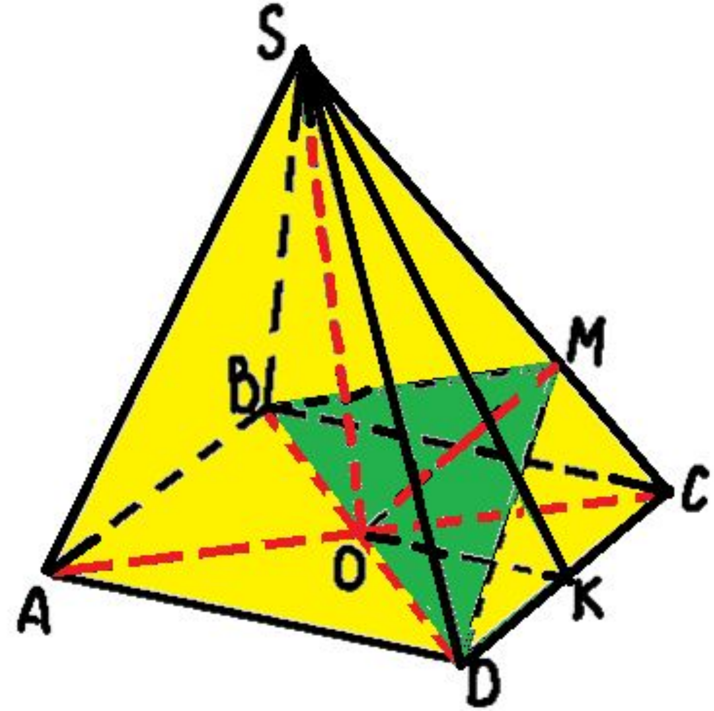
Разные задачи повышенного уровня сложности на многогранники, цилиндры, косинус и шар.

Выполнил:
ученик 10 «Б» класса
МБОУ лицей №3 г. Воронежа
Козловский Никита.

Руководитель:
Орлова О.В.
учитель высшей категории,
учитель математики
МОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов
№78 городского округа город Воронеж

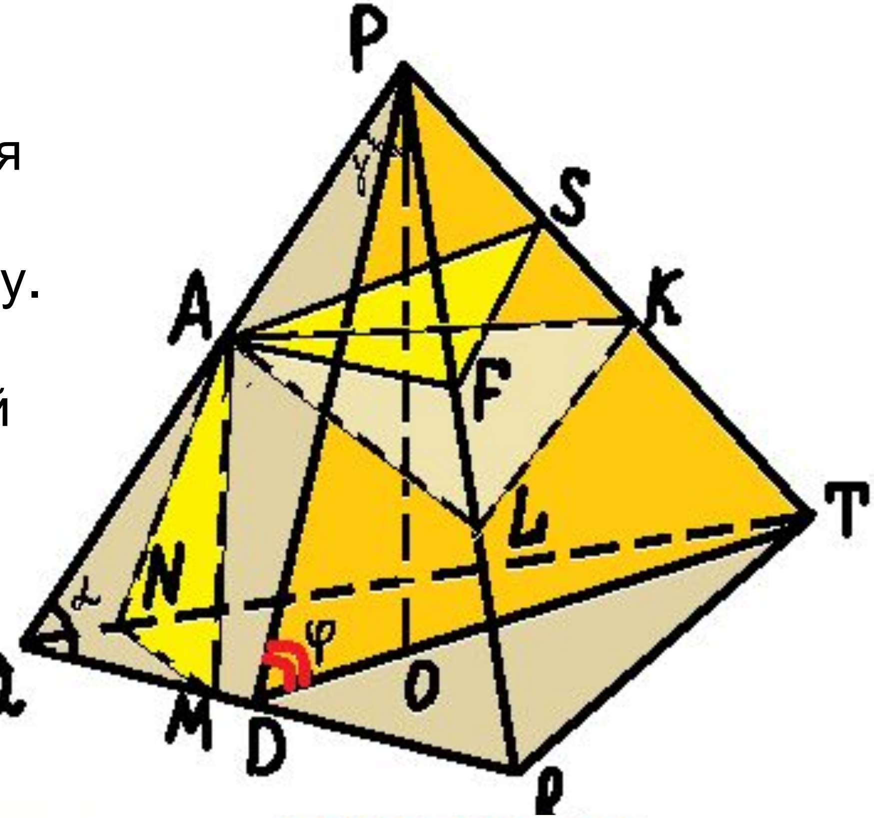
Величина двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равна α. Определить величину двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды. Для каких α задача имеет решение?



Ответ:

$$\beta = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Плоскость, проходящая через точку *A* бокового ребра *PQ* правильной треугольной пирамиды *PQRT* и параллельная ребру *TR*, пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найти площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани равна *k*, боковая грань *PTR* составляет с плоскостью основания угол *φ* и *AQ = 0,75AP*.



