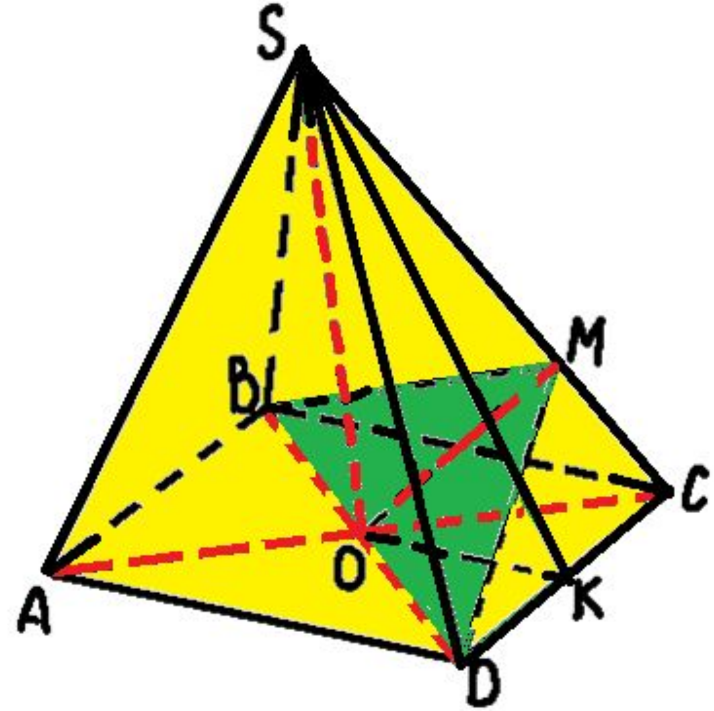
Разные задачи повышенного уровня сложности на многогранники, цилиндры, косинус и шар.

Выполнил:
ученик 10 «Б» класса
МБОУ лицей №3 г. Воронежа
Козловский Никита.

Руководитель:
Орлова О.В.
учитель высшей категории,
учитель математики
МОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов
№78 городского округа город Воронеж

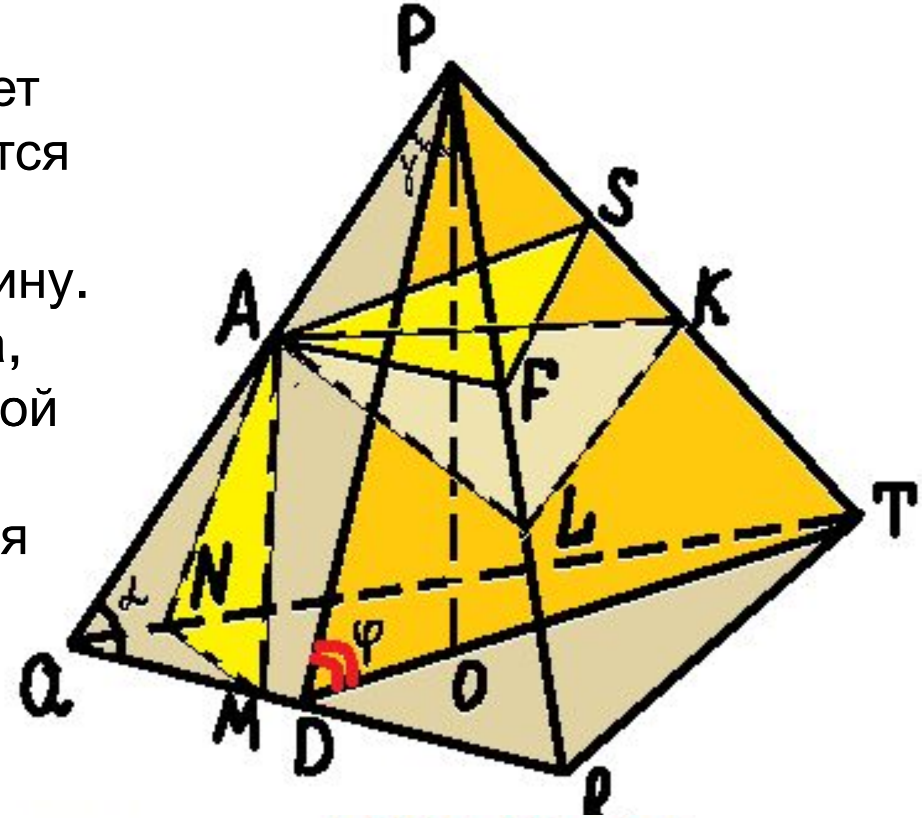
Величина двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равна α. Определить величину двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды. Для каких α задача имеет решение?



