




МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 1. Основные понятия



Под оптимизацией понимают
процесс выбора наилучшего варианта
из всех возможных

В процессе решения задачи оптимизации
обычно необходимо найти оптимальные значения
некоторых параметров, определяющих данную задачу.
При решении инженерных задач их принято называть
проектными параметрами,
а в экономических задачах их обычно называют
параметрами плана.


Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины (функции), определяемой проектными параметрами. Эта величина называется целевой функцией (или критерием качества).

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум (или максимум).

Задачи оптимизации.

- Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума действительной функции от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов
- Условные задачи оптимизации, или задачи с ограничениями, — это такие, при формулировке которых задаются некоторые условия (ограничения) на множестве.



Теория и методы решения задач оптимизации
при наличии ограничений
составляют предмет исследования
одного из важных разделов прикладной математики —
математического программирования.

§ 2. Одномерная оптимизация

Одномерная задача оптимизации в общем случае

формулируется следующим образом:

Найти наименьшее (или наибольшее)

значение целевой функции $y = f(x)$,

заданной на множестве σ

и определить значение проектного параметра

$$x \in \sigma$$

при котором целевая функция принимает экстремальное значение.

Существование решения поставленной задачи

вытекает из следующей теоремы:

Теорема Вейерштрасса.

Всякая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ принимает на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения, т. е. на отрезке $[a, b]$ существуют такие точки

x_1 и x_2

что для $x \in [a, b]$

любого x имеют место

неравенства

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

.

Методы поиска.

Численные методы поиска экстремальных значений функции рассмотрим на примере нахождения минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

Будем предполагать, что целевая функция униmodalна, т. е. на данном отрезке она имеет только один минимум.

Погрешность приближенного решения задачи
определяется

разностью между оптимальным значением x
проектного параметра и приближением к нему x_*

Потребуем, чтобы эта погрешность была
по модулю меньше заданного допустимого значения

$$|x - x_*| < \varepsilon$$

Процесс решения задачи методом поиска состоит в последовательном сужении интервала изменения проектного параметра, называемого интервалом неопределенности

В начале процесса оптимизации его длина равна

$$b - a,$$

т. е. оптимальное значение проектного параметра должно находиться в интервале

неопределенности —

отрезке $[x_n, x_{n+1}]$

причем $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$

Тогда для выполнения условия

$|x - x_*| < \varepsilon$
в качестве приближения к оптимальному
значению

можно принять любое
 $x_* \in [x_n, x_{n+1}]$

Например,

$$x_* = x_n \quad \text{или} \quad x_* = x_{n+1}, \quad \text{или} \quad x_* = (x_n + x_{n+1}) / 2$$

В последнем случае достаточно выполнения
неравенства

$$x_{n+1} - x_n < 2\varepsilon$$

Метод золотого сечения.

Метод состоит в построении последовательности отрезков

$[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., стягивающихся к точке минимума функции $f(x)$.

На каждом шаге, за исключением первого, вычисление значения функции $f(x)$ проводится лишь в одной точке.

Эта точка, называемая золотым сечением, выбирается специальным образом.

