

Не нужно нам владеть клинком,  
Не ищем славы громкой.  
Тот побеждает, кто знаком  
С искусством мыслить, тонким.

*Английский поэт Уордсворт*

# КОМБИНАТОРИКА - ПЕРВЫЙ ШАГ В БОЛЬШУЮ НАУКУ.



*Автор: Захаров Дмитрий*

# Содержание

- Введение
- Цель работы
- Задачи работы
- Что же такое «Комбинаторика»?
- История возникновения
- Правила решения Правила решения комбинаторных задач
  - Правило суммы
  - Правило произведения
  - Комбинации
    - С повторениями
    - Без повторений
- Тезаурус
- Список используемой литературы и Список используемой литературы и web-Список используемой литературы и web-ресурсов
- Заключение
- Страница автора

# Цель работы

1. Создать справочное пособие для учащихся 10-11 классов, обучающихся на базовом уровне, образовательных учреждений.
2. Подготовить первую часть большого проекта «Теория вероятности как самое встречаемое в нашей жизни явление».



# Задачи работы

- 1.1 Подобрать литературу и web – ресурсы по теме «Комбинаторика».
- 1.2 Исследовать все возможные методы решения комбинаторных задач на основе реальной жизни.
- 1.3 Проследить историю выделения самостоятельной области математики – комбинаторики.
- 2.1 Обосновать изучение курса комбинаторики в старшей школе как реальную необходимость при осуществлении курса принципа непрерывности образования «Школа – вуз».
- 2.2 Наметить возможные варианты введения курса комбинаторики в школьное образовательное пространство.
- 2.3 Подобрать материал для создания справочника.



# Введение

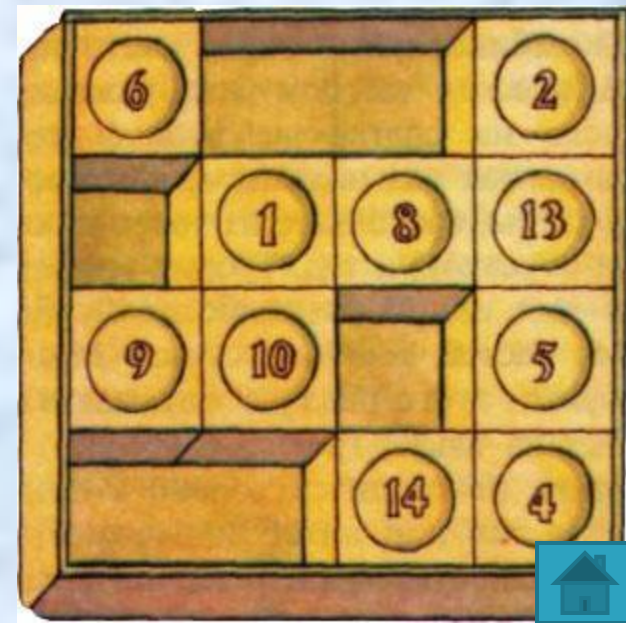
- Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. Такие задачи приходится рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической системы управления, значит и в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.



# Что же такое «Комбинаторика»?



- Комбинаторика – это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составленной по заданным правилам.



# История возникновения



- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.
- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.
- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».



# Правила решения комбинаторных задач

Правило суммы

Правило произведения

Комбинации  
и

4	9	2
8	1	6
3	5	7





# Правило суммы

**Задача:** На столе лежат 3 черных и 5 красных карандашей. Сколькими способами можно выбрать карандаш любого цвета?

**Решение:** Выбрать карандаш любого цвета можно  $5+3=8$  способами.

**Правило суммы в комбинаторике:**

*Если элемент  $a$  можно выбрать  $t$  способами, а элемент  $b$  -  $n$  способами, причем любой выбор элемента  $a$  отличен от любого выбора элементов  $b$ , то выбор « $a$  или  $b$ » можно сделать  $t+n$  способами.*



# Примеры решение задач на сложение

**Задача:** В классе 10 учащихся занимаются спортом, остальные 6 учащихся посещают танцевальный кружок.  
1) Сколько пар учащихся можно выбрать так, чтобы один из пары был спортсменом, другой танцором? 2) Сколько возможностей выбора одного ученика?

**Решение:**

- 1) Возможность выбора спортсменов 10, а на каждого из 10 спортсменов выборов танцора 6. Значит, возможность выбора пар танцора и спортсмена  $10 \cdot 6 = 60$ .
- 2) Возможность выбора одного ученика  $10 + 6 = 16$ .



# Правило произведения

**Задача :** Из города А в город В ведут 3 дороги. А из города В в город С ведут 4 дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

**Решение:** Можно рассуждать таким образом: для каждой из трех путей из А в В имеется четыре способа выбора дороги из В в С. Всего различных путей из А в С равно произведению  $3 \cdot 4$ , т.е. 12.

**Правило произведения:**

*Пусть нужно выбрать  $k$  элементов. Если первый элемент можно выбрать  $n_1$  способами, второй –  $n_2$  способами и т. д., то число способов  $k$  элементов, равно произведению  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .*



# Примеры решения задач на произведение

**Задача:** В школьной столовой имеются 2 первых, 5 вторых и 4 третьих блюд. Сколькими способами ученик может выбрать обед, состоящий из первых, вторых и третьих блюд?