Ответ:

$$\beta = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Плоскость, проходящая через точку A бокового ребра PQ правильной треугольной пирамиды $PQRT$ и параллельная ребру TR, пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найти площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани равна k, боковая грань PTR составляет с плоскостью основания угол φ и $AQ = 0{,}75AP$.



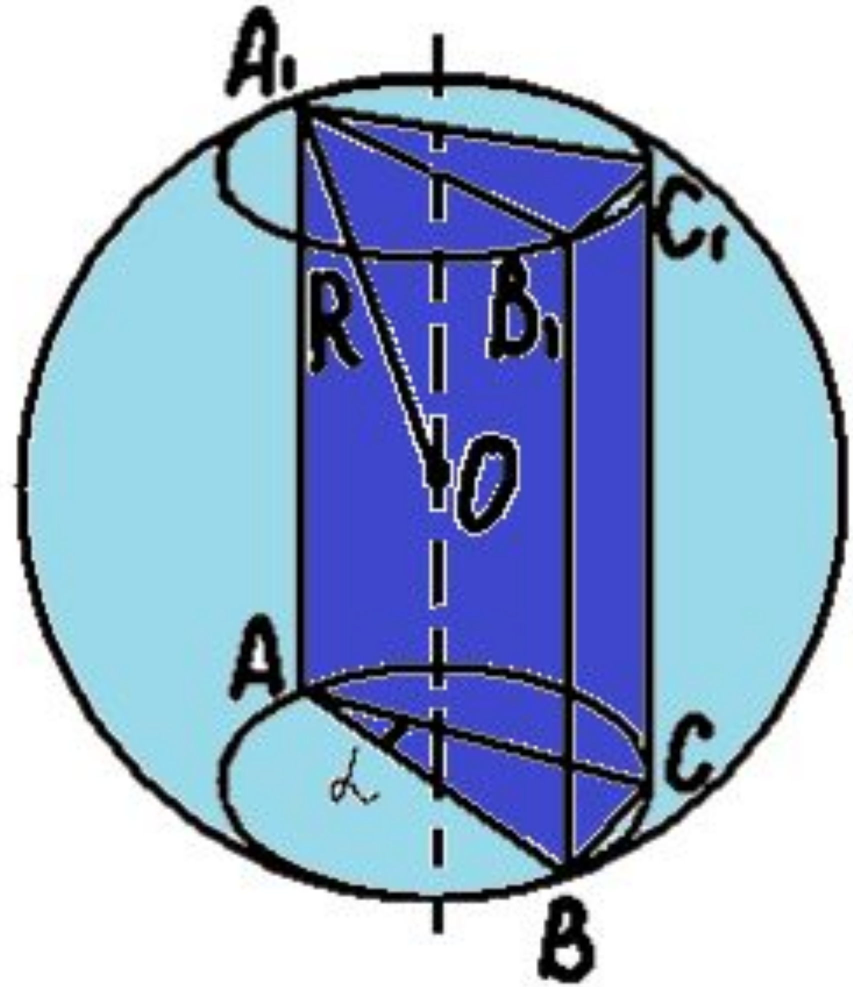
Ответ: 1) при $0 < \varphi \le arccos\frac{1}{5}$

$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 cos^2\varphi \qquad S_2 = \frac{3\sqrt{3}k^2(1+3cos^2\varphi)^2}{784cos^2\varphi}$$

2)при $arccos\frac{1}{5} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$

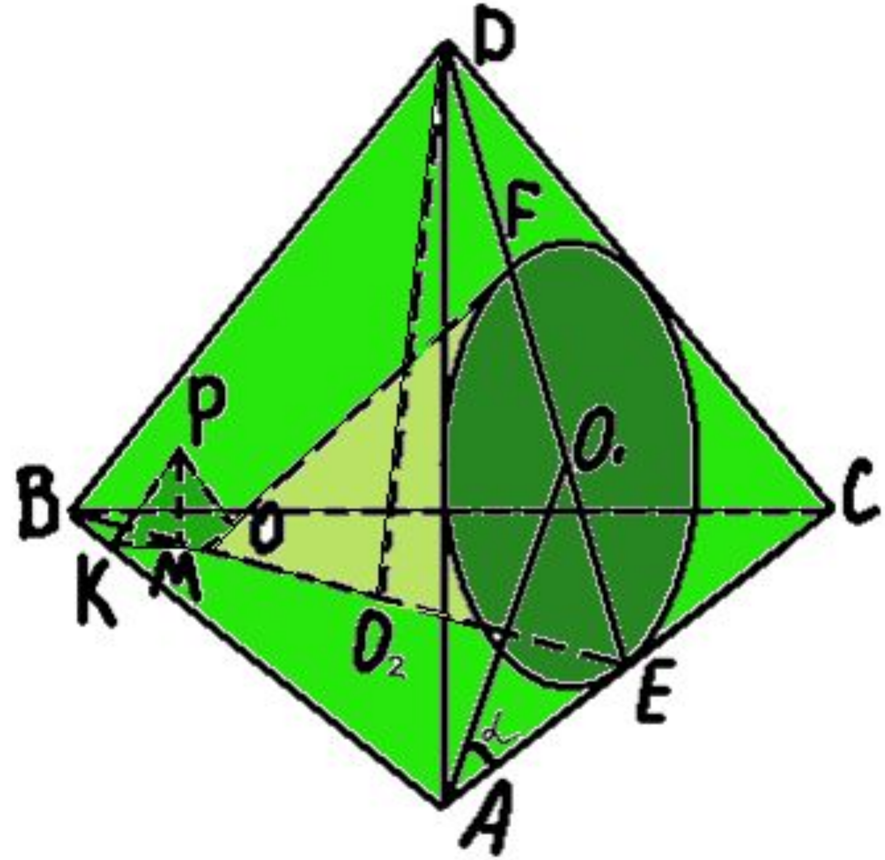
$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 cos^2\varphi, S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 cos^2\varphi \frac{(1+3cos^2\varphi)^2}{(1-9cos^2\varphi)^2} \le a$$

