Городское управление образования г.Полысаево
Информационно-методический центр
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 35»

Загадочное число ПИ

Работа на городскую научно-исследовательскую конференцию «Шаг в будущее»

Выполнил:
Олейник Юля,
ученица 10 А класса
Руководитель:
Третьякова Галина Валерьяновна,
учитель математики,
Луцык Наталья Анатольевна,
учитель информатики

Полысаево, 2008

Цель:

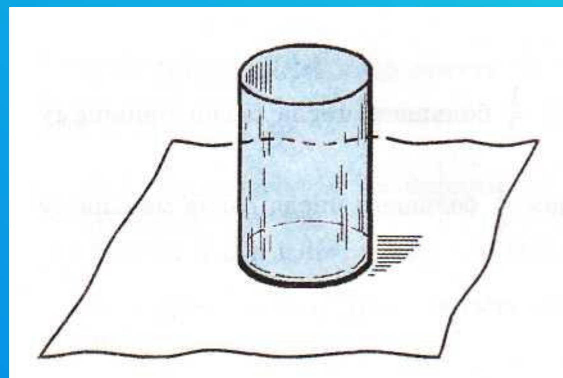
Исследование природы числа ПИ и выявление его роли в окружающем нас мире.

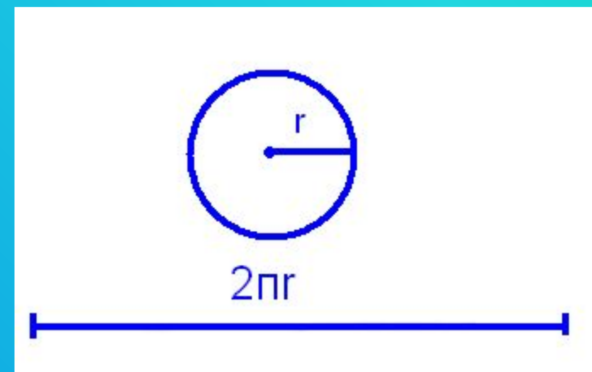
Задачи:

1. Рассмотреть:
   - ситуации возникновения числа π.
   - трансцендентность числа π.
   - некоторые способы вычисления числа π.
   - проблему квадратуры круга.
2. Провести собственный опыт исследования по вычислению числа ПИ.
3. Раскрыть загадочность числа ПИ.

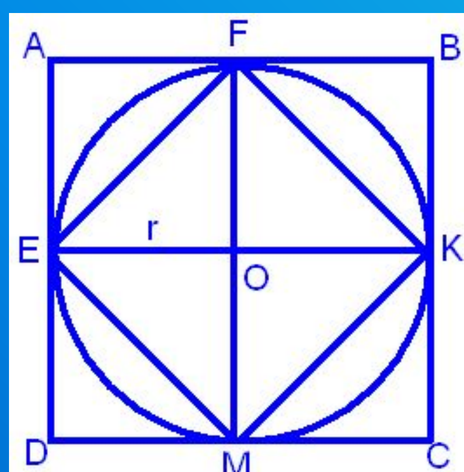
Первое знакомство с числом ПИ

6 класс





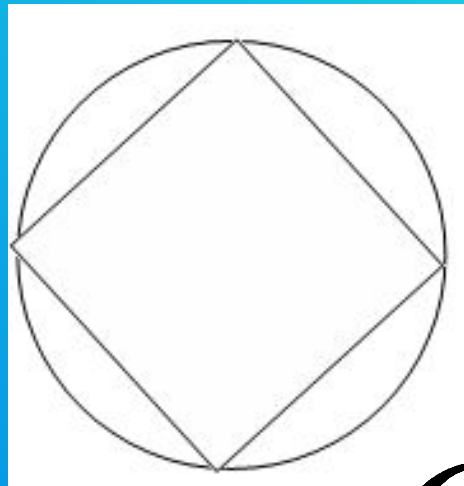
Длина окружности: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$

