

Задача Дидоны

Выполнил: Ронжина Мария Игоревна
ученица 11 Г кл. МОУ «Лицей» г. Новотроицка.
Руководитель: Поветкина Наталия Анатольевна
учитель математики высшей категории

Содержание

1. Введение. Цели, задачи, актуальность.
 1. Введение.
 2. Миф о Дидоне.
2. Практическая часть.
3. Способы решения изопериметрической проблемы.
 1. Первый способ.
 2. Второй способ.
 3. Третий способ.
4. Заключение.
5. Литература.

Цели, задачи, актуальность

Мои наблюдения показали, что кот в холодную ночь сворачивается в клубочек, дождевые капли, мыльные пузыри, Солнце, Луна, наша Земля, планеты шарообразны или почти шарообразны. Почему это происходит?

Выбранную мною тему считаю **актуальной**, потому что экстремальные задачи не только очень важны в математике и ее приложениях, но и красивы. Одна из таких задач – задача Дидоны, которая имеет несколько различных формулировок. Вот одна из них: среди замкнутых кривых заданной длины, найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Эта задача имеет различные решения.

Чтобы ответить на эти вопросы я стала изучать изопериметрическую задачу.

Изопериметрическая задача – одна из основных задач вариационного исчисления, заключающаяся в следующем: среди всех кривых данной длины найти ту, для которой некоторая величина, зависящая от кривой имеет максимальное или минимальное значение.

Объект исследования: изопериметрическая проблема.

Предмет исследования: приемы решений изопериметрической проблемы.

Цель исследования: выявить и обосновать математические средства для решения этой проблемы.

Задачи:

- 1) выявить математические средства для решения проблемы
- 2) решить задачи и доказать некоторые теоремы для решения проблемы

Миф о Дидоне

В римской мифологии есть легенда о Дидоне.

Согласно этой легенде, Дидона была дочерью царя Тира и женой жреца Геракла Акербаса; После того как брат Дидоны Пигмалион убил ее мужа, позарившись на его богатства, Дидона была вынуждена бежать. Захватив с собой часть сокровищ мужа, она в сопровождении многочисленных спутников отправилась на запад вдоль берегов Средиземного моря. Ей приглянулось одно место на побережье нынешнего Тунисского залива. Дидона повела переговоры с берберийским царем Ярбом о продаже земли. По условию она могла взять столько земли, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась. Тогда Дидона разрезала эту шкуру на тонкие ремни, связав их воедино, и окружила изрядный кусок земли. На этом месте была основана цитадель Карфагена Бирсу. (По-гречески «бирсу» как раз и означает «шкура».)



Так гласит легенда.

Формулировки задачи Дидоны

- Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.
- Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную площадь, найти кривую, имеющих минимальный периметр.

Эксперимент 1.