В сферу, радиус которой равен R, вписана прямая призма, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая ее боковая грань – квадрат. Определите объем призмы.



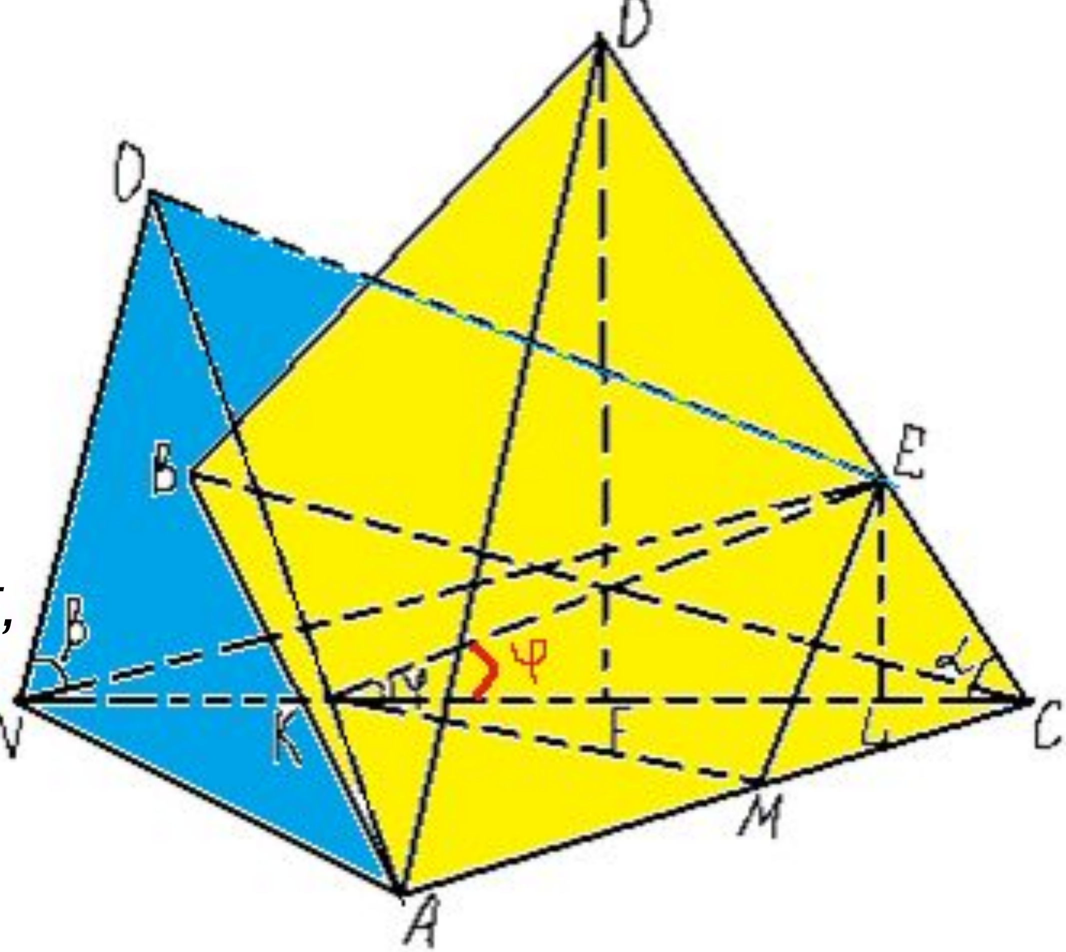
Ответ: $V = \frac{R^3\sqrt{2}}{2} sin2\alpha$

В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна а . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE{:}OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B.