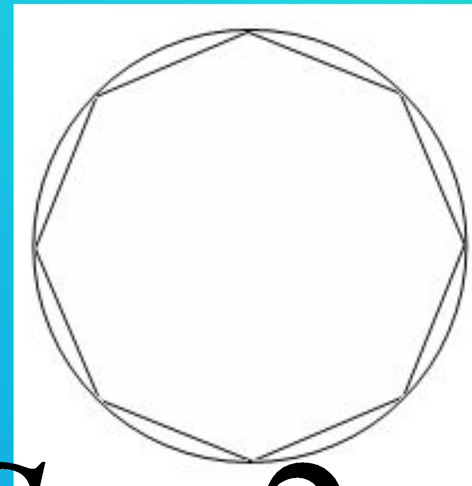


Площадь круга

$$S = \pi \cdot r^2$$

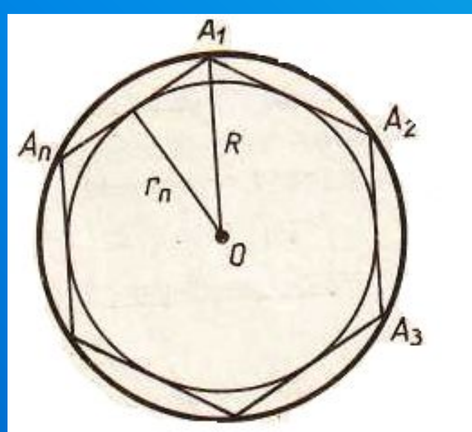
9 класс





$$C = 2\pi R$$

«Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности



$$S = \pi R^2$$

10 класс

Особое значение число **π**
имеет в курсе «Алгебры и начала анализа»
в 10 классе для измерения угла в радианах,
при изучении темы
«Тригонометрические функции».

Математический ребус на тему числа ПИ

Разгадав ребус, вы узнаете имя древнегреческого философа и математика, которому приписывают открытие важнейших теорем геометрии.

Ответ: Пифагор.

Физика

На этом школьная жизнь числа **π** не заканчивается. В старших классах мы встречаемся с этим удивительным числом в курсе физики на таких темах как:

1. Движение тела по окружности:

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$ - линейная скорость;

$$W = 2\pi n$$ - угловая скорость, n – частота вращения

2. Механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$ - S – площадь сечения (круга) $S = \pi R^2$

3. Период колебания математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ - период колебания груза на пружине

4. Закон Кулона:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \quad k = \frac{1}{4\pi e_0}$$ - коэффициент пропорциональности

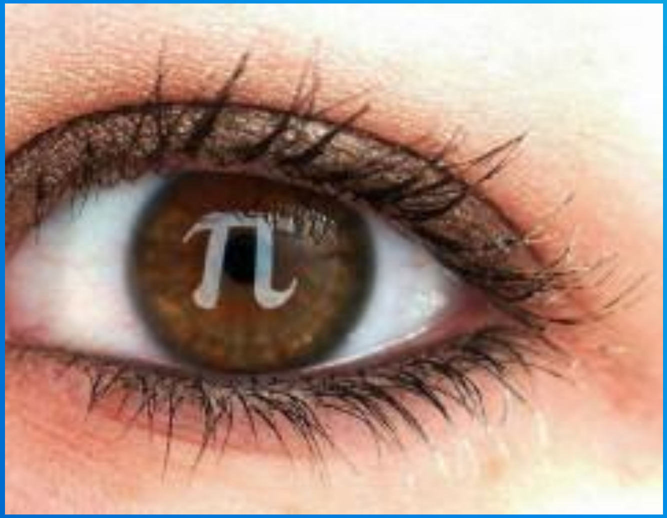
5. Формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$ - период колебаний в колеблющемся контуре

Возникновение числа ПИ

1. Рассмотрим множество положительных чисел. Если у них случайным образом выбрать два числа, то какова вероятность того, что выбранные числа не будут иметь общего делителя? Ответ неожидан: искомая вероятность равна:

$$\frac{6}{\pi^2}$$

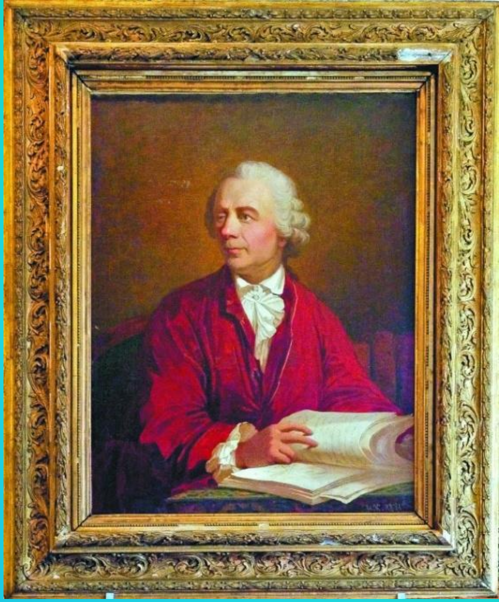


2. Когда-то немецкий математик Лейбниц (1646-1716) заинтересовался, сколько получится в пределе, если последовательно будем складывать такие числа:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

Оказалось, что в пределе мы получим $\frac{\pi}{4}$. (Для доказательства Лейбниц пользовался приёмами высшей математики).

3. Аналогичный вопрос поставил перед собой Леонар Эйлер. Его интересовала «сумма чисел: ».



$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi}{6^2}$$

Число π участвует и в известной формуле Эйлера

$$e^{2\pi i}=1$$

из которой ещё глубже выясняется природа числа π. Полученные формулы для числа π позволяют вычислить это число с большой точностью, не обращаясь к окружности и правильном многоугольникам, и при этом значительно легче и быстрее.