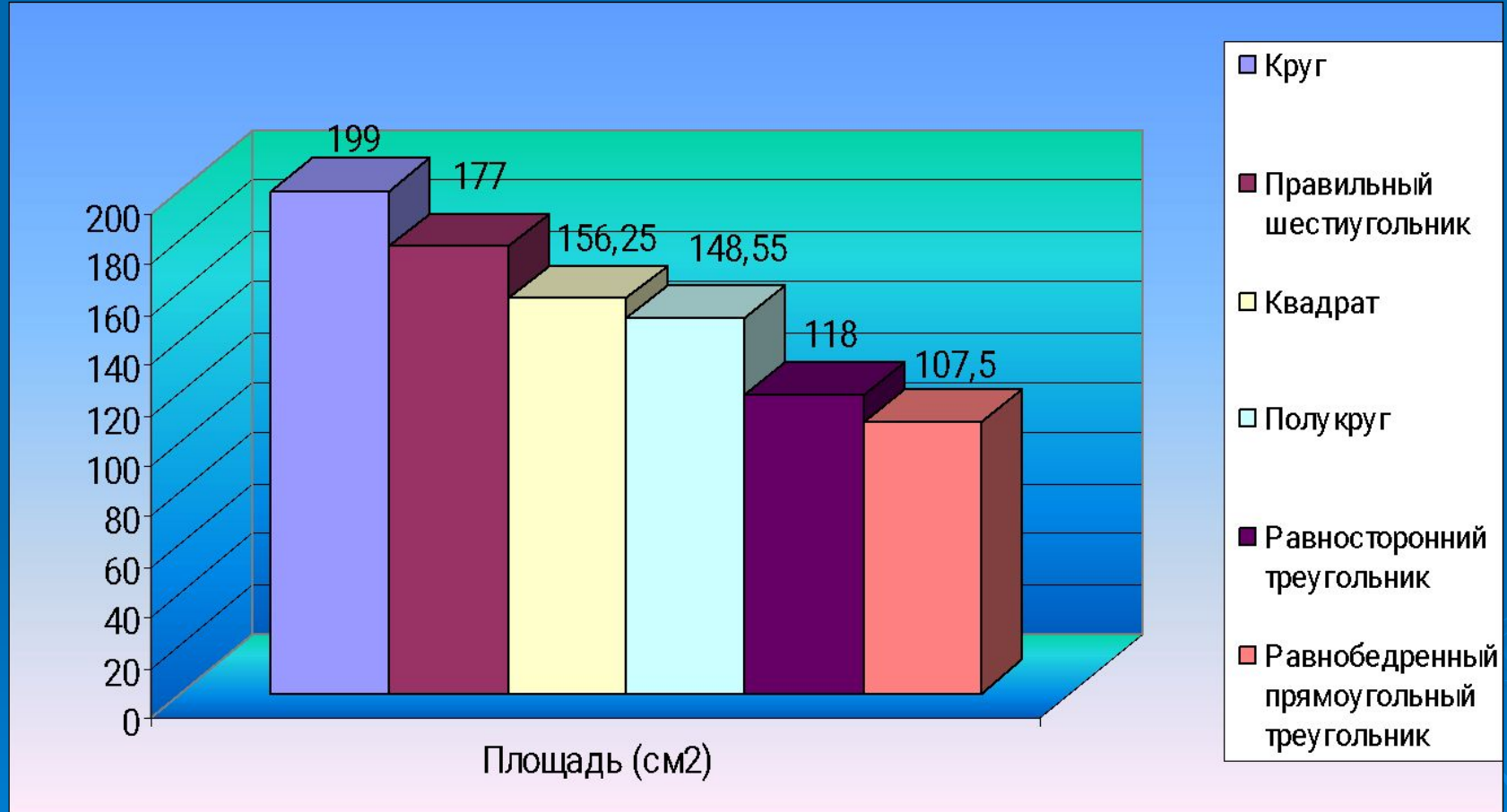


Диаграмма 1. Площади фигур равного периметра (50 см).