Ответ: $r = \frac{a}{4}, \qquad R = \frac{a\sqrt{13}(8 - 3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$

Ребро правильного тетраэдра *ABCD* равно , точка *K* – середина ребра *AB*, точка *E* лежит на ребре *CD* и *EC:ED = 1:2*, точка *F* – центр грани *ABC*. Найти угол между прямыми *KC* и *KE*, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки *A, B, E, F*.



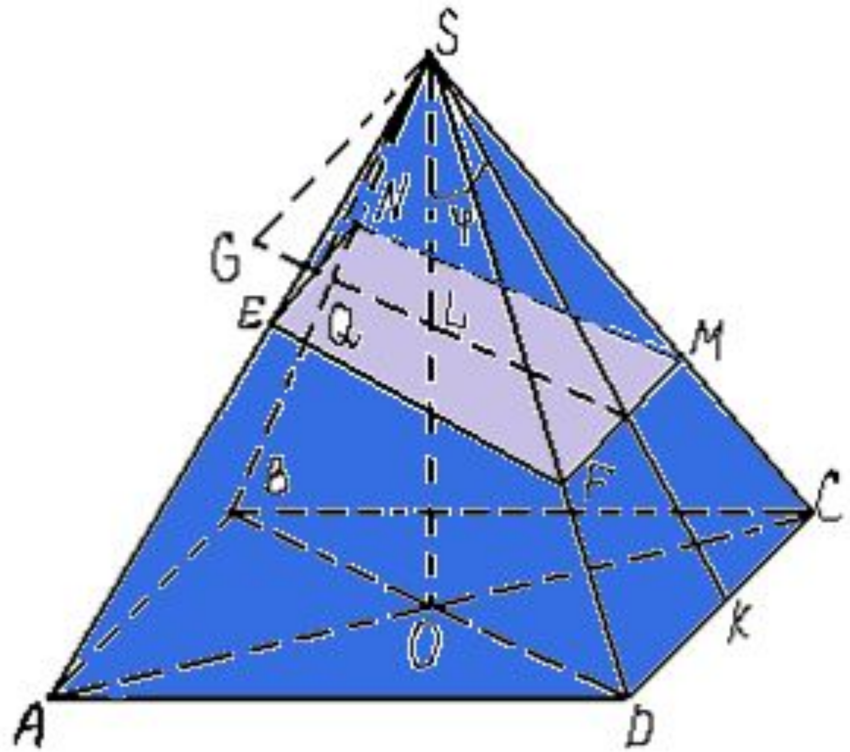
Ответ: $arccos\frac{7}{2\sqrt{19}};\ a\sqrt{\frac{2}{3}};\ a\sqrt{\frac{11}{6}}$

Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна . На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти

площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

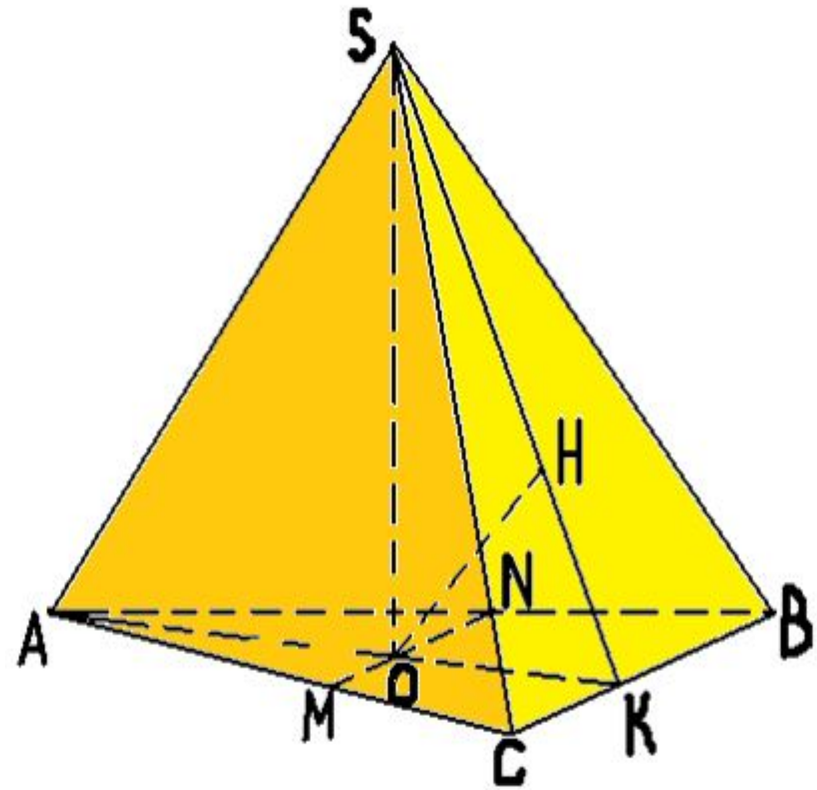
радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

угол между плоскостью α и плоскостью ABC.