4. Было найдено и много других формул, где неожиданно появляется число π. Вот формула английского математика Джона Валлиса: $$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots$$

5. Удобнее для вычислений ряд, получаемый разложением $arctg(x)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\right)$$

Наилучшую формулу для вычисления числа π получил Дж. Мэчан, пользуясь также разложением в ряды $arctg(x)$. Он вычислил $arctg(x)$ с точностью до 100 десятичных знаков.

6. Число $arctg(x)$ встречается и в некоторых формулах неевклидовой геометрии, где оно, конечно, не является отношением длины окружности к её диаметру, а определяется число аналитически.

Трансцендентность числа ПИ

По определению трансцендентным называют число, которое не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Вычисления значений числа ПИ

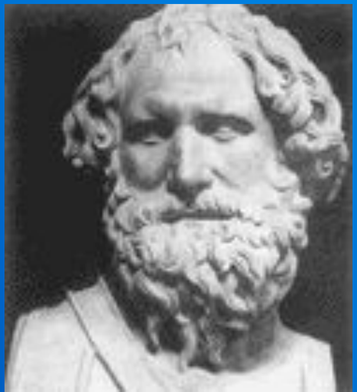
1. В Древнем Египте при вычислении площади круга для π использовали

значение $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049$

2. Древнеримский архитектор Витрувий принимал $\pi = 3\frac{1}{8}$

3. Архимед нашёл более точное приближение для числа π.

Он показал, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{3}$ так что $\pi \approx 3\frac{1}{7}$



Числовой фокус китайского астронома Цю Шунь-Ши

Напишем по два раза три нечётных числа:

1, 1, 3, 3, 5, 5.

Три последних числа сделаем числителем, а три первых – знаменателем дроби .

$$\frac{355}{113}$$

Эта дробь позволяет вычислить π с точностью до седьмого знака.

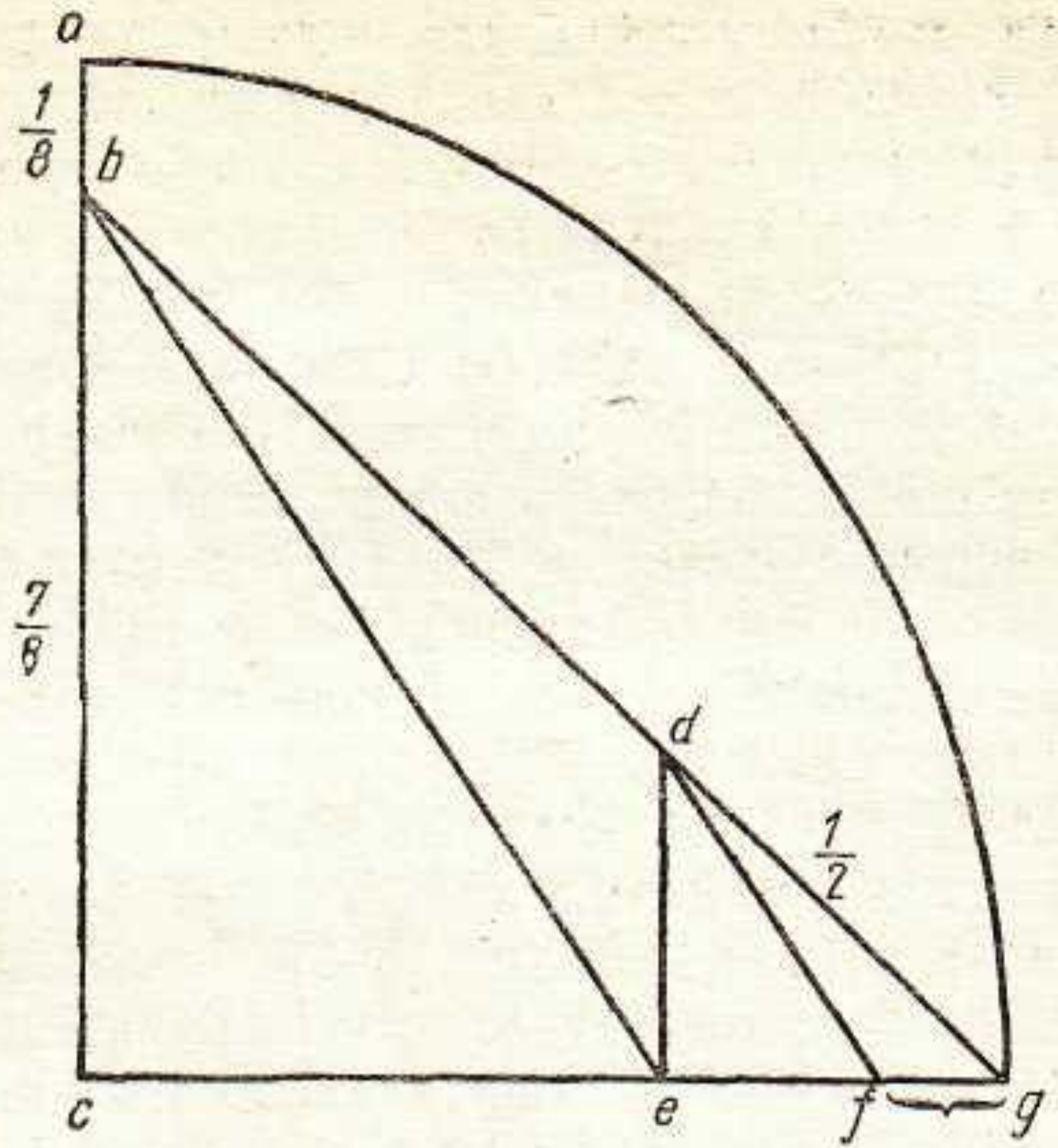
Чтобы вычислить приближенно число ПИ, в течение многих столетий поступали так:

в окружность с диаметром, равным единице, мысленно вписывали правильный многоугольник с большим числом сторон и вычисляли периметр этого многоугольника, привлекая «формулу удвоения». Периметр такого многоугольника и принимался равным числу π. Для оценки погрешности такого приближения приходилось рассматривать также периметры правильных описанных многоугольников

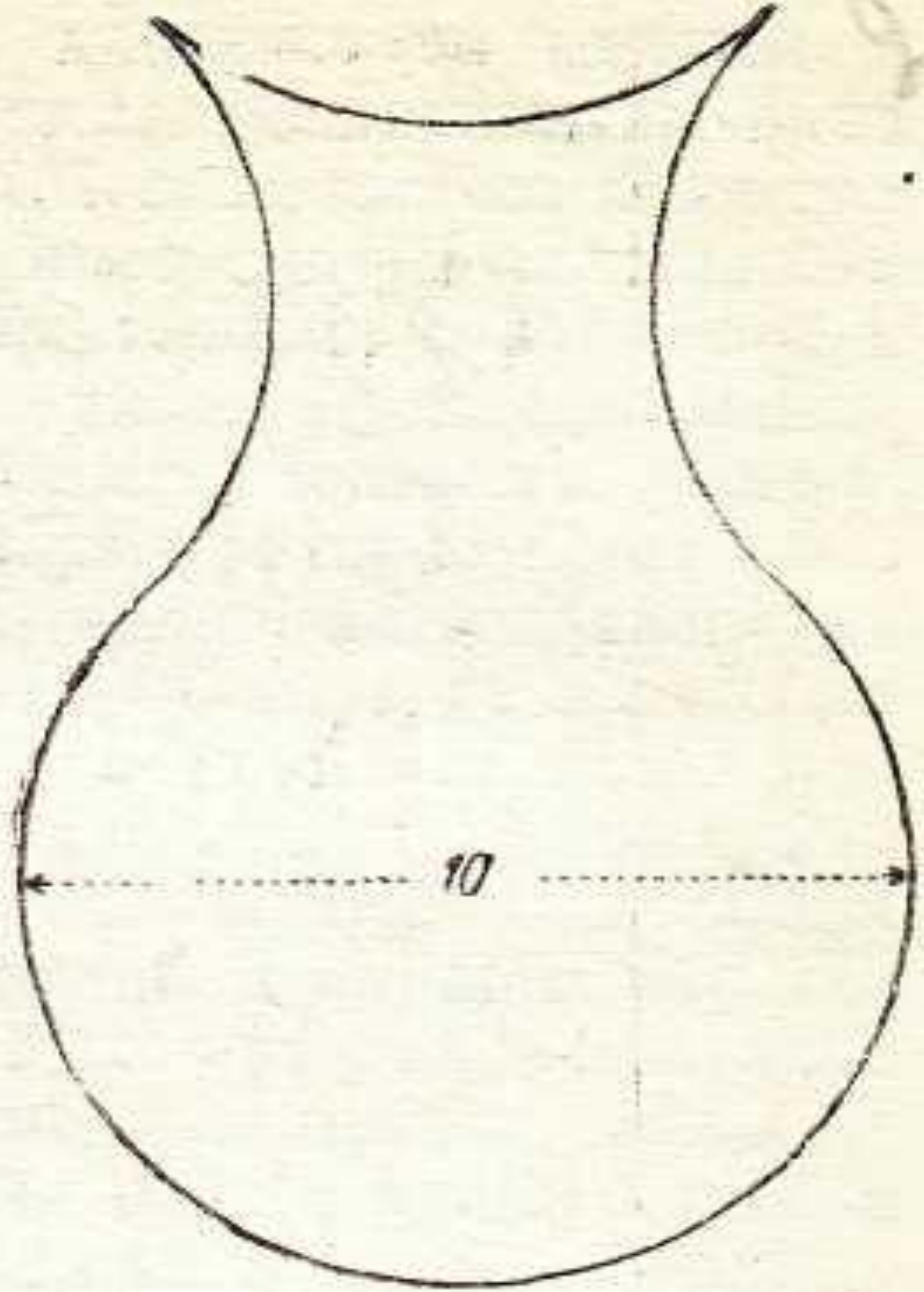
Проблема квадратуры круга

Можно ли, пользуясь только циркулем и линейкой, построить квадрат, площадь которого была бы в точности равна площади данного круга?

