



# ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция  $f(x)$   
непрерывна на отрезке  $[a, b]$   
то определенный интеграл  
от этой функции  
в пределах от  $a$  до  $b$   
существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

# Задача численного интегрирования

Найти определенный интеграл  
на отрезке  $[a, b]$   
если подынтегральная функция  
на отрезке задана таблично.

Формулы  
приближенного интегрирования  
называются  
**квадратурными формулами.**

# Метод прямоугольников

основан на непосредственном определении интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

где  $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$  - интегральная сумма, соответствующая некоторому разбиению отрезка  $[a, b]$  и некоторому выбору точек

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$$

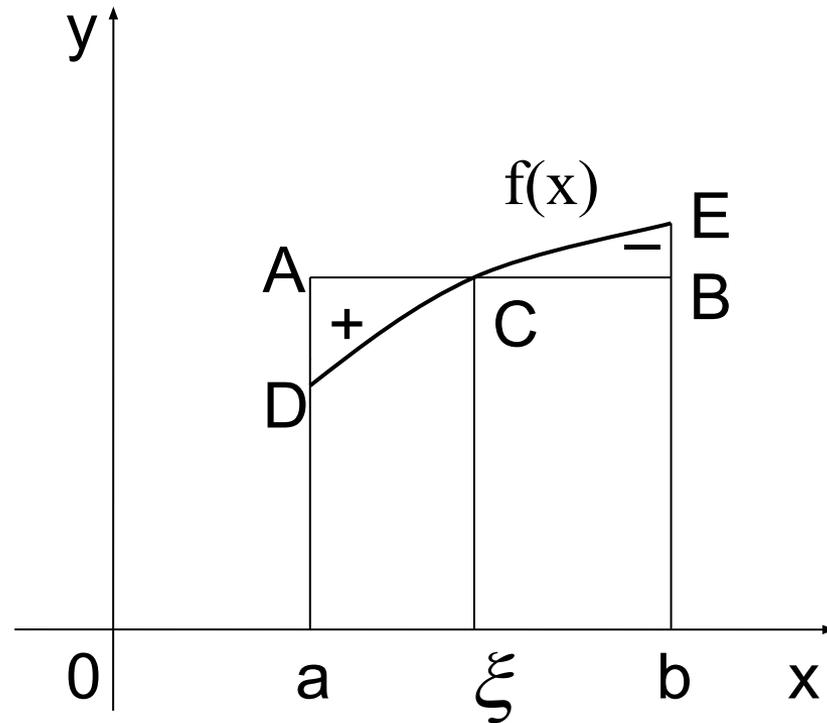
на отрезках разбиения

## Вычисление определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

геометрически сводится  
к вычислению площади  
криволинейной трапеции,  
ограниченной функцией  $f(x)$ ,  
осью абсцисс и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

Учитывая,  
что высота  
Прямоугольника  
ABba есть  
значение  
функции  
в точке  $\xi$



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\xi)$$

Для увеличения точности  
численного интегрирования  
можно отрезок  $[a, b]$   
разбить на несколько частей  
и для каждой из них вычислить  
приближенное значение  
площади криволинейной  
трапеции, основанием которой  
является отрезок

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1),$$

а высотой число

$f(\xi_i)$  т.е. значение функции  
 $\xi_i$  в [точке]