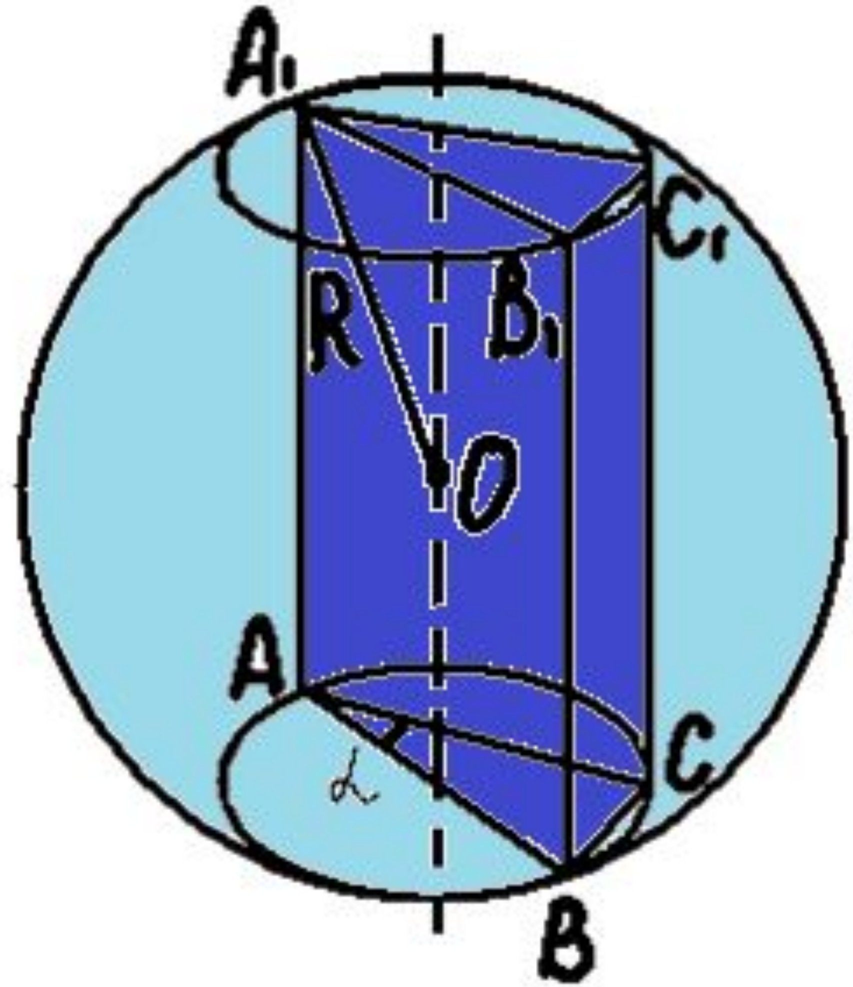
Ответ: 1) при $0 < \varphi \le \arccos\frac{1}{5}$

$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2\varphi \qquad S_2 = \frac{3\sqrt{3}k^2(1+3\cos^2\varphi)^2}{784\cos^2\varphi}$$

2)при $\arccos\frac{1}{5} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$

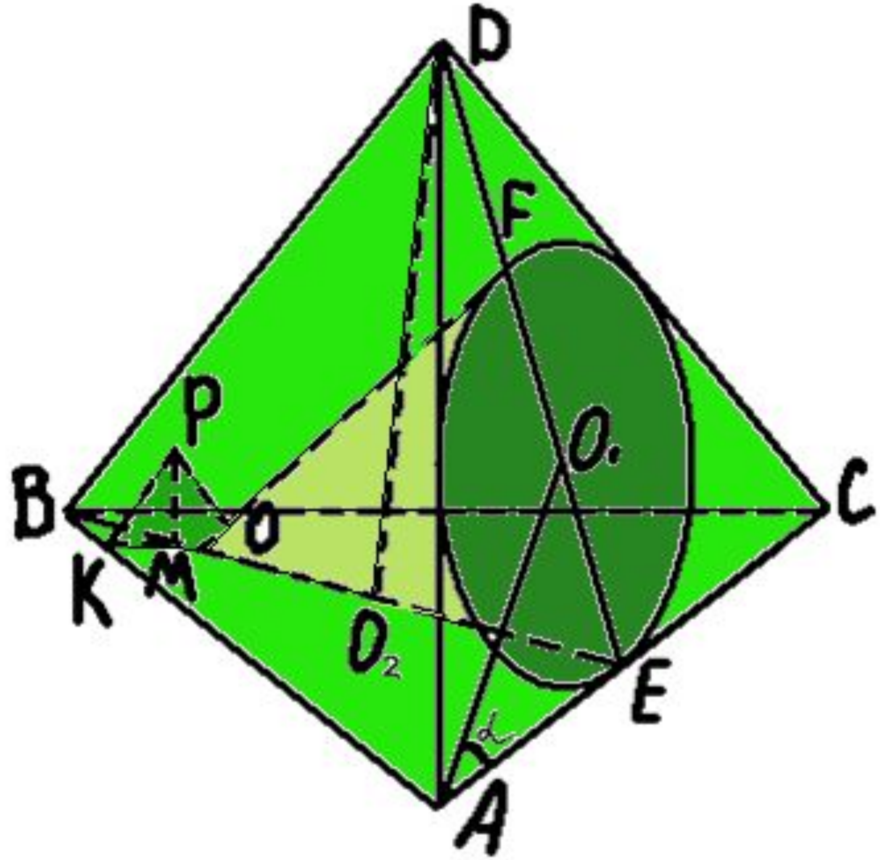
$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2\cos^2\varphi, S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2\cos^2\varphi \frac{(1+3\cos^2\varphi)^2}{(1-9\cos^2\varphi)^2} \le a$$

