Проект

Никишина Алексея

Тема: «Понятие числового ряда»

Димитровград
2008- 2009 год

Содержание.

- Определение числового ряда
- Сумма ряда
- Примеры числовых рядов
- Определение частичной суммы
- Сходящиеся и расходящиеся ряды
- Признак Даламбера, исследование на сходимость
- Использованная литература и программное обеспечение.

Определение числового ряда.

Еще в древности ученые встречались с понятием бесконечных последовательностей: $U_{1,}$ $u_{2,}$ $u_{3,}$ $u_{n, \dots,}$

и с понятием бесконечных рядов $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

числа u_1, u_2 , u_3, … - члены ряда.

Пользуясь введенным Эйлером знаком суммы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

рассмотрим частичные суммы данного ряда.

$s_1 = u_1$ – первая частичная сумма,

$s_2 = u_1 + u_2$ –вторая частичная сумма,

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – третья и т.д.

Сумма $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ - частичная сумма ряда.

Сумма ряда.

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, где

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= u_1,\\
s_2 &= u_1 + u_2,\\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

При $n \to \infty$ частичная сумма имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Сходящиеся и расходящиеся ряды.

Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется расходящимся.

Примеры числовых рядов.

Пример 1.

Выражение

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

является рядом.

Составим частичные суммы

$s_1 = 1$, $s_2 = 1 - 1 = 0$, $s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, …,

$$s_n = 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

Примеры числовых рядов.

Пример 2.

Выражение

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$$

является рядом.

Из членов

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots$$

составляют частичные суммы

$$s_1=1, s_2=1\frac{1}{2}, s_3=1\frac{3}{4},\ldots, s_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots$$

Примеры сходящихся и расходящи

Пример 3.

Ряд

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots$ -

расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм

$s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$, … , $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \ldots$

имеет бесконечный предел.

Примеры сходящихся и расходящи

Пример 4.

Ряд

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots +(-1)^{n+1} + \dots$ -

расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \dots, s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \dots$$

не имеет никакого предела.

Исследование на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} (n = 1,2,3,\ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Необходимое условие сходимости ряда.

Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

может сходится, когда общий член ряда u_n стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда.

Пример 5.

Ряд

$0,4 + 0,44 + 0,444 + 0,4444 + \ldots$ - расходится, т.к. общий член ряда не стремиться к нулю.

Пример 6.

Ряд

$1 – 1 + 1 – 1 + \ldots$ - расходится, т.к. общий член ряда не стремится к нулю.

Сумма ряда.

Если знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству:

$$|q| < 1,$$

то последовательность частичных сумм (Sn) имеет предел:

$$S = \frac{a}{1-q},$$

который называют суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (т.е. суммой ряда).

Признак Даламбера

Если члены положительного ряда

$a_1+a_2+ \ldots + a_n+\ldots$

таковы, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$,

то при $\rho < 1$ ряд сходится,

а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Применение признака Даламбера

Примеры

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1. $$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$$

2. $$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}\ldots$$

Решение: воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n=\frac{n}{3^n}$$

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3},\text{т.к. }\rho=\frac{1}{3}<1,\text{то}$$

ряд сходится.

Применение признака Даламбера

Решение второго примера:

$$a_m = \frac{n!}{10^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

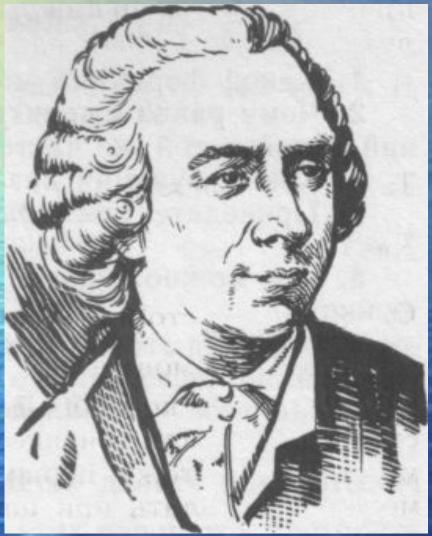
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}} : \frac{n!}{10^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$$

т.к. $\rho = \infty$, то ряд расходится.