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

Практически удобно делить  
отрезок  $[a, b]$

на равные части, а точки

$\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) совмещать с левыми

$$[f(\xi_i) = f(x_i)]$$

или с правыми  $[f(\xi_i) = f(x_{i+1})]$

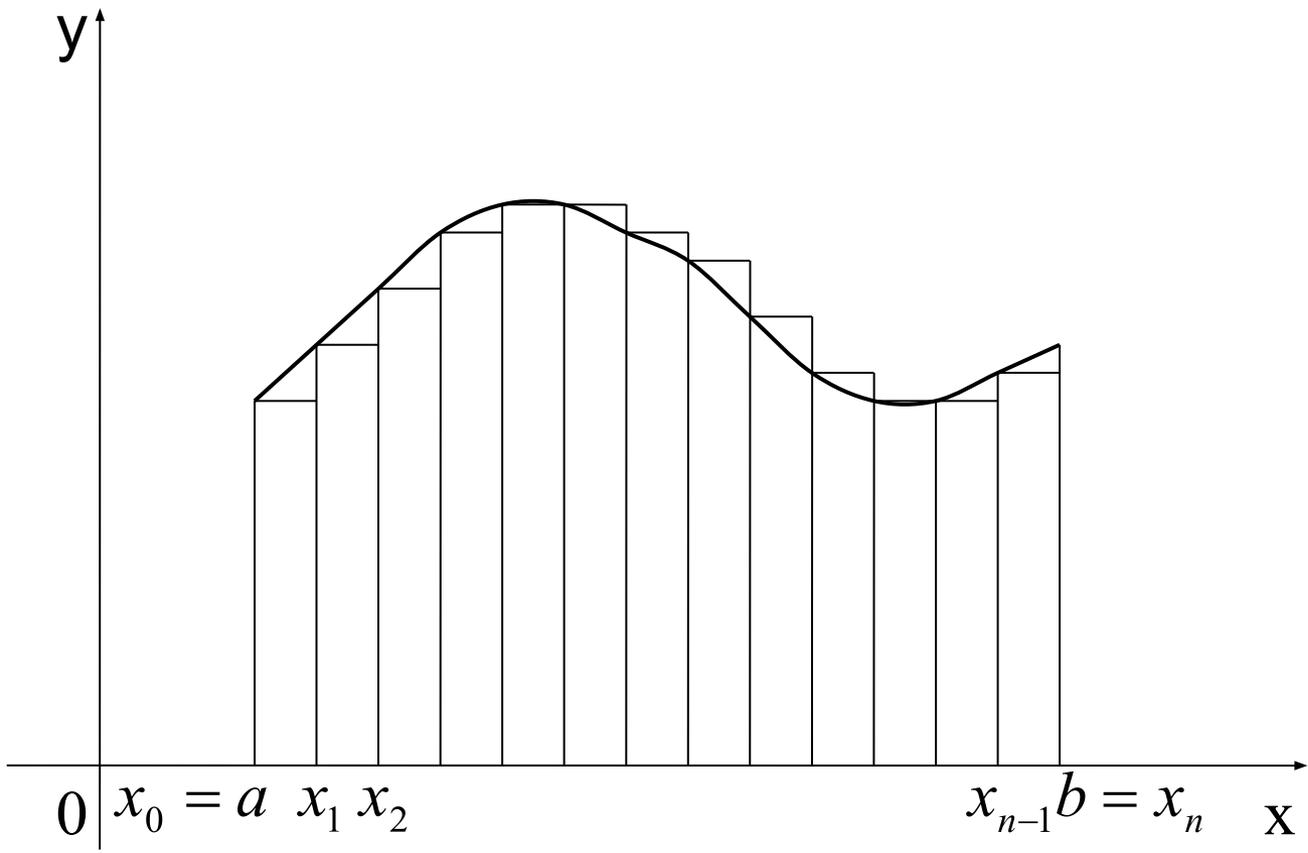
концами отрезков разбиения.

Если точку  $\xi_i$   
совместить с левым концом  
отрезка  $\Delta x_i$

то приближенное значение  
интеграла может быть  
представлено  
**формулой левых**  
**прямоугольников:**