В сферу, радиус которой равен R, вписана прямая призма, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая ее боковая грань – квадрат. Определите объем призмы.



Ответ: $V = \frac{R^3\sqrt{2}}{2} sin2\alpha$

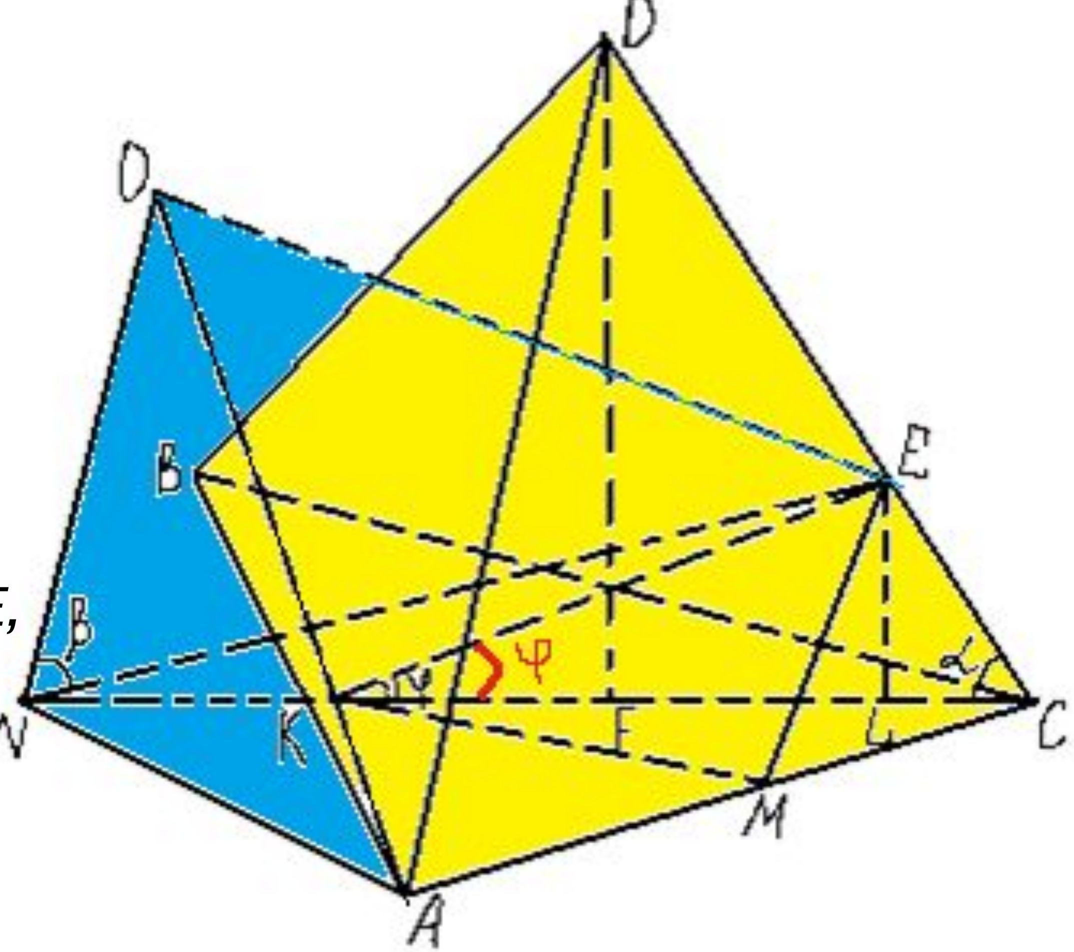
В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна а . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE:OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B.