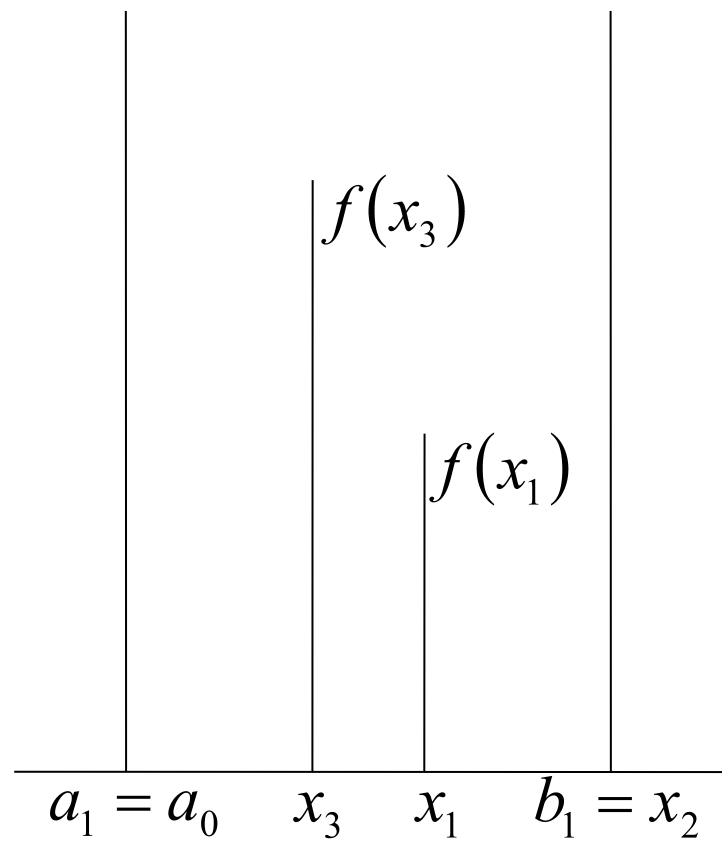
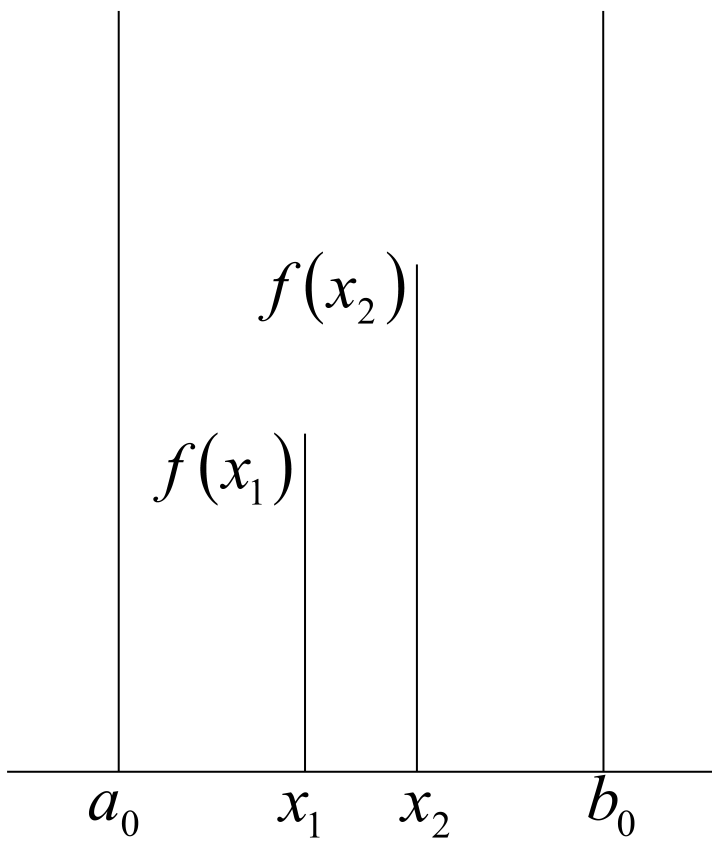
1 шаг

внутри отрезка $[a_0, b_0]$

выбираем некоторые внутренние
точки

x_1 и x_2
и вычисляем значения целевой
функции

$f(x_1)$ и $f(x_2)$



Поскольку в данном случае

$$f(x_1) < f(x_2)$$

очевидно, что минимум
расположен
на одном из прилегающих к x_1
отрезков:

$$[a_0, x_1] \text{ или } [x_1, x_2]$$

Поэтому $[x_2, b_0]$
отрезок
можно отбросить, сузив тем самым
первоначальный интервал
неопределенности.

Второй шаг

проводим на отрезке $[a_1, b_1]$

где $a_1 = a_0$ $b_1 = x_2$

Нужно снова выбрать две внутренние
точки,

но одна из них
 x_1

осталась из предыдущего шага,
поэтому достаточно выбрать лишь одну
точку x_3

вычислить

значение

и провести

сравнение.

$f(x_3)$

Поскольку здесь

$$f(x_3) < f(x_1)$$

ясно, что минимум находится на отрезке

Обозначим $[x_3, b_1]$ этот отрезок $[a_2, b_2]$
снова выберем одну внутреннюю точку
и повторим процедуру сужения
интервала неопределенности.