$$I_{\text{л}} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

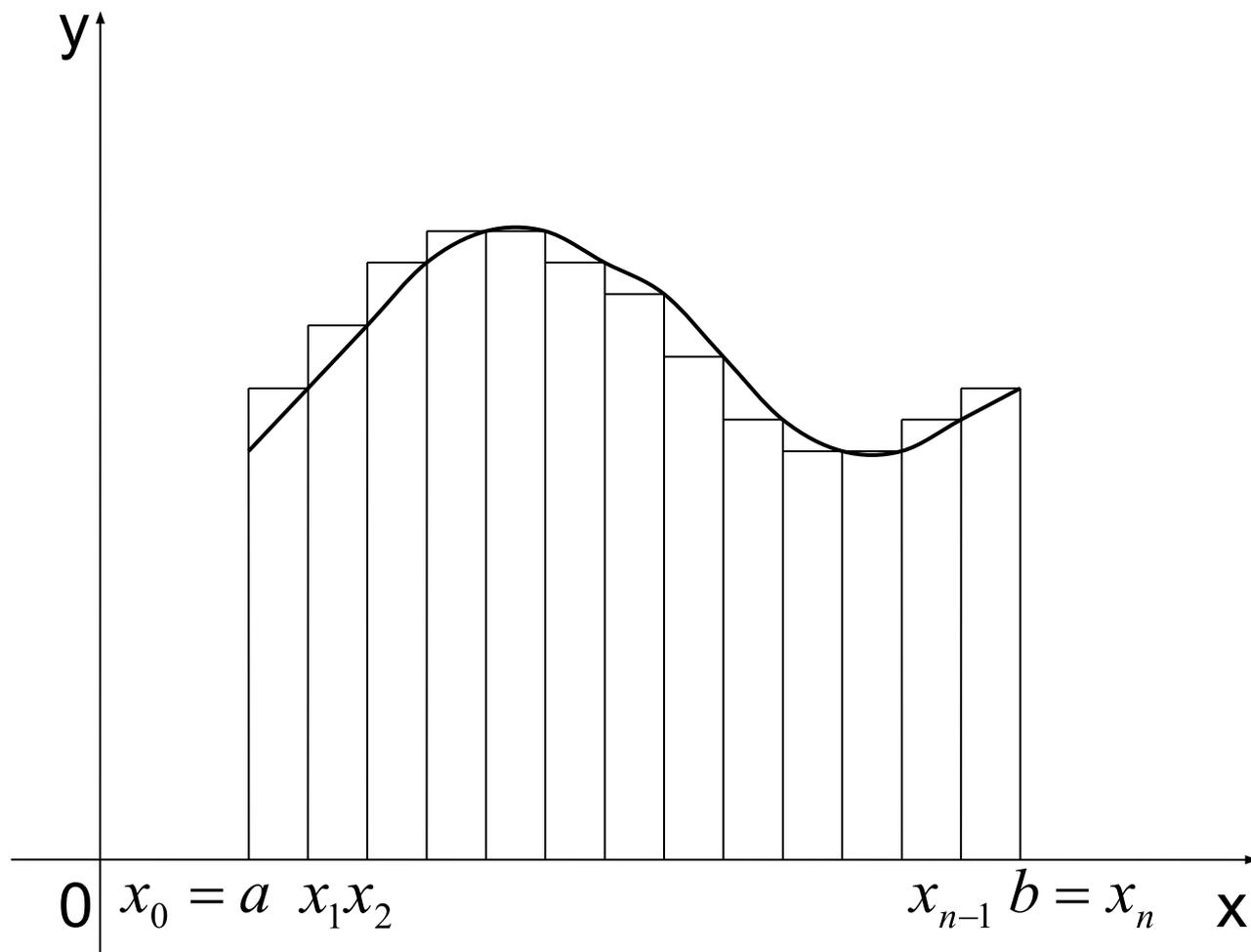
где  $h = \frac{b-a}{n}$  — шаг.



Если же в качестве точки  $\xi_i$   
выбрать правый конец отрезка  $\Delta x_i$

то приближенное значение  
интеграла вычисляется  
по **формуле правых  
прямоугольников**:

$$I_{\Pi} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h \sum_{i=1}^n y_i$$