Ответ:

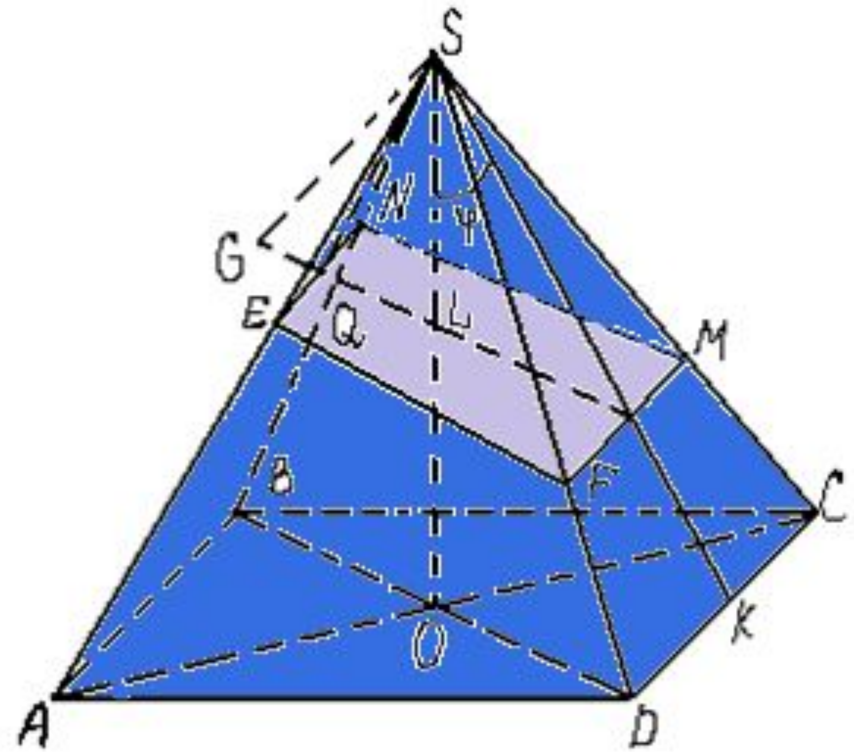
$$r = \frac{a}{4}, \qquad R = \frac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$$

Ребро правильного тетраэдра *ABCD* равно , точка *K* – середина ребра *AB*, точка *E* лежит на ребре *CD* и *EC:ED = 1:*2, точка *F* – центр грани *ABC*. Найти угол между прямыми *KC* и *KE*, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки *A, B, E, F.*



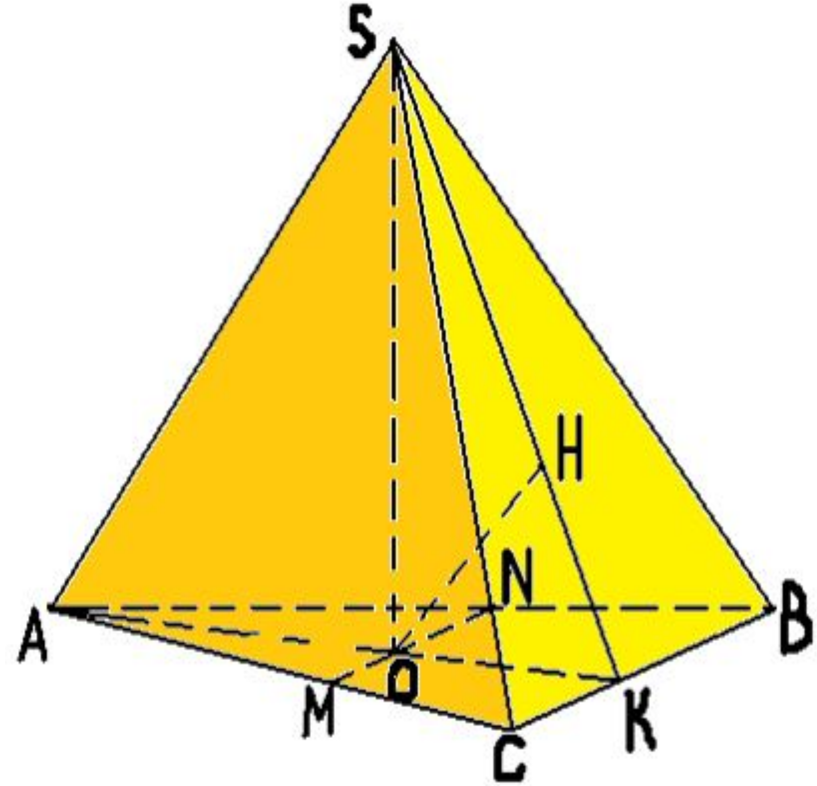
Ответ: $arccos\frac{7}{2\sqrt{19}};\ a\sqrt{\frac{2}{3}};\ a\sqrt{\frac{11}{6}}$

Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна . На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти
площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;
радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;
угол между плоскостью α и плоскостью ABC.



