

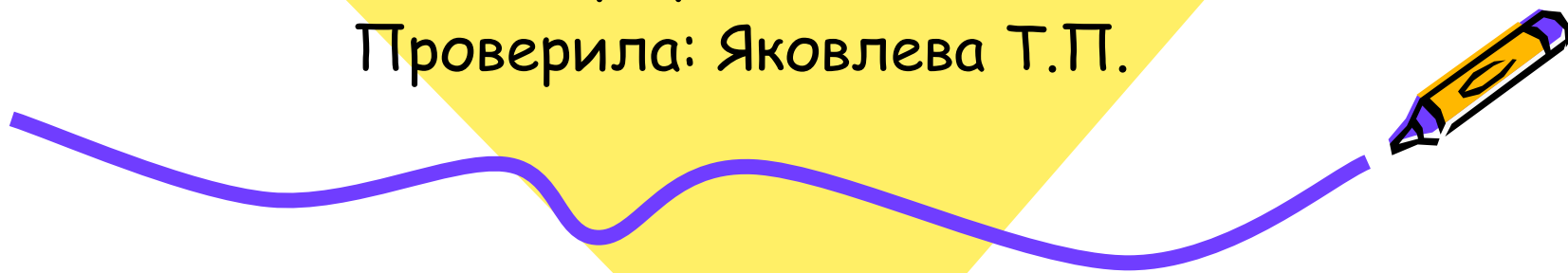


Проект на тему:

Решение уравнений II, III, IV
степени.

Выполнил: Сармутдинов Талгат «10а»

Проверила: Яковлева Т.П.





План:

- 1) Квадратные уравнения.
 - 2) Теорема Виета.
 - 3) Из истории.
 - 4) Формула Кардано.
 - 5) Метод Феррари.
-

Решение уравнений II, III, IV-й степеней по формуле.

Уравнения первой степени, т.е. линейные, нас учат решать ещё с первого класса, и особого интереса к ним не проявляют. Интересны нелинейные уравнения т.е. больших степеней. Среди нелинейных (уравнений общего вида, не решаемых разложением на множители или каким-либо другим относительно простым способом) уравнения низших степеней (2, 3, 4-й) можно решить с помощью формул. Уравнения 5-й степени и выше неразрешимы в радикалах (нет формулы). Поэтому мы рассмотрим только три метода.



I. Квадратные уравнения.

Формула Виета.

Дискриминант квадратного трехчлена.

- Для любого приведённого кв. уравнения справедлива формула : $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

- Обозначим: $D=p-4q$ тогда формула примет вид: $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$

- Выражение D называют дискриминантом. При исследовании кв. трехчлена смотрят на знак D . Если $D>0$, то корней 2; $D=0$, то корень 1; если $D<0$, то корней нет.



Теорема Виета

- Для любого приведённого кв. уравнения $x^2 + px + q = 0$

Справедлива теорема Виета: $x_1 + x_2 = \left(\frac{-p + \sqrt{D}}{2}\right) + \left(\frac{-p - \sqrt{D}}{2}\right) = -p$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-p + \sqrt{D}}{2}\right) \left(\frac{-p - \sqrt{D}}{2}\right) = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q$$

- Для любого уравнения n-ой степени теорема Виета также справедлива: коэффициент взятый с противоположным знаком, равен сумме его n корней; свободный член равен произведению n его корней и числа (-1) в n степени.

Вывод формулы Виета.

- Запишем формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- И заменим в ней a на x , b на $\frac{p}{2}$
- Получим: $(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$
- Теперь отсюда вычтем первоначальное равенство: $(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$
- Теперь нетрудно получить нужную формулу.

Пример :

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$
$$D = p^2 - 4aq = 49 - 24 = 25 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 5}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 5}{6} = -\frac{12}{6} = -2$$

Ответ : $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = -2.$

III. Из истории.

В XV-XVI вв. расцвет науки происходит главным образом в Италии, во Франции и в Германии, а позднее, - в конце 16 в., - в Голландии, которая в это время переживала первую в Европе буржуазную революцию.

Итальянские математики 16 в. сделали крупнейшее математическое открытие. Они нашли формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Рассмотрим произвольное кубическое уравнение:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

И покажем, что с помощью подстановки $y = x - \frac{a}{3}$ его можно преобразить к виду $x^3 + px + g = 0$

Пусть $y = x + a$ Получим: $(x + a)^3 + a(x + a)^2 + b(x + a) + c = 0$

$$x^3 + (3a + a)x^2 + (3a^2 + 2aa + b)x + (a^3 + aa^2 + ba + c) = 0$$

Положим $3a + a = 0$ т.е. $a = -\frac{a}{3}$ Тогда данное уравнение

примет вид

$$x^3 + px + g = 0$$

В 16 в. было распространено соревнование между учеными, проводившееся в форме диспута. Математики предлагали друг другу определенное число задач, которые нужно было решить к началу поединка. Выигрывал тот, кто решил большее число задач. Антонио Фиоре постоянно участвовал в турнирах и всегда выигрывал, так как владел формулой для решения кубических уравнений. Победитель получал денежное вознаграждение, ему предлагали почетные, высокооплачиваемые должности.

IV. Тарталья преподавал математику в Вероне, Венеции, Брешии. Перед турниром с Фиоре он получил от противника 30 задач, увидев, что все они сводятся к кубическому уравнению $x^3 + ax = b, a > 0$

И приложил все силы для его решения. Отыскав формулу, Тарталья решил все задачи, предложенные ему Фиоре, и выиграл турнир. Через день после поединка он нашел формулу для решения уравнения $x^3 = ax + b, a > 0, b > 0$

Это было величайшее открытие. После того как в Древнем Вавилоне была найдена формула для решения квадратных уравнений, выдающиеся математики в течение двух тысячелетий безуспешно пытались найти формулу для решений кубических уравнений. Метод решения Тарталья держал втайне.