Краткая историческая справка

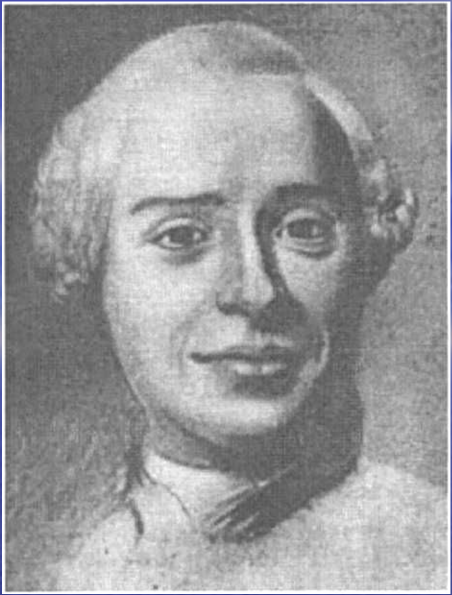
Леонард Эйлер

(1707-1783)



Швейцарский математик и механик, академик Петербургской Академии наук, автор огромного количества научных открытий во всех областях математики. Эйлер первым применил средства математического анализа в теории чисел, положил начало топологии.

Краткая историческая справка

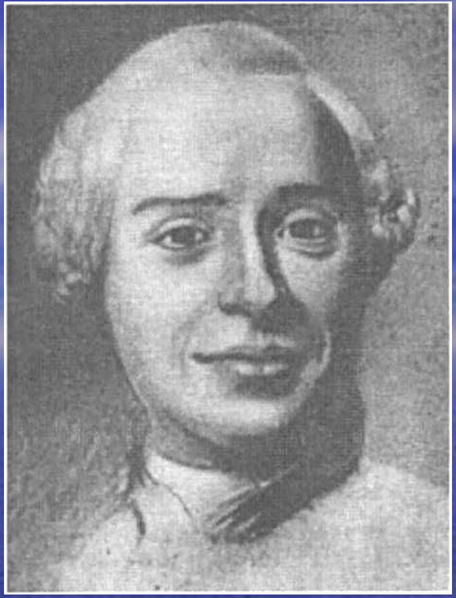


- Жан Лерон Даламбер получил своё имя по названию маленькой церкви на ступени которой он был подброшен матерью. Жена бедного стекольщика заменила ему мать. Воспитатели Жана хотели, чтобы он был юристом или врачом, однако он стал математиком и срилососр*ом.

- Став знаменитостью и гордостью французской науки, Даламбер вознаградил стекольщика и его жену, следя за тем, чтобы они не оказались в нужде, и всегда с гордостью называл их своими родителями.

- Жан Лерон Даламбер один из главных деятелей «Энциклопедии» и ее редакторов. С1751 г. вместе с Д. Дидро участвовал в её создании (1-й том вышел в 1/51—52 гг.). Написал введение к ней, являющееся одним из самых блестящих образцов «научного стиля». В срилососр*ии Даламбер был сторонником сенсуализма и противником декартовской теории врожденных идей.

Краткая историческая справка



- Однако сенсуализм его не был последовательно материалистическим. По Даламберу, мышление не является свойством материи, а душа имеет независимое от материи существование.
- В противоположность другим французским просветителям он утверждал, что нравственность не обусловлена общественной средой. Даламбер признавал бога как образующую субстанцию. Критика непоследовательного сенсуализма Даламбера была дана в работах Дидро.
- В "Трактате о динамике" (1758 г.) излагает свой принцип рассмотрения механической системы со связями, сводящий любую задачу динамики к задаче равновесия.
- В 1794 г. избран во Французскую академию. В1757г. он покинул редакцию «Энциклопедии». В середине 1/60-х гг. Даламбер был приглашён российской императрицей Екатериной II в качестве воспитателя наследника престола, но он отказался принять приглашение.

Использованная литература.

- *И. И. Баврин, В. Л. Матросов «Общий курс высшей математики» Москва, 1995;*
- *А. Г. Цыпкин «Справочник по математике» Москва, 1983;*
- *М. Я. Выгодский «Справочник по высшей математике» Москва, 1997*

Программное обеспечение:

- *MS Word;*
- *Mathcad;*
- *MS Power Point;*
- *Windows Media;*
- *MS Excel.*