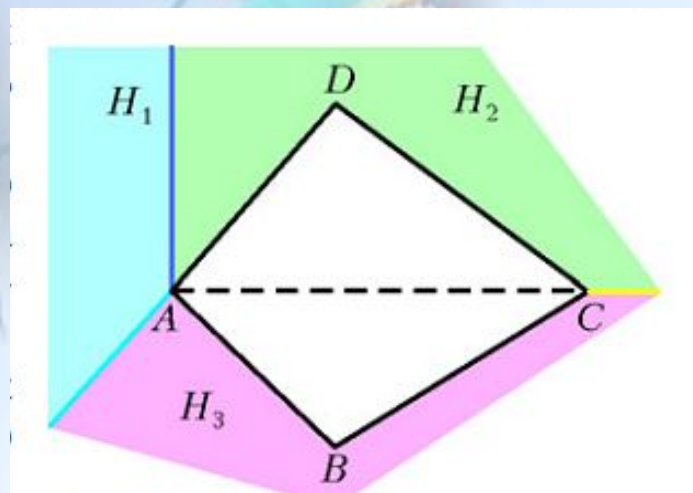


Введем важное понятие опорной плоскости.

Плоскость, имеющая с данным многогранником общие точки, но оставляющая многогранник по одну от себя сторону, называется **опорной**

Так как многогранник выпуклый, каждая опорная плоскость содержит:

- либо единственную точку многогранника – **вершину**;
- либо целый отрезок многогранника – его **ребро**;
- либо целый многоугольник, называемый **гранью**.



# Теорема Минковского

Предположим, что дана система векторов в трехмерном пространстве с нулевой суммой.

Является ли она ежом какого-нибудь многогранника?

Удивительная теорема Минковского утверждает, что да, является.





$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$



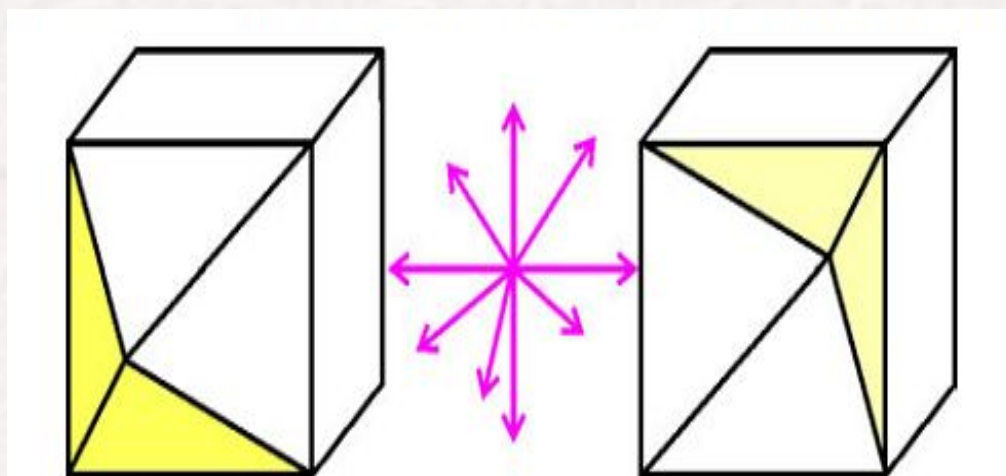
## **Теорема 1: (Г.Минковский).**

Пусть  $\{\vec{F}_i\}$  - множество векторов в пространстве, отложенных от одной точки, такое, что оно не лежит в одной плоскости. Тогда существует ограниченный многогранник  $P$ , еж которого есть множество векторов. Более того, многогранник  $P$  определен однозначно с точностью до параллельного переноса.

**Для единственности многогранника условие выпуклости существенно.**



Доказательство, данное Минковским, опирается на известный из Лагранжа. Другое доказательство было дано выдающимся российским геометром А.Д. Александровым(1912-1999).