Рассмотрим уравнение $x^3 = ax + b$

Тарталья использовал подстановку $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Из уравнения он получил: $\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)^3 = a\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) + b,$

$$u + v + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) = a\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) + b,$$

$$u + v = b, 3\sqrt[3]{uv} = a$$

Для u и v получена система

$$\begin{cases} u + v = b, \\ uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Значит, они являются корнями квадратного уравнения

$$y^2 - by + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

Следовательно, для отыскания x имеем формулу

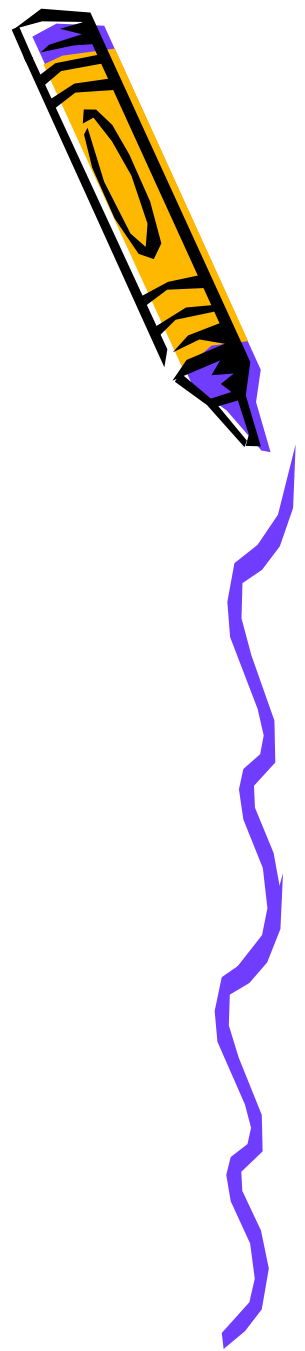
$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Ее называют сейчас формулой Кардано, так как она впервые была опубликована в 1545 г. в книге Кардано «Великое искусство, или Об алгебраических правилах».

Джироламо Кардано (1501-1576) окончил университет в Падуе. Его главным занятием была медицина. Кроме того, он занимался философией, математикой, астрологией, составлял гороскопы Петрарки, Лютера, Христа, английского короля Эдуарда 6. Папа римский пользовался услугами Кардано - астролога и покровительствовал ему. Кардано умер в Риме. Существует легенда, что он покончил жизнь самоубийством в тот день, который предсказал, составляя собственный гороскоп, как день своей смерти.

Кардано неоднократно обращался к Тарталье с просьбой сообщить ему формулу для решения кубических уравнений и обещал хранить ее тайну. Он не сдержал слова и опубликовал формулу, указав, что Тарталье принадлежит честь открытия «такого прекрасного и удивительного, превосходящего все таланты человеческого духа».

В книге Кардано «Великое искусство...» опубликована также формула для решения уравнений четвертой степени, которую открыл Луиджи Феррари (1522-1565)-ученик Кардано, его секретарь и поверенный.



V. Изложим метод Феррари. Запишем общее уравнение четвертой степени:

$$y^4 + py^3 + gy^2 + ry + s = 0$$

С помощью подстановки $y = x + a$ его можно привести к виду $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

Используя метод дополнения до полного квадрата, запишем: $x^4 + ax^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2$

Феррари ввел параметр t и получил: $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + 2t\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) + t^2$

Отсюда $x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 - 2t\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) - t - \frac{a^2}{4} + bx + c$.

Учитывая, получим $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(at + t^2 + \frac{a^2}{4} - c\right)$.

В левой части уравнения стоит полный квадрат, а в правой - квадратный трехчлен относительно x . Чтобы правая часть была полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена равнялся нулю, т.е. число t должно удовлетворять уравнению

- Кубические уравнения Феррари решил по формуле Кардано. Пусть t_0 - корень уравнения. Тогда уравнение запишется в виде $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t_0\right)^2 = 2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2$
- Отсюда получаем два квадратных уравнения: $x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm \sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)$
- Они дают четыре корня исходного уравнения.

Приведем пример. Рассмотрим уравнение $x^3 + 15x + 4$.

Легко проверить, что $x = 4$ - корень этого уравнения.

Естественно считать, что, используя формулу Кардано, мы найдем этот корень. Проведем вычисления, учитывая, что $a = 15, b = 4$.

По формуле находим: $x^2 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Как понять выражение $\sqrt{-121}$ На этот вопрос первым ответил инженер Рафаэль Бомбелли (ок. 1526-1573), работавший в Болонье В 1572 г. он издал книгу «Алгебра», в которую ввел в математику число i , такое, что

$$i \cdot i = -1$$

Бомбелли сформулировал правила операций с числом

$$1 \cdot i = i \quad (-1) \cdot i = -i \quad i \cdot i = -1 \quad (-i)(i) = 1$$

$$1 \cdot (-i) = -i \quad (-1)(-i) = i \quad i \cdot (-i) = 1 \quad (-i)(-i) = -1$$

Согласно теории Бомбелли, выражение $\sqrt{-121}$ можно записать так:

$$\sqrt{-1 \cdot 121} = \sqrt{i \cdot i \cdot 121} = 11i$$

А корень уравнения, имеющий вид, можно записать так:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 + 11i}$$

Вывод:

Изучая данную тему, я пришёл к выводу, что существуют формулы для решения уравнений II, III, IV степеней, не входящие в школьный курс математики. Корни уравнения не всегда действительные числа.



Список использованной литературы:

- 1) Энциклопедия для школьников. Математика 1998 г.
- 2) История математики. К.А. Рыбников