Эксперимент 2

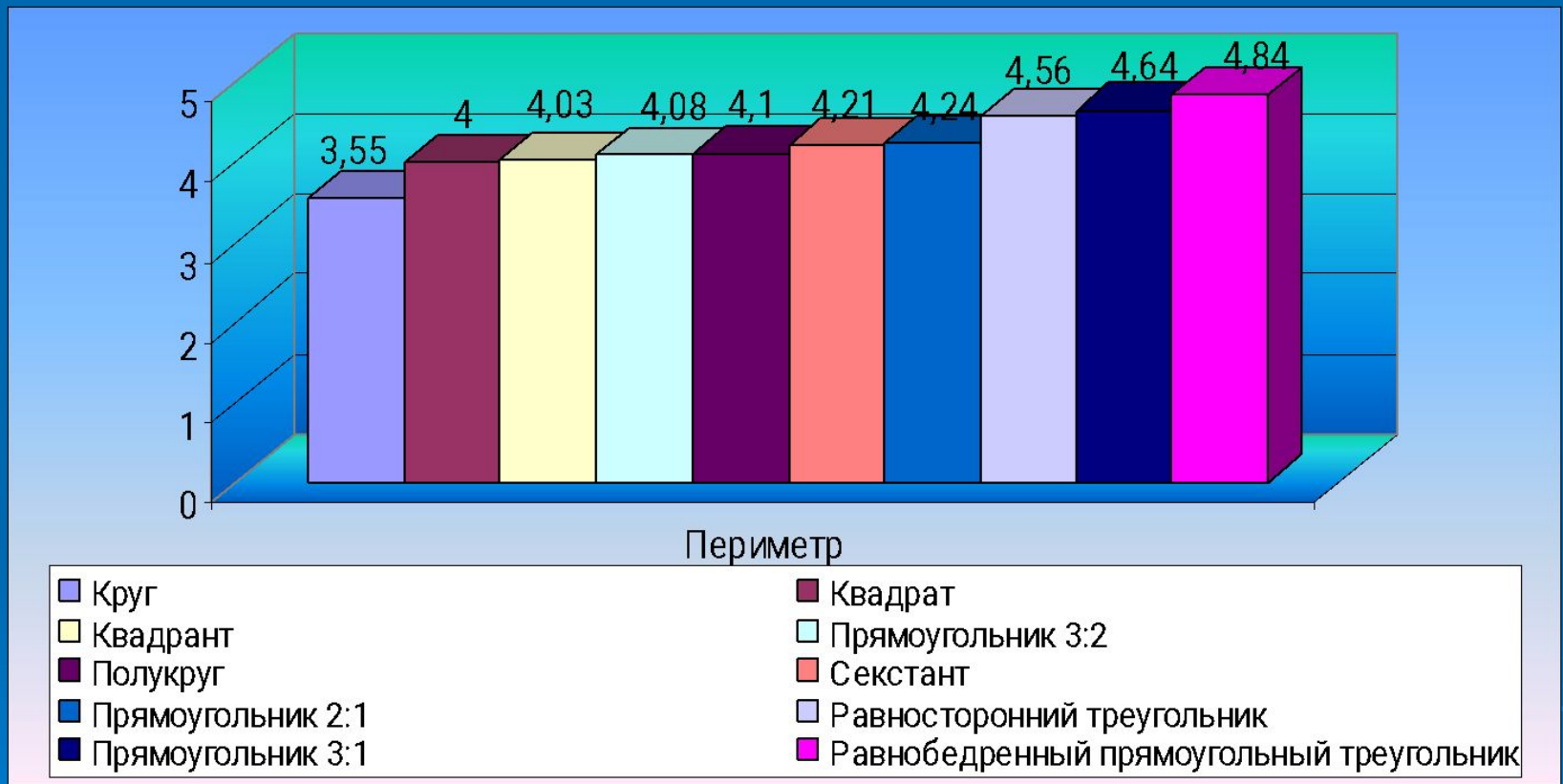
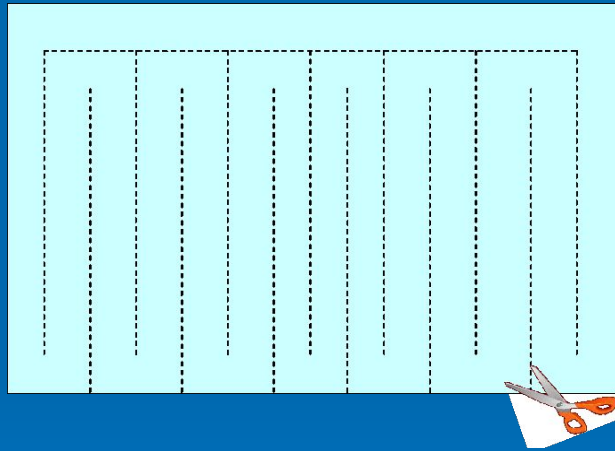


Диаграмма 2. Периметры фигур равной площади (1 см²)

Эксперимент 3

Можно ли в листе бумаги размером с обычную страницу из тетради проделать такое отверстие, чтобы сквозь него мог пройти человек?



Если лист бумаги разрезать так, что при растяжении данной модели в результате можно получить окружность.