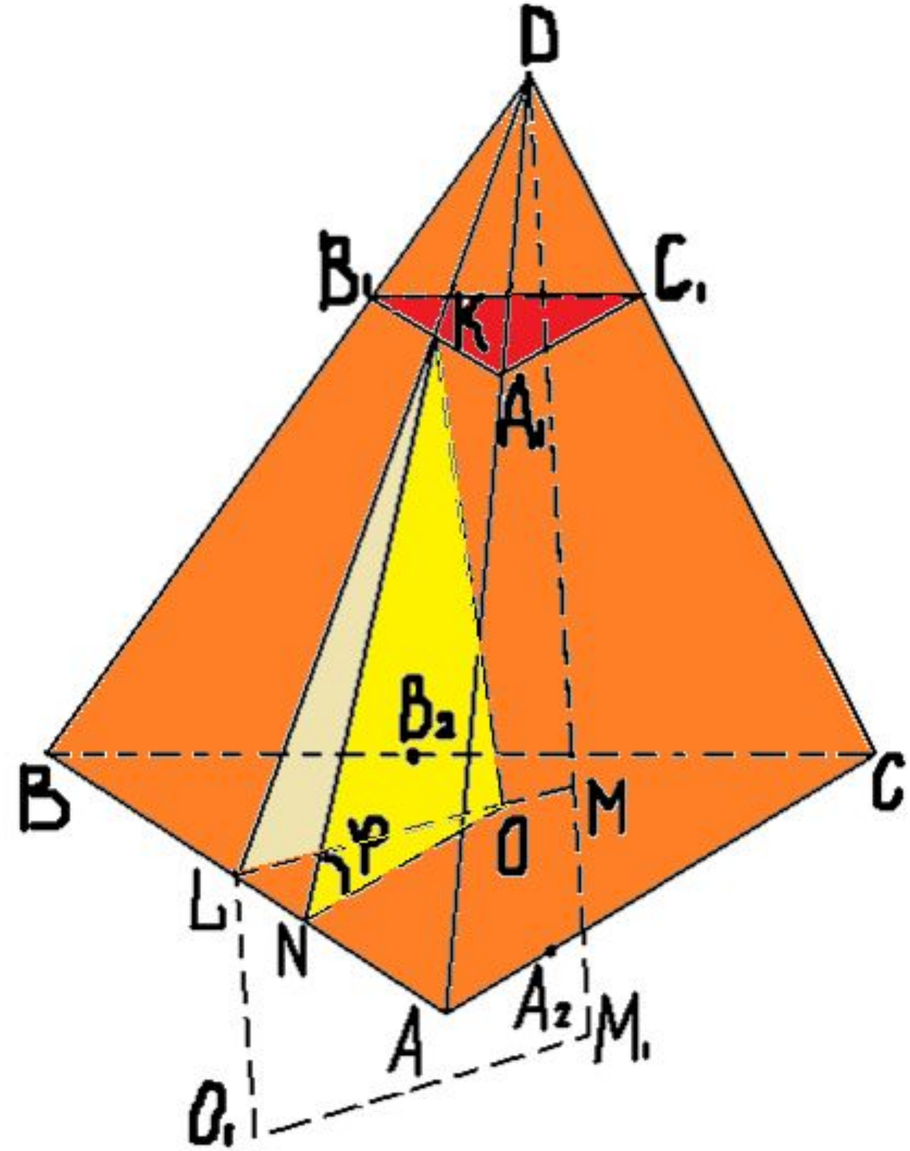
Ответ: $\frac{77}{36}$; $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; $arccos\frac{7}{11}$.

В правильной треугольной пирамиде *SABC* ребро основания
боковое ребро *M* - середина ребра *AC*. Найти: а) расстояние от точки *M* до плоскости *SBC*; наибольшее возможное значение угла между прямой *SM* и плоскостью *SBC*.