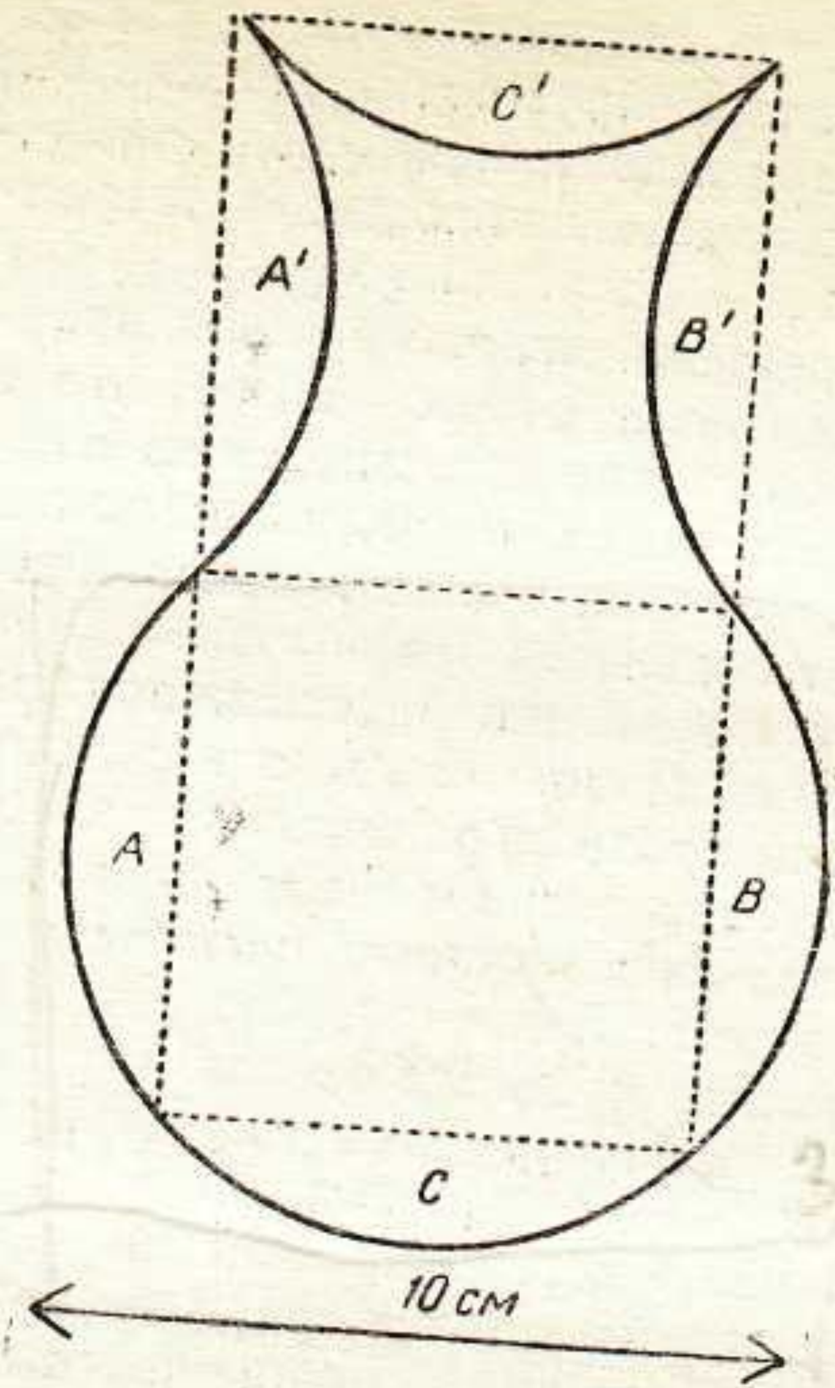
Проведём в четверти единичного круга несколько линий так, чтобы отрезок *bc* был равен 7/8 радиуса, *dg- 1/2,* отрезок *de* был параллелен отрезку *ac,* а *df*— параллелен отрезку *be.* Тогда, как легко видеть, расстояние *fg* равно , $\frac{16}{113}$ или 0,1415929... Поскольку , отложим отрезок втрое длиннее радиуса, продолжим его на расстояние *fg* и получим новый отрезок, длина которого отличается от π меньше чем на одну миллионную.