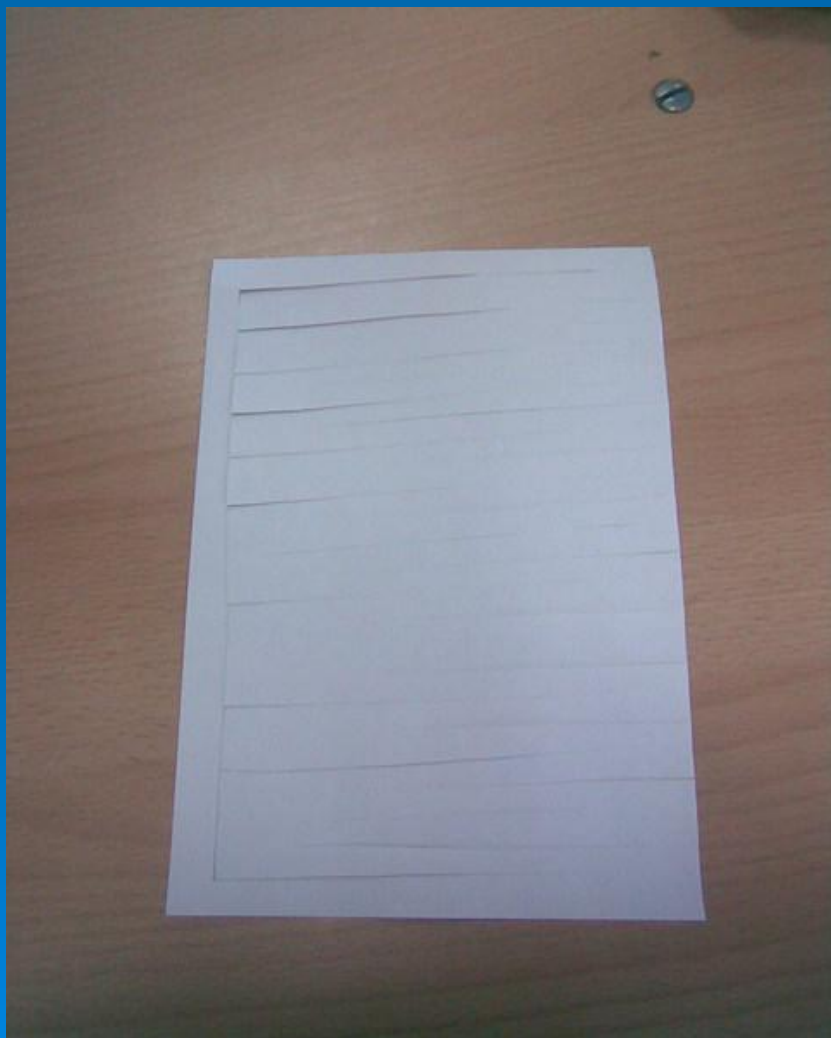
Эксперимент 3

Как мы это делали.



Эксперимент 3

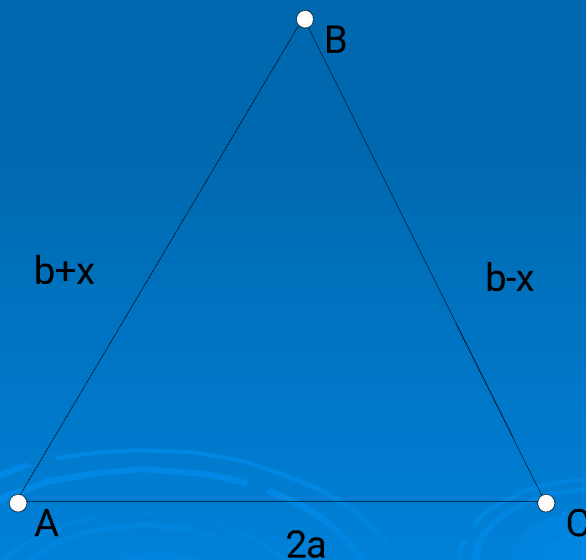
Как мы это делали.



Первый способ

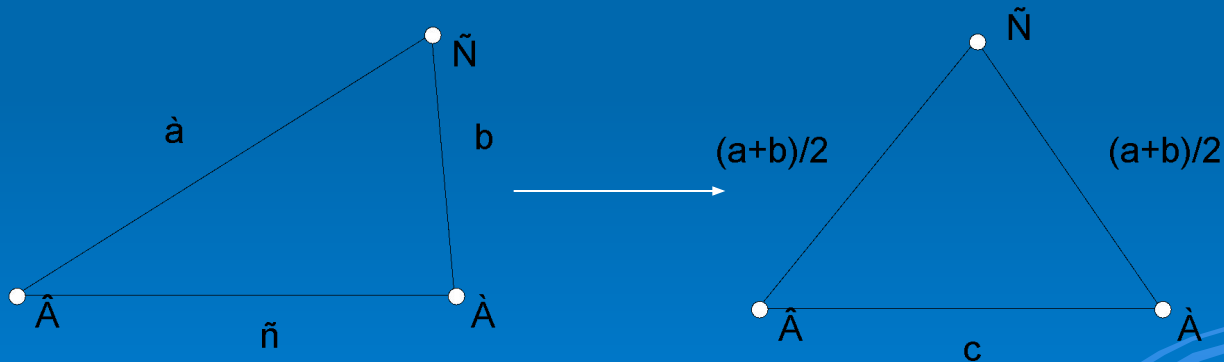
Задача 1.