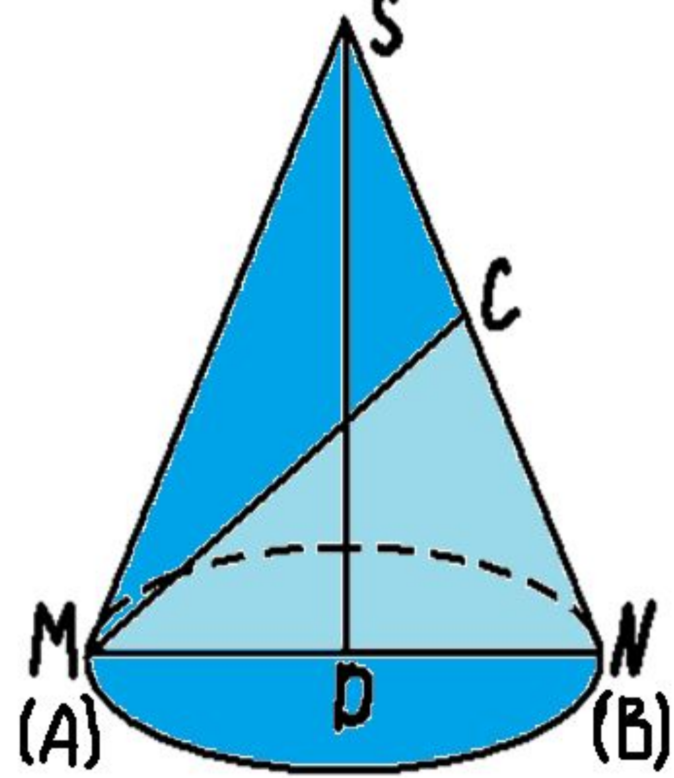
Ответ: $$p = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}; \ \varphi_{max} = arcsin\frac{3}{4}.$$

Даны пирамида *ABCD* и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань *ABC*. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра *DA*, *DB* и *DC*, а ее центр лежит на грани *ABD*. Радиус цилиндра равен *3* объем пирамиды *ABCD* равен , ребро . Найти двугранный угол между гранями *ABC* и *ABD* и радиус описанной около *ABCD* сферы.



Ответ: $\varphi = arctg\frac{\sqrt{2}}{4}$; $R = \sqrt{\frac{337}{2}}$.

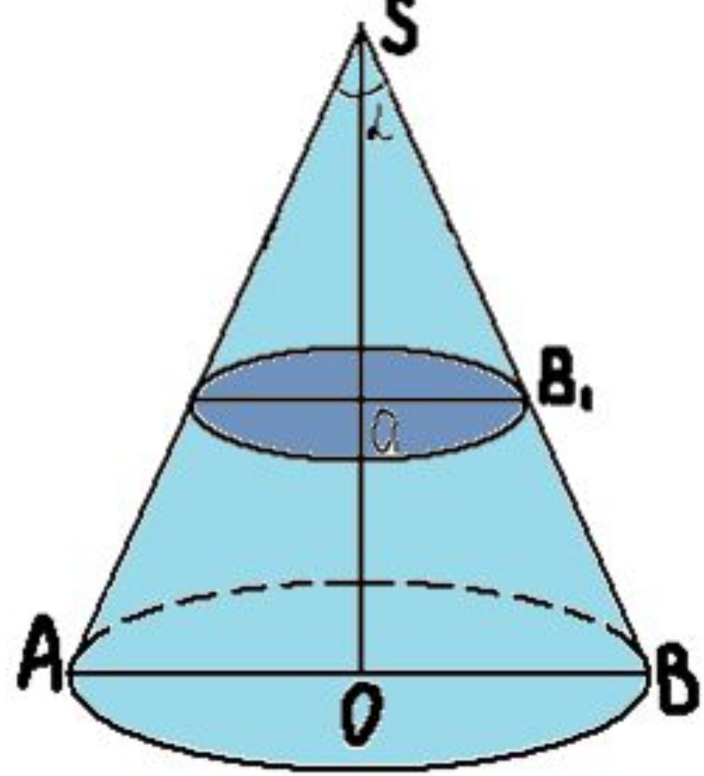
Через вершину S прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках A и B. Медианы AC и SB треугольника ASB имеют длину m_1 и m_2 соответственно. Определить величину угла при вершине S в осевом сечении конуса, если известно, что площадь ΔASB имеет наибольшее возможное значение.



Ответ: $\frac{1}{2} < \frac{m_1}{m_2} < \sqrt{\frac{5}{2}}, \alpha = 2arctg\frac{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{3m_2};$