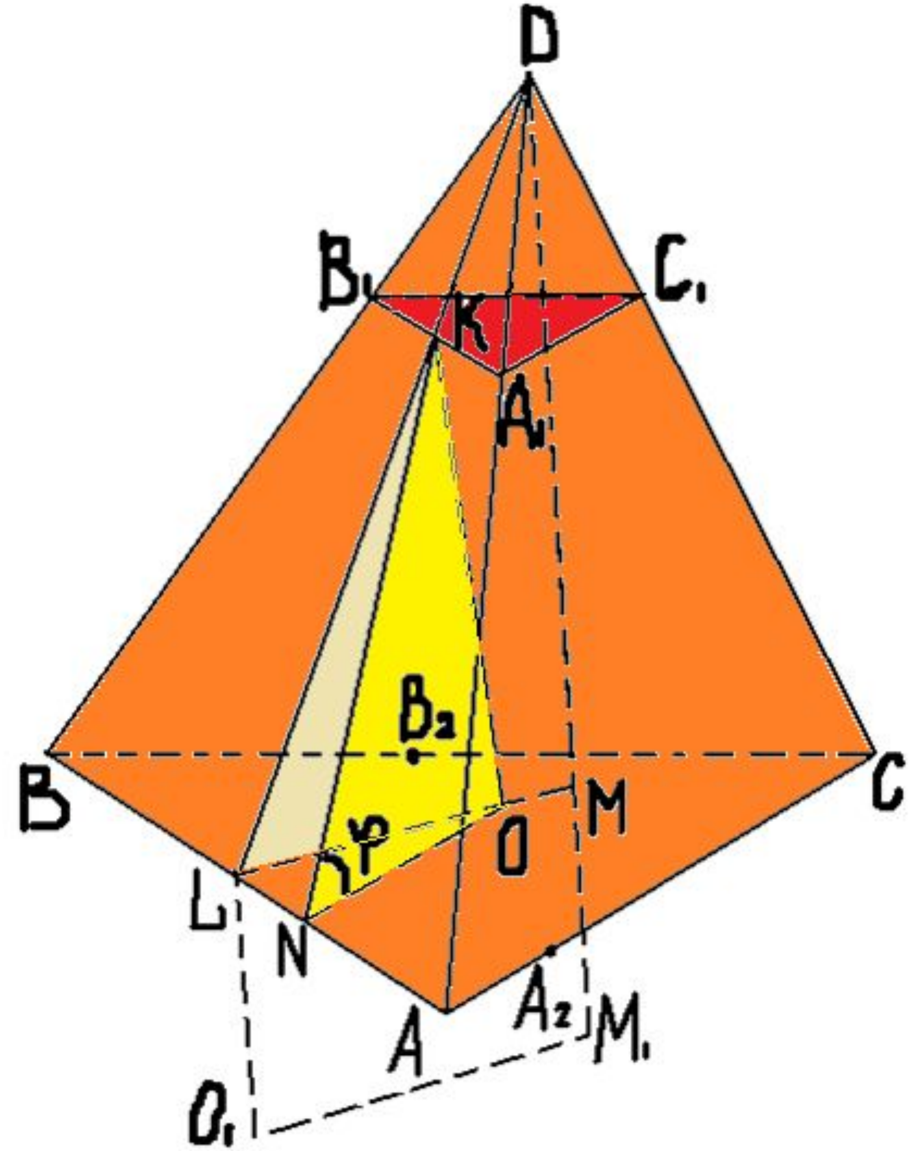
Ответ: $\frac{77}{36}$; $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; $arccos\frac{7}{11}$.

В правильной треугольной пирамиде *SABC* ребро основания
боковое ребро *M* - середина ребра *AC*. Найти: а) расстояние от точки *M* до плоскости *SBC*; наибольшее возможное значение угла между прямой *SM* и плоскостью *SBC*.