Среди треугольников, у которых задана одна из сторон и сумма двух других, найдите треугольник с наибольшей площадью.



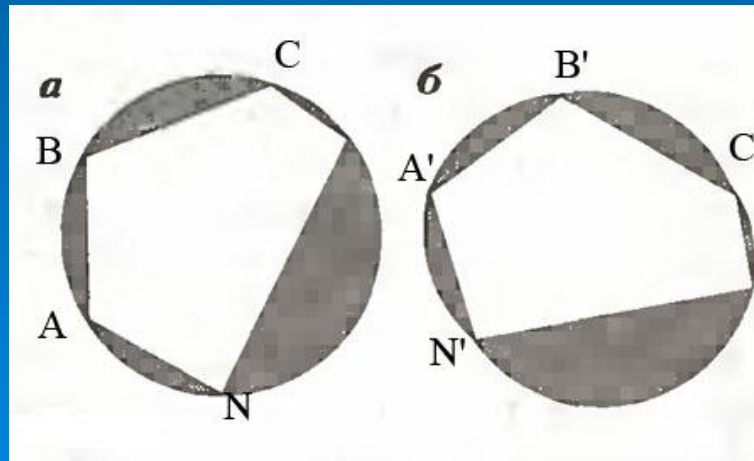
Первый способ

Задача 2. Докажите, что среди треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.



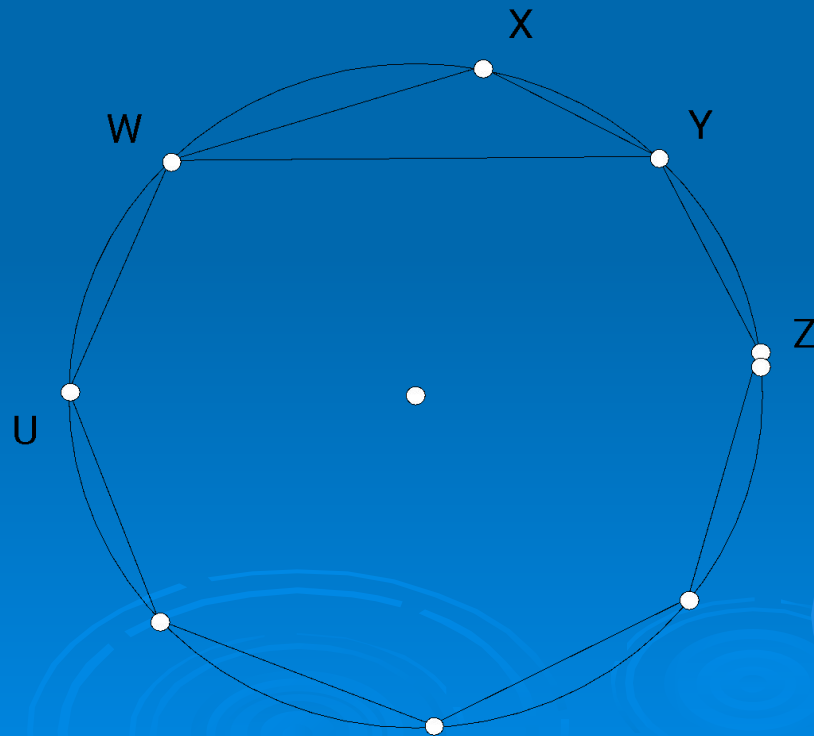
Первый способ

Задача 3. Рассмотрим всевозможные n -угольники с заданными сторонами. Докажите, что среди таких многоугольников найдется многоугольник, около которого можно описать окружность, и именно этот многоугольник имеет наибольшую площадь среди рассматриваемых многоугольников.