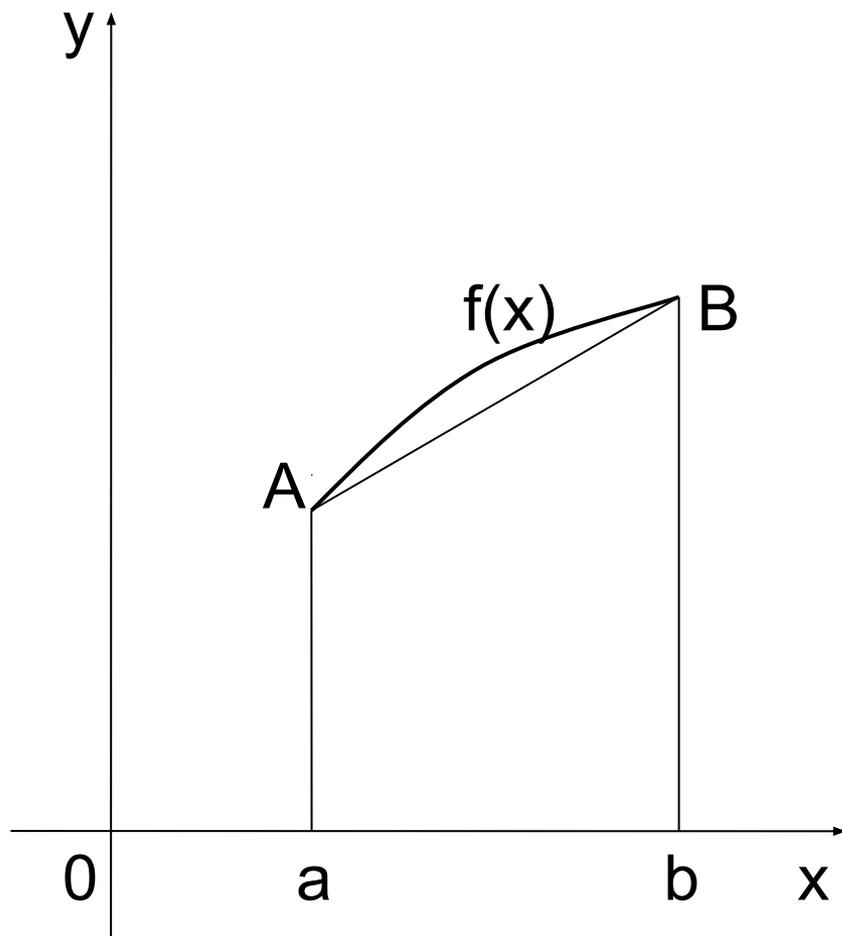
# Метод трапеций

Заменяем на отрезке  $[a, b]$

дугу АВ графика  
подынтегральной функции  $y = f(x)$   
стягивающей ее хордой и  
вычислим площадь трапеции АВba.  
Примем значение определенного  
интеграла численно равным  
площади этой трапеции:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Это <sup>a</sup> и есть **формула трапеций**

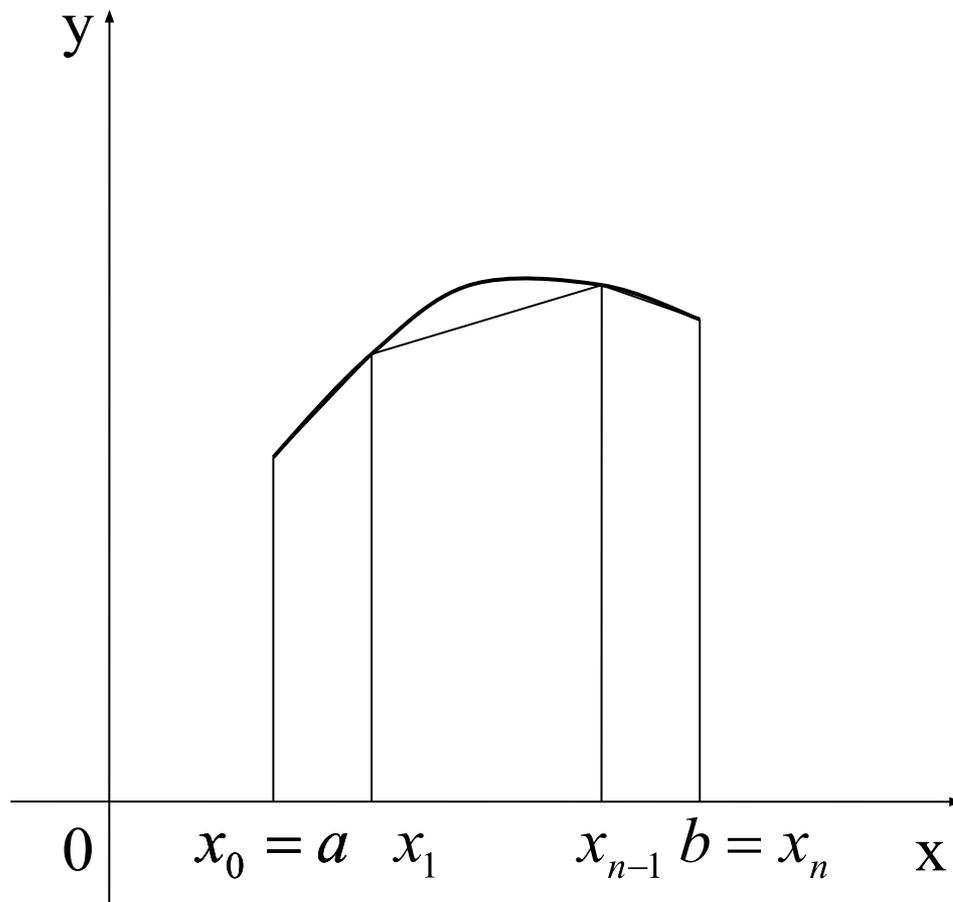


Если отрезок  $[a, b]$

разделить на несколько  
частей и применить  
формулу трапеции  
к каждому отрезку  $\Delta x_i$