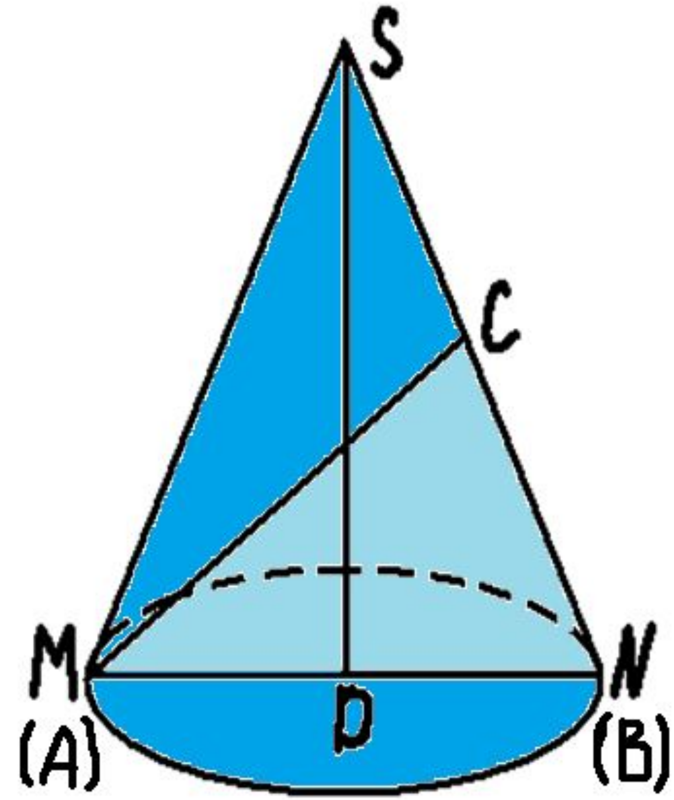
Ответ: $p = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$; $\varphi_{max} = arcsin\frac{3}{4}$.

Даны пирамида *ABCD* и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань *ABC*. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра *DA, DB* и *DC*, а ее центр лежит на грани *ABD*. Радиус цилиндра равен *3* объем пирамиды *ABCD* равен , ребро . Найти двугранный угол между гранями *ABC* и *ABD* и радиус описанной около *ABCD* сферы.



Ответ: $\varphi = arctg\frac{\sqrt{2}}{4};\ R = \sqrt{\frac{337}{2}}.$

Через вершину S прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках A и B. Медианы AC и SB треугольника ASB имеют длину m_1 и m_2 соответственно. Определить величину угла при вершине S в осевом сечении конуса, если известно, что площадь ΔASB имеет наибольшее возможное значение.

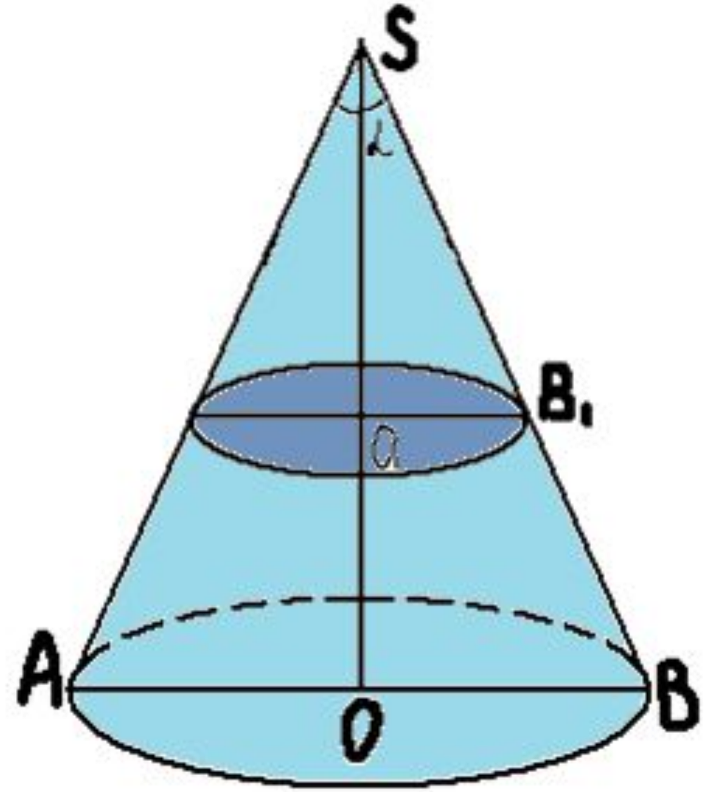


Ответ:

$$\frac{1}{2} < \frac{m_1}{m_2} < \sqrt{\frac{5}{2}}, \alpha = 2arctg\frac{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{3m_2};$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