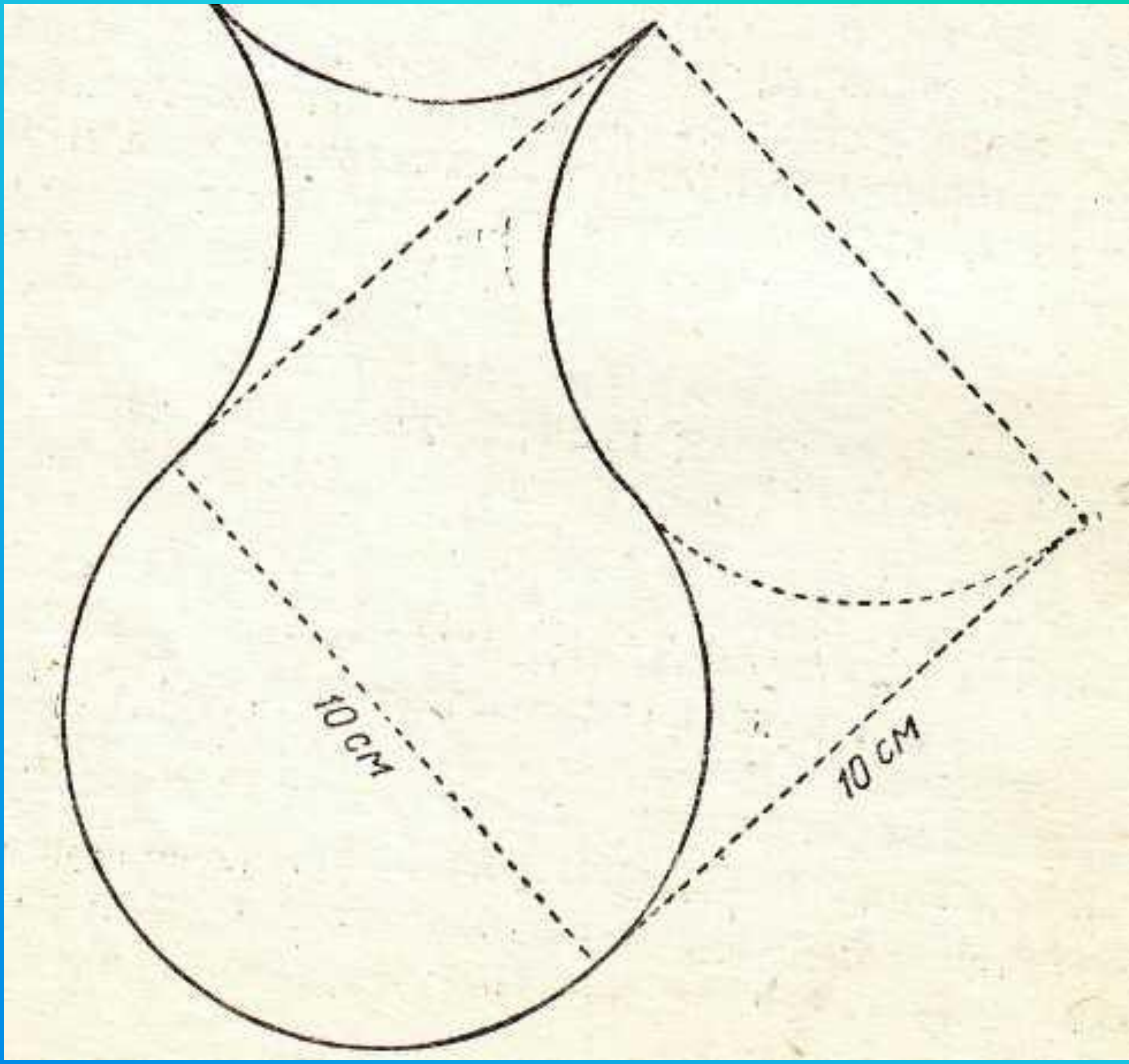
Контур нижней части этой вазы образован дугой в $\frac{3}{4}$ окружности диаметром 10 см. Верхняя половина ограничена тремя четвертушками той же окружности. **Как быстро можно назвать с точностью до последнего десятичного знака длину стороны квадрата, имеющего площадь, равную площади этой фигуры?**



Ответ: сторона квадрата также равна 10 см. Если пунктирные линии провести так, как показано на рисунке, то станет видно, что сегментами А, В, и С можно заполнить «лунки» А', В', и С', при этом образуются два квадрата общей площадью 100 см2.