Первый способ

Задача 4 Найти многоугольник с данным числом сторон и данным периметром, имеющий наибольшую площадь.

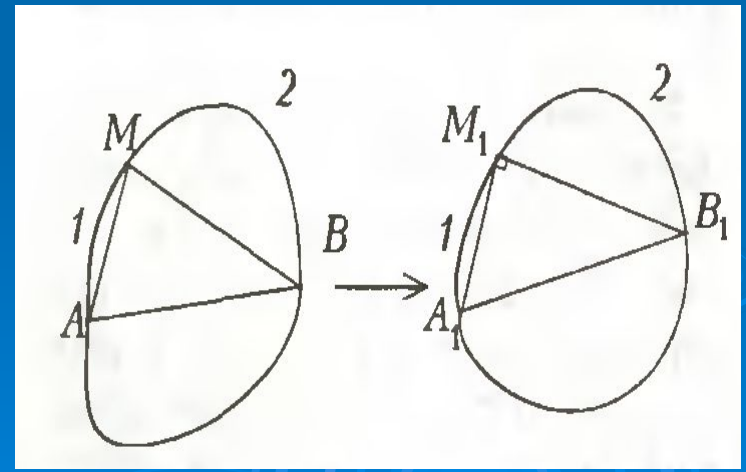
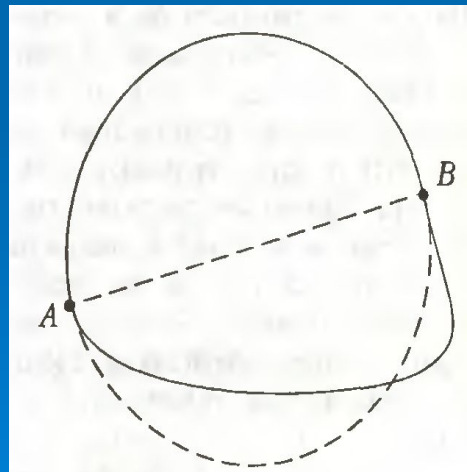
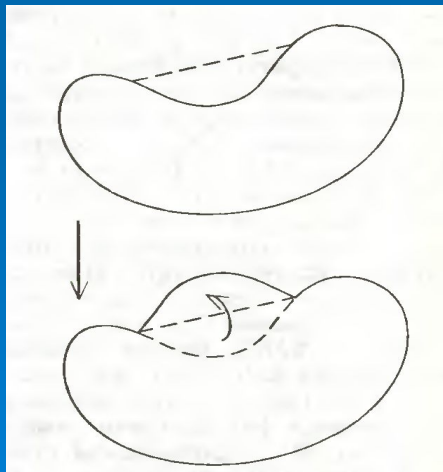


Первый способ

- *Задача 5. Два правильных многоугольника, один с n , а другой с $n-1$ сторонами, имеют один и тот же периметр. Какой имеет большую площадь?*
- *Задача 6. Круг и правильный многоугольник имеют один и тот же периметр. Что имеет большую площадь?*
- *Задача 7. Круг и произвольный многоугольник имеют один и тот же периметр. Что имеет большую площадь?*
- *Задача 8. Круг и произвольная фигура имеют один и тот же периметр. Что имеет большую площадь?*