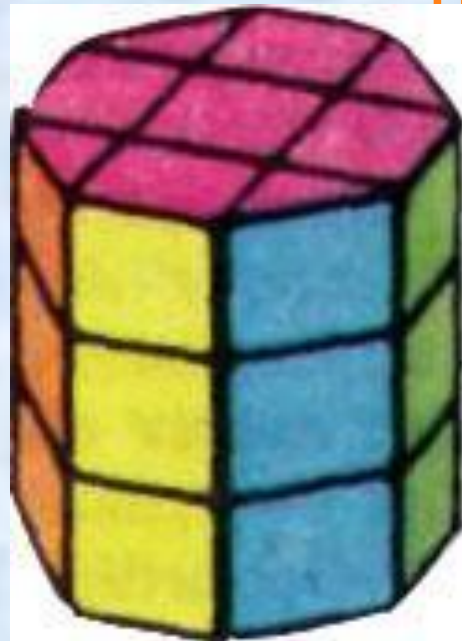
**Решение:** Первое блюдо можно выбрать 2 способами. Для каждого выбора первого блюда существует 5 вторых блюд. Первые два блюда можно выбрать  $2 \cdot 5 = 10$  способами. И, наконец, для каждой 10 этих выборов имеются четыре возможности выбора третьего блюда, т. е. Существует  $2 \cdot 5 \cdot 4$  способов составления обеда из трех блюд. Итак, обед может быть составлен 40 способами.



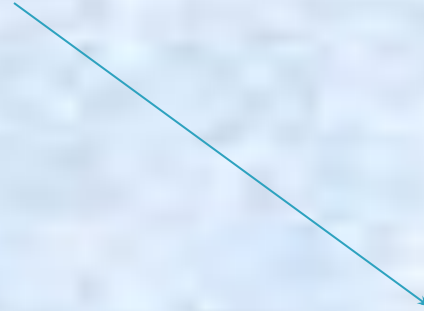
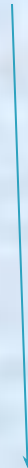
# Комбинации

Без повторений

С повторениями



# Выборки без повторений



Перестановк

Размещени

Сочетани

и

я

я



# Размещения без повторений

- ▣ *Размещением из  $n$  элементов по  $k$  ( $k \leq n$ ) называется любое множество, состоящее из любых  $k$  элементов, взятых в определенном порядке из данных  $n$  элементов.*
- ▣ Количество всех размещений из  $n$  элементов по  $m$  обозначают:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

$n!$  – факториал числа  $n$

[Примеры](#)  
[задач](#)



# Примеры задач

**Задача:** Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

**Решение:** Два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами считаются, разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.





# Перестановки без повторения

- ▣ *Перестановкой из  $n$  элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.*
- Количество всех перестановок из  $n$  элементов обозначают  $P_n$

$$P_n = n!$$

[Примеры](#)  
[задач](#)



# Примеры задач

Квартет  
Проказница Мартышка  
Осёл,  
Козёл,  
Да косолапый Мишка  
Затеяли играть квартет

...

Стой, братцы стой! –  
Кричит Мартышка, - погодите!  
Как музыке идти?  
Ведь вы не так сидите...

*И так, и так пересаживались – опять музыка на лад не идет.*

Вот пуще прежнего пошли у них разборы  
И споры,  
Кому и как сидеть...

Решение



# Решение

- Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько?
- Здесь идет перестановка из четырех, значит, возможно  $P_4 = 4! = 24$  варианта перестановок.



# Сочетания без повторений

**Сочетанием без повторений называется такое размещение, при котором порядок следования элементов не имеет значения.**

Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  обозначается:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

[Примеры](#)  
[задач](#)



# Примеры задач

**Задача:** Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (*все три кнопки нажимаются одновременно*), если на нем всего 10 цифр.

**Решение:** Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120 (\text{вариантов})$$



# Выборки с повторениями

Часто в задачах по комбинаторике встречаются множества, в которых какие-либо компоненты повторяются. Например: в задачах на числа – цифры. Для таких задач используются формулы:

$$A_n^m = n^m$$

[Примеры задач](#)

$$C_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^n$$

[Примеры задач](#)

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

где  $n$ -количество всех элементов,  $n_1, n_2, \dots, n_r$ -количество одинаковых элементов.

[Примеры задач](#)



# Примеры задач

**Задача:** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

**Решение:** Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно:

$$A_5^3 = 5^3 = 125$$



# Примеры задач

**Задача:** В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

**Решение:** Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь -

$$C_4^7 = \frac{(7 + 4 - 1)!}{7!(4 - 1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$





# Примеры задач

**Задача:** Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

**Решение:** всего букв 6. Из них одинаковы  $n_1$  «а»=3,  $n_2$  «н»=2,  $n_3$  «с»=1. Следовательно, число различных перестановок равно

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$$



# Список используемой литературы и web-ресурсов

- Гитман М.Б., Цылова Е.Г. Введение в комбинаторику и теорию вероятностей. Учеб. пособие.: Пермь, 1999
- Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
- История математики с древнейших времён до начала XIX столетия / Под ред. А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича. М: Наука, 1970-1972. Т.1-3.
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.
- Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. М.: Мнемозина, 2005
- <http://portfolio.1september.ru>
- <http://ru.wikipedia.org>



# Заключение

- Мы считаем, что работа достигла своих целей.
- Мы составили справочное учебное пособие, которое нацелено оживить школьную математику введением в неё интересных задач, посильных для учащихся теоретических вопросов.
- Работа предназначена для учащихся 10-11 классов, обучающихся на базовом уровне, образовательных учреждений для углубления знаний по математике
- Отличительной способностью данного пособия являются:
  - посильная для учащихся III ступени теоретическая часть;
  - подбор и составление задач на основе жизненного материала, сказочных сюжетов.
- Мы надеемся, что наша работа заинтересует учащихся, поможет развитию их кругозора и мышления, будет способствовать более качественной подготовке к сдаче единого государственного экзамена.



# Страница автора

- Ученик: Захаров Дмитрий
- Класс: 10
- Руководитель: Торопова Нина Анатольевна
- МОУ «Средняя образовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов №5» г. Красноярск