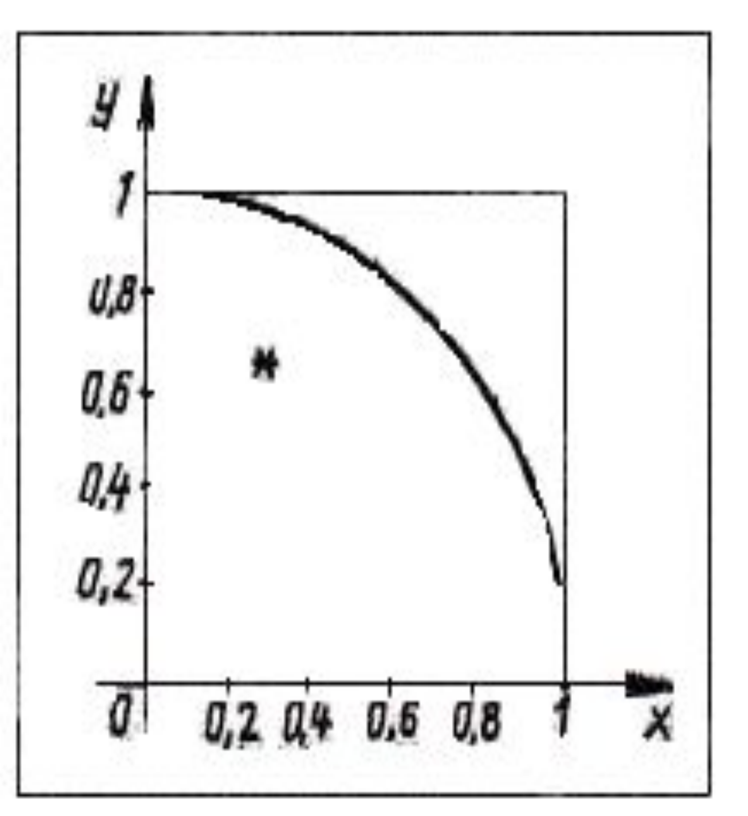


На рисунке показано, как разрезать вазу всего лишь на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат 10×10 см.



Метод Монте-Карло

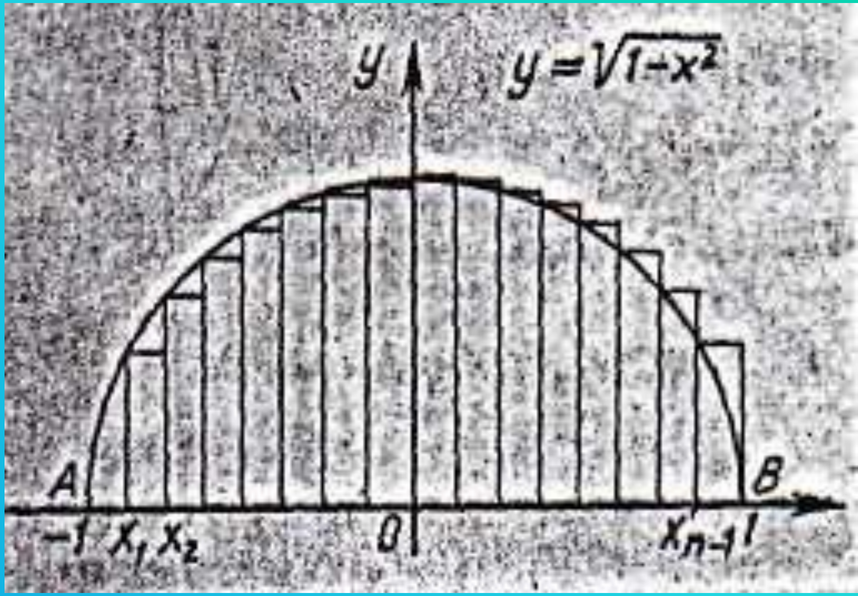
```
PROGRAM METOD1;
USES CRT;
VAR
X,Y,P: REAL;
I,NKV,NKR:INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
RANDOMIZE;
WRITELN('          ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN ('      *** МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ***');
WRITELN;
WRITE (‘ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО КАПЕЛЬ В КВАДРАТЕ?‘);
READLN(NKV);
WRITELN;
NKR:=0;
FOR I:=0 TO NKV DO
                BEGIN
                     X:=RANDOM;
                     Y:=RANDOM;
                     IF X*X+Y*Y<=1 THEN NKR:=NKR+1;
                     END;
P:=4*NKR/NKV;
WRITELN(‘ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ‘,P:7:6);
READLN;
END.
```



$$\pi \approx 4\cdot\frac{N_{круга}}{N_{квадрата}} \approx 4\cdot\frac{S_{круга}}{S_{квадрата}}$$

Результат

Метод Прямоугольников




```
ROGRAM METOD2;
USES CRT;
VAR
F, DX, P, X, A: REAL;
I, N:INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
WRITELN('          ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN ('       *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');
WRITELN;
WRITE (‘ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА? ‘);
READLN(N);
WRITELN;
DX:=1/N;
FOR I:=0 TO N-1 DO
                    BEGIN
                          F:=SQRT(1-SQR(X));
                          X:=X+DX;
                          A:=A+F;
                          END;
P:=4*DX*A;
WRITELN(‘ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ‘,P:7:6);
READLN;
END.
```