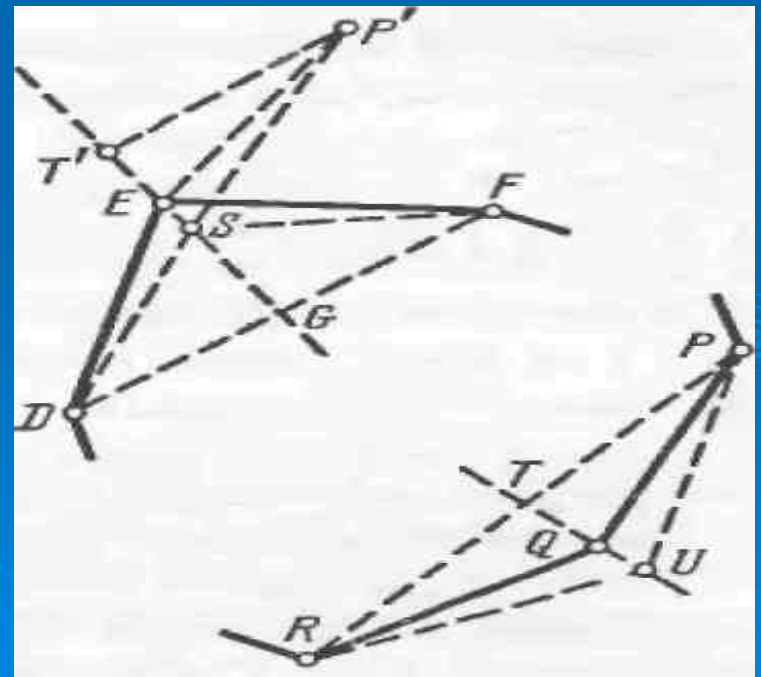
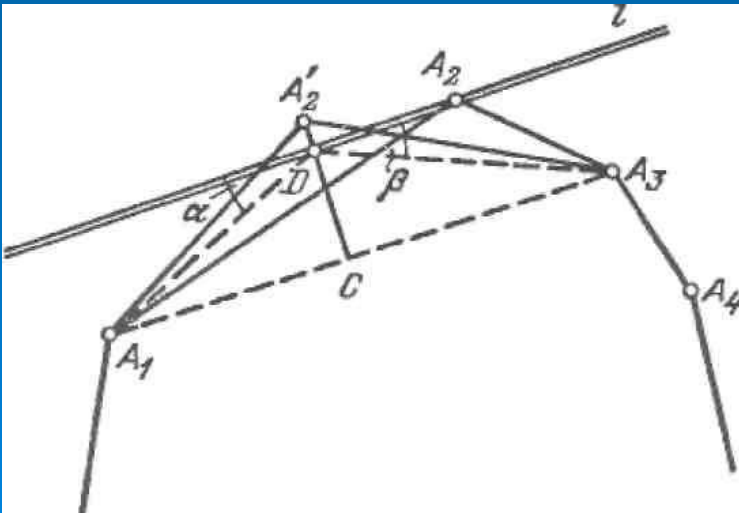
Второй способ.

Среди всевозможных плоских замкнутых линий заданной длины найдите ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.



Третий способ

- Лемма 1 *Максимальный n -угольник должен быть равносторонним.*
- Лемма 2. *Максимальный n -угольник должен быть равноугольным.*



Третий способ

- **Лемма 3.** *Максимальный n -угольник существует.* (утверждение, которое Зенодор считал само собой разумеющимся). Отсюда из лемм 1 и 2 следует
- **Теорема 1.** *Максимальный n -угольник является правильным n -угольником.*
- **Лемма 4.** *Для любой замкнутой плоской кривой длины P^* , охватывающей площадь S^* и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти некоторый n -угольник, периметр P и площадь S которого удовлетворяют неравенствам*

$$|P - P^*| \leq \varepsilon, \quad |S - S^*| \leq \varepsilon$$

Обобщение и вывод

Изучив изопериметрическую теорему на плоскости можно доказать изопериметрическую теорему в пространстве: «Из всех тел равного объема наименьшую поверхность имеет шар».

Изопериметрической теореме в пространстве мы склонны верить без математического доказательства. Сама природа расположена в пользу шара. Дождевые капли, мыльные пузыри, Солнце, Луна, наша Земля, планеты шарообразны или почти шарообразны.



Обобщение и вывод

Немного зная физику поверхностного натяжения, можно научиться изопериметрической теореме у мыльного пузыря. Будучи сжаты окружающей средой, они стремятся в силу сцепления образовать при неизменном объеме более толстую поверхностную пленку, или потому, что они разрешили вопрос о том, какое тело при данном объеме имеет наименьшую поверхность.

То же можно сказать про кота, который в холодную ночь сворачивается в клубочек и таким образом делает своё тело настолько возможно шарообразным. Пытаясь сохранить тепло, он уменьшает свою поверхность. Таким образом, он решает задачу о теле с данным объемом и наименьшей поверхностью, делая себя возможно более шарообразным.



Литература:

1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967г.
2. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Физматлит, 1975г.
3. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1966г.
4. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка «Квант», вып. 56. – М.: Наука, 1986 г.
5. Шарыгин Д. Миф о Дидоне и изопериметрическая задача. «Квант» №1, 1997г