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i$$



Для простоты вычислений  
удобно разделить отрезок  $[a, b]$

на равные части,  
в этом случае длина  
каждого из отрезков  
разбиения есть

$$\Delta x_i = \frac{b - a}{n}$$

Численное значение  
интеграла на отрезке  $\Delta x_i$

равно

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

А на всем отрезке  $[a, b]$

соответственно

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Эта формула называется

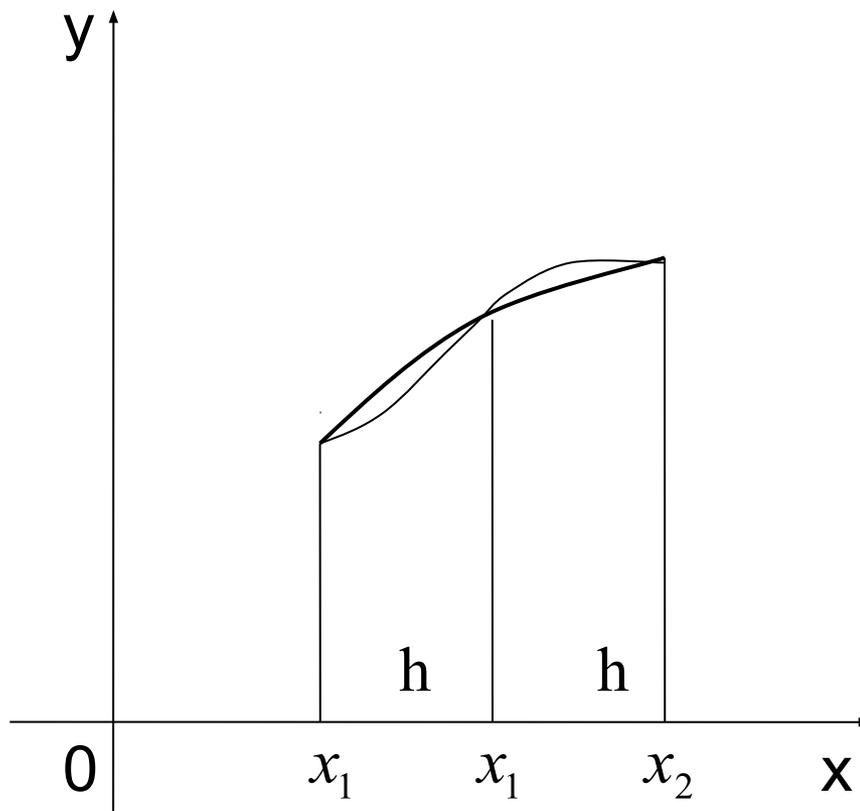
**общей формулой**  
**трапеции.**

Ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$  — шаг.

# Метод парабол (метод Симпсона)



функцию  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$

заменяем квадратичной функцией,  
принимающей в узлах

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2 = b$$

значения

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1) \quad \text{и} \quad y_2 = f(x_2)$$

В качестве интерполяционного  
многочлена воспользуемся  
многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1)$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{4h^3}{2} =$$
$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3} \Delta^2 y_0 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Это соотношение  
называется **формулой**  
**Симпсона.**

Для увеличения точности  
вычислений отрезок  $[a, b]$

разбивают на  $n$  пар участков

$$[x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}]$$

и заменяя подынтегральную  
функцию интерполяционным  
многочленом Ньютона  
второй степени, получают  
приближенное значение  
интеграла на каждом участке  
длины  $2h$ :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Тогда численное значение  
определенного интеграла  
на отрезке  $[a, b]$

будет равно сумме интегралов

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$$

Это соотношение называется

*общей формулой Симпсона.*

Ее можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$$

где  $h = \frac{b-a}{2n}$