Процесс оптимизации повторяется до тех пор,

пока длина очередного отрезка $[a_k, b_k]$
не станет меньше заданной ε
величины

Теперь рассмотрим способ размещения внутренних точек

на каждом отрезке
 $[a_k, b_k]$

Пусть длина интервала неопределенности равна l ,

а точка деления разбивает его на части

$$l_1, \quad l_2$$

Золотое сечение интервала

неопределенности

выбирается так, чтобы отношение длины большего отрезка к длине всего интервала равнялось отношению длины меньшего отрезка

к длине большего отрезка:

$$\frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l_2}$$

Из этого соотношения можно найти точку
деления,

вычислив отношения

$$\alpha = \frac{l_1}{l} \quad \beta = \frac{l_2}{l}$$

Преобразуем выражение и найдем
значения

α и β

$$l_1^2 = l_2 l \quad l_1^2 = l(l - l_1) \quad l_1^2 + l_1 l - l^2 = 0$$

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \frac{l_1}{l} - 1 = 0 \quad \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Поскольку нас интересует только положительное решение, то

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

Очевидно, что интервал неопределенности
можно
разделить в соотношении золотого сечения
двойко:

$$l_2 : l_1 \text{ в пропорциях } l_1 : l_2$$

В данном случае
имеем

$$\frac{x_1 - a_0}{b_0 - a_0} = \frac{l_2}{l} = \beta$$

$$x_1 - a_0 = \beta(b_0 - a_0) \quad x_1 = (1 - \beta)a_0 + \beta b_0$$

$$x_1 = \alpha a_0 + \beta b_0$$

Аналогично

$$x_2 = \beta a_0 + \alpha b_0$$

Начальная длина интервала неопределенности
составляет

$$d_0 = b_0 - a_0$$

После первого шага оптимизации
получается
новый интервал неопределенности —
отрезок
 $[a_1, b_1]$

Его длина равна

$$d_1 = b_1 - a_1 = x_2 - a_0 = \beta a_0 + \alpha b_0 - a_0 = \alpha(b_0 - a_0) = \alpha d_0 \approx 0.618 d_0$$

На втором шаге отрезок

$$[a_1, b_1]$$

также делится в соотношении золотого сечения.

При этом одной из точек деления будет точка x_1

Покажем это:

$$\frac{x_1 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{\beta(b_0 - a_0)}{\alpha(b_0 - a_0)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \alpha$$

Последнее равенство следует из соотношения

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Вторая точка
деления x_3

выбирается так же, как выбирается
точка x_1
при делении отрезка $[a_0, b_0]$

$$\text{т. е. } x_3 = \alpha a_1 + \beta b_1$$

И снова интервал
неопределенности
уменьшается до размера

$$d_2 = b_2 - a_2 = b_1 - x_3 = b_1 - \alpha a_1 - \beta b_1 = \alpha(b_1 - a_1) = \alpha d_1 = \alpha^2 d_0$$

По аналогии можно записать
координаты
точек деления y и z отрезка

$$[a_{k-1}, b_{k-1}]$$

на k -м шаге оптимизации ($y < z$):

$$y = \alpha a_{k-1} + \beta b_{k-1}$$

$$z = \beta a_{k-1} + \alpha b_{k-1}$$

Вычислению, естественно,
подлежит только одна из координат y, z
другая координата берется с предыдущего
шага.

При этом длина интервала неопределенности
равна

$$d_k = b_k - a_k = \alpha^k d_0 \approx 0.618^k d_0$$

Как и в общем случае метода поиска,
процесс оптимизации заканчивается
при выполнении условия

$$d_k < \varepsilon$$

Тогда проектный параметр оптимизации

$$x \in [a_k, b_k]$$

В качестве приближения к оптимальному
значению

можно принять

$$x_* = a_k \quad \text{или} \quad x_* = b_k, \quad \text{или} \quad x_* = \frac{(a_k + b_k)}{2}$$

В последнем случае для достижения
требуемой точности достаточно, чтобы

$$d_k < 2\varepsilon$$