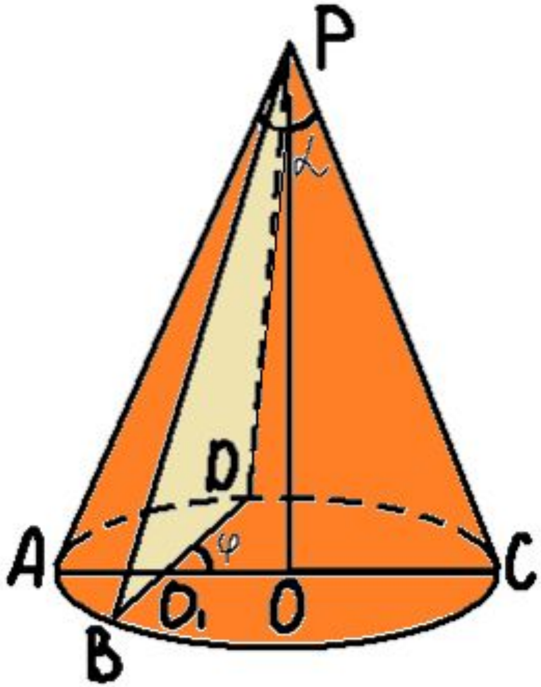
В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что, нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна , а угол при вершине осевого сечения конуса равен *α*.

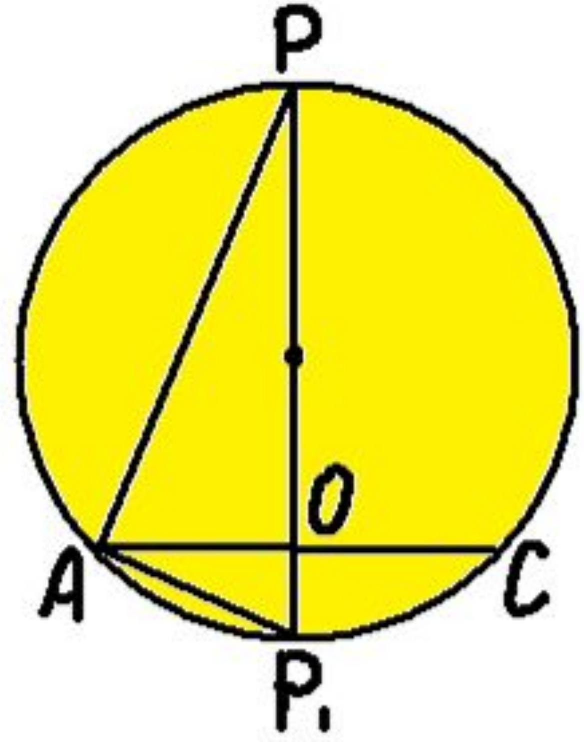


Ответ: при $0 < \alpha < 60^\circ \Rightarrow 2arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{l^3 cos\frac{\alpha}{2}}{\left(2ctg\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\right)^3}\left(ctg\frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\right)$

при $60^\circ \le \alpha < \pi \Rightarrow V \in \varnothing$

Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P, равен R. Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом , а окружность – в точках B и D. Определить объем пирамиды $PABCD$, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине P равен α, а треугольники APC и DPB равновелики.





$$S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} l^2 sin\alpha = S_1, \quad S_{\Delta BPD} = \frac{1}{2} l^2 sin\gamma = S_2$$

а) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $S_1 = S_2$ $V_{PABCD} = \frac{1}{3} S_{осн} h$