Результат

Метод Тейлора

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

```
ROGRAM METOD3;
USES CRT;
VAR
S,  P, F: REAL;
I, N:INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
WRITELN('          ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN (' *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');
WRITELN;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЧЛЕНОВ РЯДА ТЕЙЛОРА? ');
READLN(N);
WRITELN;
S:=1;
FOR I:=1 TO N DO
                    BEGIN
                        F:=1/(2*I+1);
                        IF I MOD 2=0 THEN F:=F ELSE F:=-F;
                        S:=S+F;
                        END;
P:=4*S;
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```

Результат

Свои данные исследования я занесла в следующую таблицу:

Значение N	10	25	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
Метод Тейлора	3,232316	3,103145	3,161199	3,151493	3,146568	3,143589	3,142592	3,142092	3,141793	3,141693
Метод Монте-Карло	3,200000	3,520000	3,360000	3,280000	3,340000	3,232000	3,100000	3,190000	3,139200	3,135600
Метод Прямоугольников	3,304518	3,212196	3,178269	3,160417	3,151177	3,145487	3,143555	3,142580	3,141989	3,141791

Вывод: ***во всех методах вычисления - чем больше значение N (либо – количество капель в квадрате, либо – количество членов ряда Тейлора, либо – количество точек деления отрезка), тем более точнее вычисляется приближённое значение числа π. Из всех трёх методов более точнее работает метод Тейлора***

Метод "Падающей иголки"

Я **взяла обыкновенную швейную иголку и лист бумаги. На листе провела несколько параллельных прямых так, чтобы расстояние между ними были равны и совпадали с длиной иголки. Чертёж должен быть достаточно большим, чтобы случайно брошенная игла не упала за его пределами.**

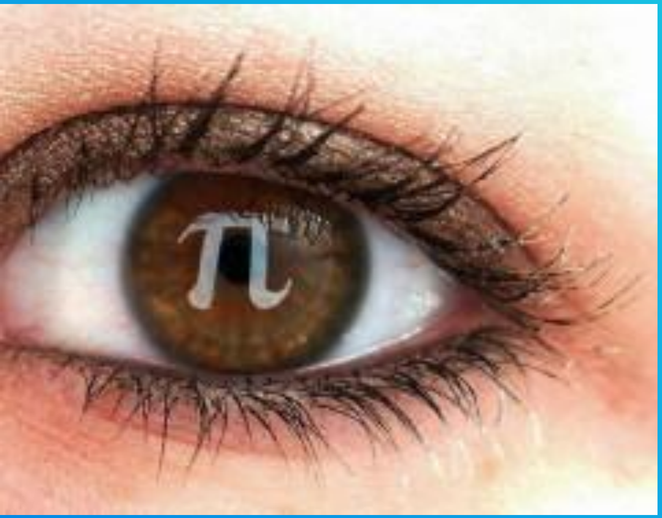
На этот лист я бросала сверху иглу и подсчитывала, сколько раз при данном числе бросаний игла пересечёт одну из параллелей (безразлично какую).

Свои результаты я занесла в таблицу:

№ опыта	Число бросания иглы (n)	Количество пересечений линий иглой (m)	Результат отношения $\frac{m}{n}$
1	20	15	0,75
2	30	22	0,733333
3	40	27	0,675
4	50	33	0,66
5	60	45	0,75
6	70	51	0,72857
7	80	53	0,6625
8	90	58	0,644444
9	100	67	0,67
10	120	77	0,641667

Вывод: оказалось, что при большем числе бросаний (n) дробь $\frac{m}{n} \approx \frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi} \approx 0{,}63662$

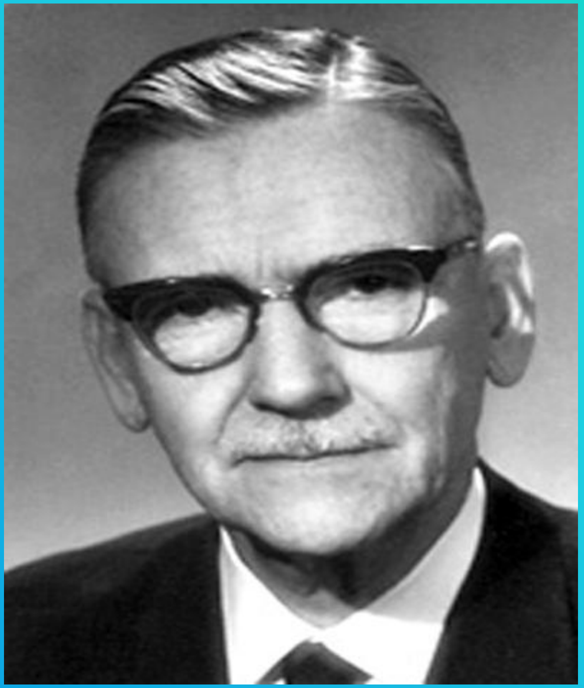
и это равенство будет тем точнее, чем больше будет число бросаний.



Число ПИ - разумно

Идеальная дата рождения числа ПИ

14 марта 1592 года (3,141592)



Альберт Эйнштейн

14 марта 1879 года

Вадим Косогоров:

«Почему, зная о нежелании числа ПИ быть опознанным в качестве разумного, я не побоялся прийти сюда и вам всё это рассказать? Да потому, что для меня это и был единственный способ выжить. Теперь-то ПИ придётся или убить всех вас, или смириться с тем, что его тайна раскрыта. Будем надеяться, что Оно поступит разумно»

Спасибо за внимание!