$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

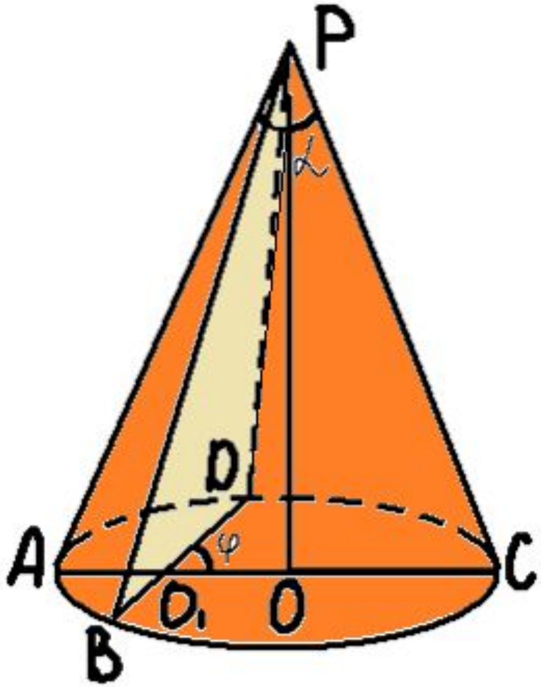
В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что, нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна , а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

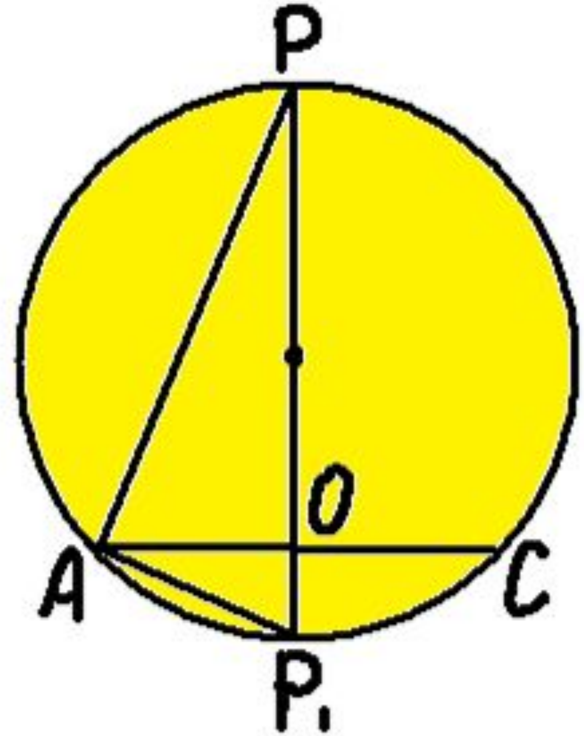


Ответ: при $0 < \alpha < 60° \Rightarrow 2arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{l^3 cos\frac{\alpha}{2}}{\left(2ctg\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\right)^3}\left(ctg\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\right)$

при $60° \leq \alpha < \pi \Rightarrow V \in \emptyset$

Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P, равен R. Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом , а окружность – в точках B и D. Определить объем пирамиды $PABCD$, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине P равен α, а треугольники APC и DPB равновелики.





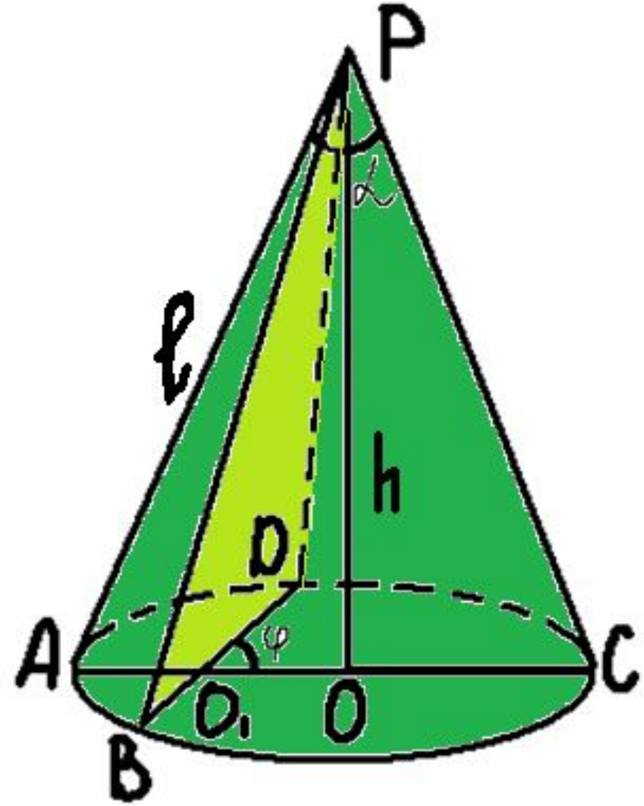
$$S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} l^2 sin\alpha = S_1, \quad S_{\Delta BPD} = \frac{1}{2} l^2 sin\gamma = S_2$$

а) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $S_1 = S_2$ $V_{PABCD} = \frac{1}{3} S_{осн} h$