h = OP – высота конуса

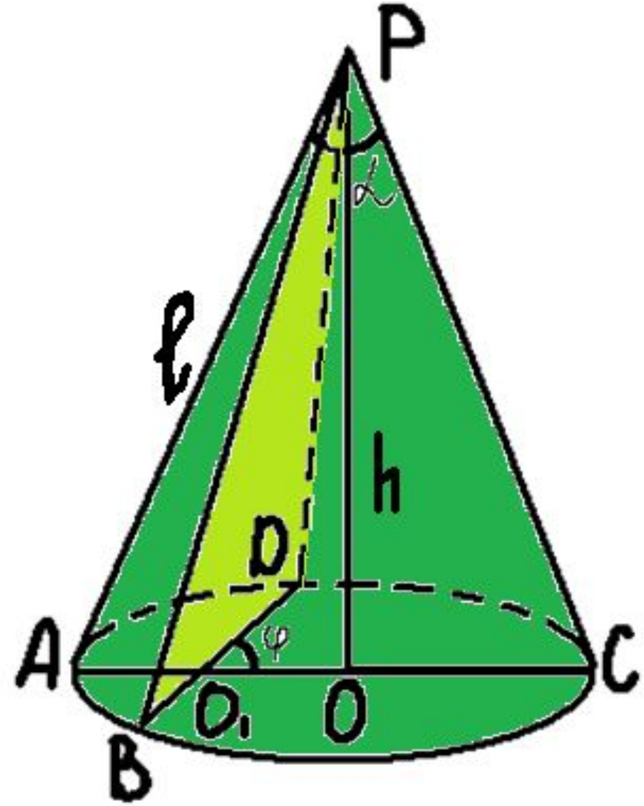
Обозначим *AB = CD = α* и *AD = BC = b*

r – радиус основания, тогда

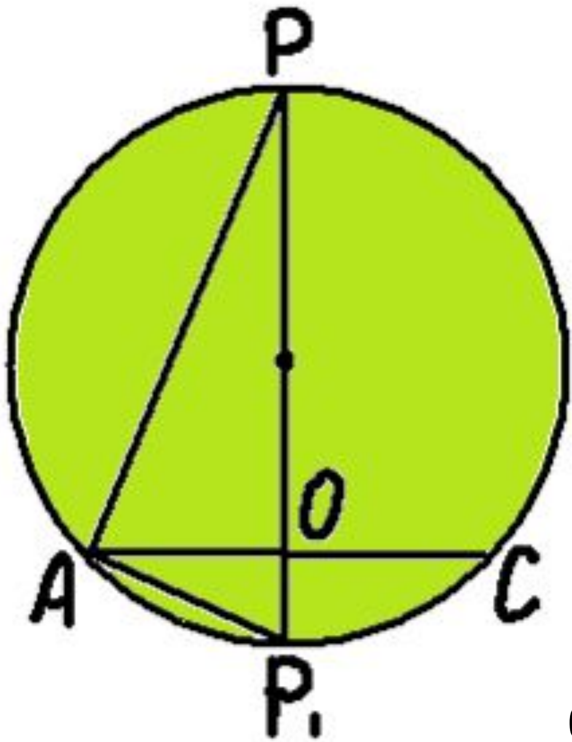
$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 cos\varphi,$$

$$b^2 = 2r^2 + 2r^2 cos\varphi,$$

$$S_{осн} = ab = \sqrt{4r^4 - 4r^4 cos^2\varphi} = 2r^2 sin\varphi.$$



$^\wedge APP_1$ =



$OP = h_1$, $OP_1 = h_2$, $OA = r$ – радиус основания конуса

$^\wedge APP_1 = \frac{\alpha}{2}$

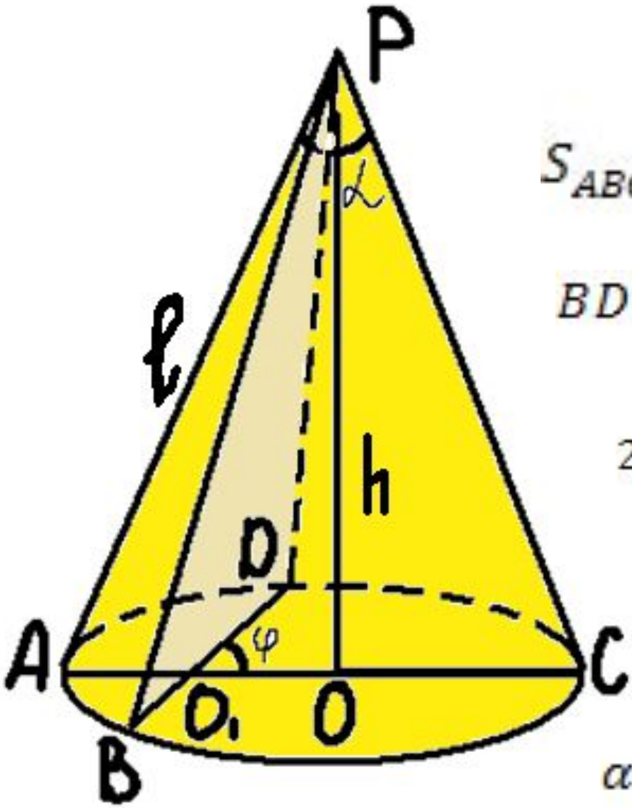
$$\frac{h_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{h_2}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}}; \quad h_1 + h_2 = 2R$$

$r = R\sin\alpha$ $\quad h_1 = R(1 + \cos\alpha)$

$$V = \frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\sin\varphi(1 + \cos\alpha)$$

б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad V = \frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\sin\varphi(1 + \cos\alpha)$

$\gamma = 180° - \alpha$ т.е. в этом случае $\quad h = h_1 = R(1 + \cos\alpha) \quad r = R\sin\alpha$



$$S_{ABCD} = BD * AC * sin\varphi * \frac{1}{2} = Rsin\varphi * BDsin\alpha$$

$$BD^2 = 2l^2 + 2l^2cos\alpha \qquad (2r)^2 = 2l^2 - 2l^2cos\alpha$$

$$2l^2 = \frac{2r^2}{1 - cos\alpha} \qquad BD^2 = 2R(1 + cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3}R^3 sin\varphi sin\alpha(1 + cos\alpha)^2$$

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3}R^3 sin^2\alpha sin\varphi(1 + cos\alpha)$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3}R^3 sin^2\alpha sin\varphi(1 + cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3}R^3 sin\varphi sin\alpha(1 + cos\alpha)^2$$