5



7



3



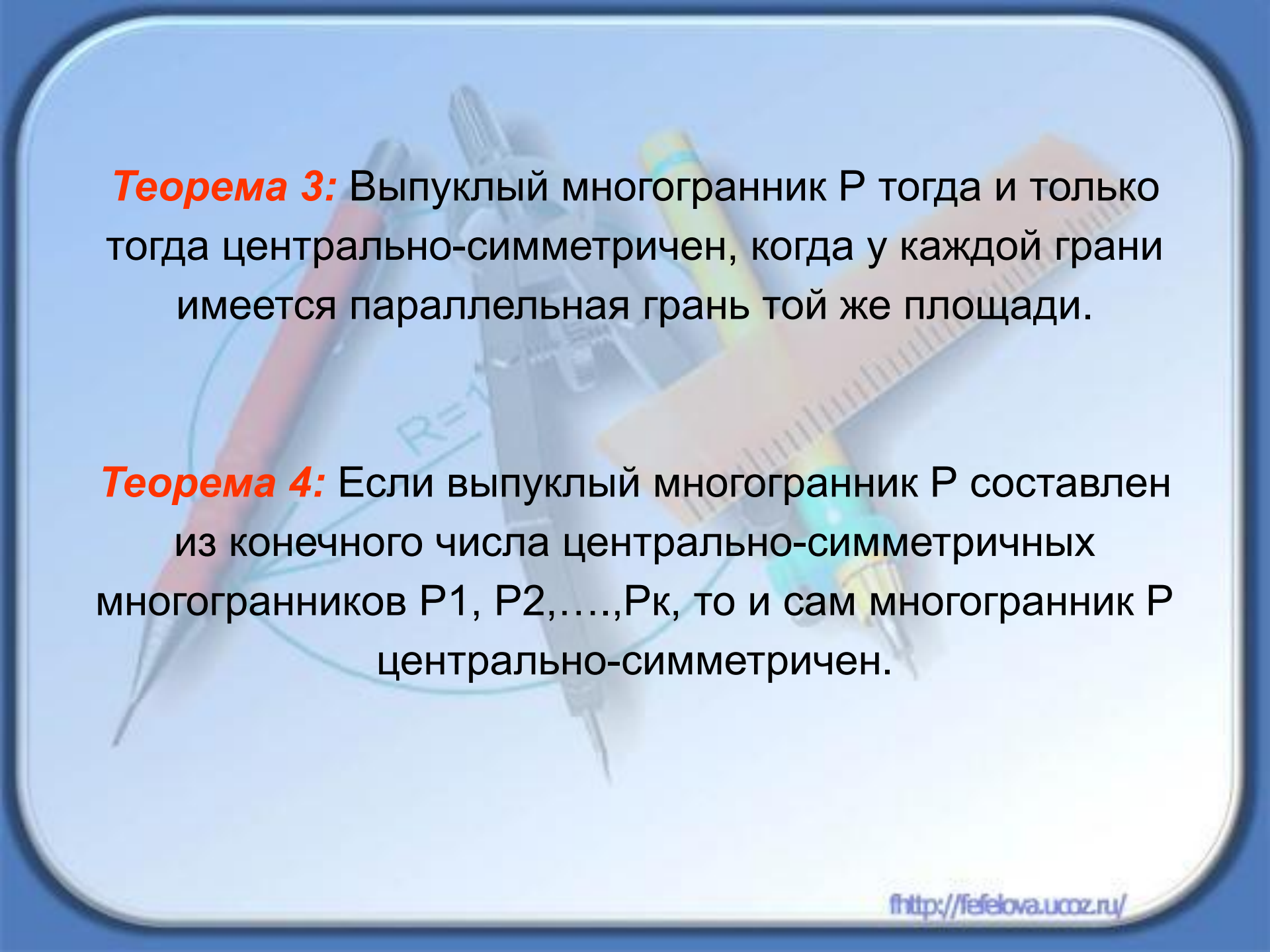
Теорема Минковского (точнее, ее  
аналог) верна для многогранников  
любой  
размерности. Для случая плоских  
многоугольников она доказывается  
несложно.

# Центрально-симметричные многогранники

Теорема Минковского чрезвычайно продуктивна. С ее помощью доказываются ряд теорем:

**Теорема 2:** Если  $P$  — центрально-симметричный многогранник, то его проекция  $P'$  также центрально-симметрична.





**Теорема 3:** Выпуклый многогранник  $P$  тогда и только тогда центрально-симметричен, когда у каждой грани имеется параллельная грань той же площади.

**Теорема 4:** Если выпуклый многогранник  $P$  составлен из конечного числа центрально-симметричных многогранников  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , то и сам многогранник  $P$  центрально-симметричен.



# Многогранники с центрально-симметричными гранями

Грани у центрально-симметричного многогранника не обязательно симметричны. Например, у октаэдра, который является центрально-симметричным многогранником, все грани – треугольники. Так что симметричность граней не является необходимым условием центрально-симметричного многогранника. Но является ли она достаточным условием? Оказывается да, является.





***Теорема 5: (А.Д.Александров).***

**Если все грани выпуклого многогранника  $P$  центрально-симметричны, то и сам многогранник  $P$  центрально-симметричный.**

**Доказательство теоремы Александрова также опирается на теорему Минковского.**