$h = OP$ – высота конуса

Обозначим $AB = CD = \alpha$ и $AD = BC = b$

r – радиус основания, тогда

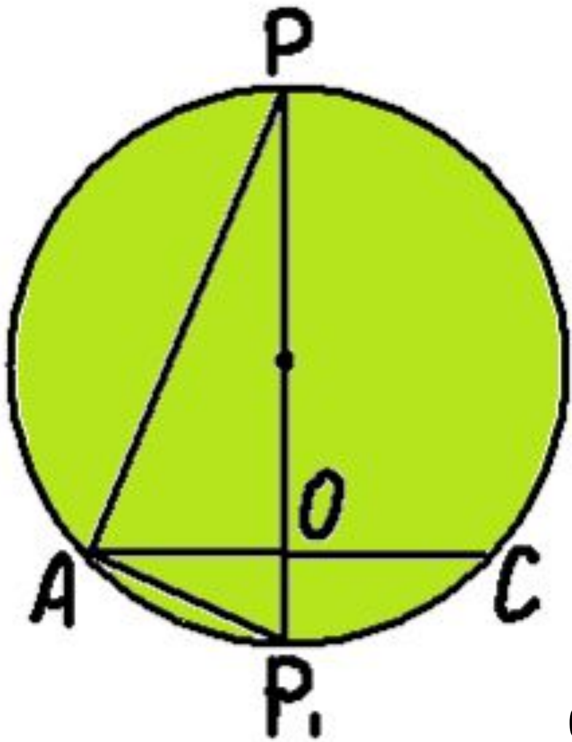


$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 cos\varphi,$$

$$b^2 = 2r^2 + 2r^2 cos\varphi,$$

$$S_{осн} = ab = \sqrt{4r^4 - 4r^4 cos^2\varphi} = 2r^2 sin\varphi.$$

^APP_1 =



$OP = h_1$, $OP_1 = h_2$, $OA = r$ – радиус основания конуса

^$APP_1 = \frac{\alpha}{2}$

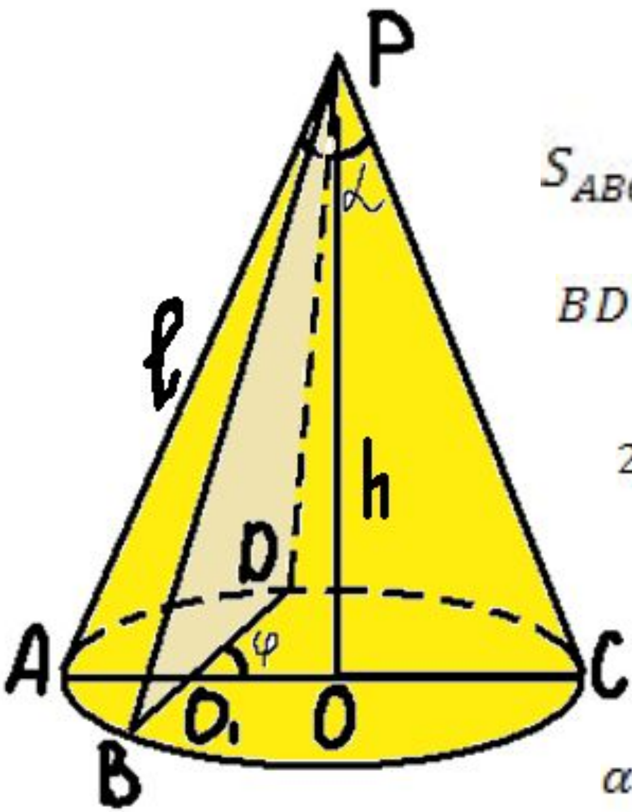
$$\frac{h_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{h_2}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}}; \quad h_1 + h_2 = 2R$$

$r = R\sin\alpha$ $\quad h_1 = R(1 + \cos\alpha)$

$$V = \frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\sin\varphi(1 + \cos\alpha)$$

б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad V = \frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\sin\varphi(1 + \cos\alpha)$

$\gamma = 180° - \alpha$ т.е. в этом случае $\quad h = h_1 = R(1 + \cos\alpha)$ $\quad r = R\sin\alpha$



$$S_{ABCD} = BD * AC * sin\varphi * \frac{1}{2} = Rsin\varphi * BDsin\alpha$$

$$BD^2 = 2l^2 + 2l^2cos\alpha \qquad (2r)^2 = 2l^2 - 2l^2cos\alpha$$

$$2l^2 = \frac{2r^2}{1 - cos\alpha} \qquad BD^2 = 2R(1 + cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3}R^3 sin\varphi sin\alpha(1 + cos\alpha)^2$$

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3}R^3 sin^2\alpha sin\varphi(1 + cos\alpha)$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3}R^3 sin^2\alpha sin\varphi(1 + cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3}R^3 sin\varphi sin\alpha(1 + cos\alpha)^2$$