

Городское управление образования г.Полысаево
Информационно-методический центр
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 35»

Загадочное число ПИ

Работа на городскую научно-исследовательскую конференцию «Шаг в будущее»



Выполнил:
Олейник Юлия,
ученица 10 А класса
Руководитель:
Третьякова Галина
Валерьяновна,
учитель математики,
Луцык Наталья Анатольевна,
учитель информатики

Полысаево, 2008

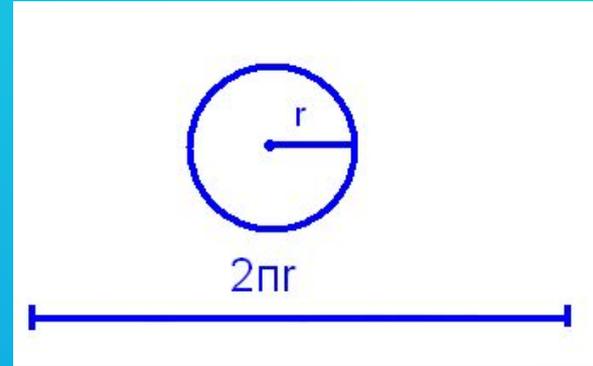
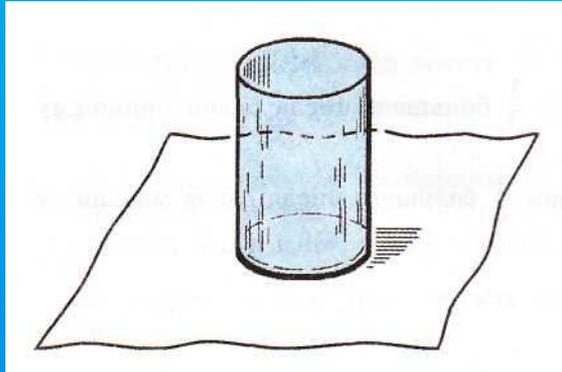
Цель:

Исследование
природы числа π и
выявление его роли в
окружающем нас
мире.

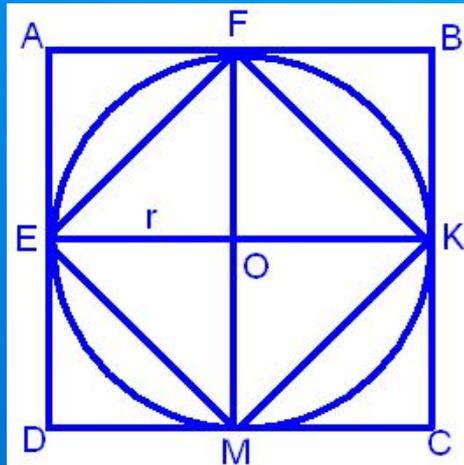
Задачи:

1. Рассмотреть:
 - ситуации возникновения числа π .
 - трансцендентность числа π .
 - некоторые способы вычисления числа π .
 - проблему квадратуры круга.
2. Провести собственный опыт исследования по вычислению числа π .
3. Раскрыть загадочность числа π .

Первое знакомство с числом ПИ

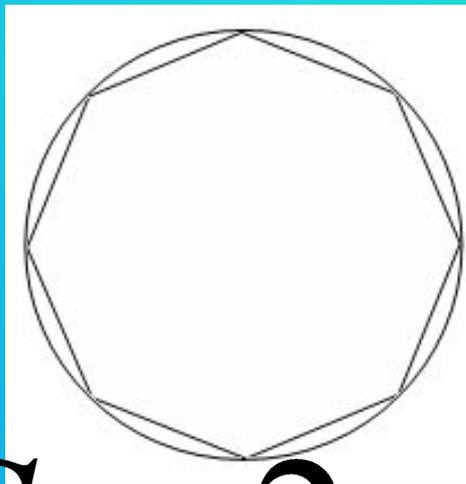
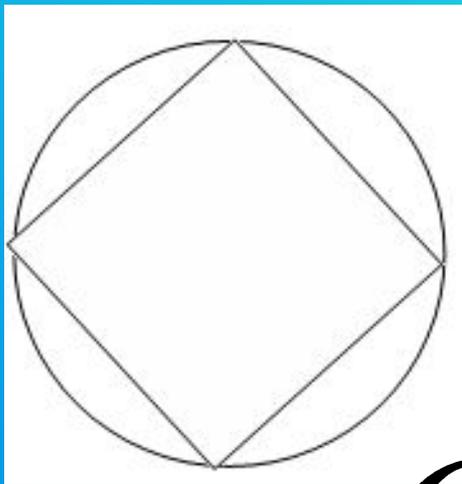


Длина окружности: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$



Площадь круга

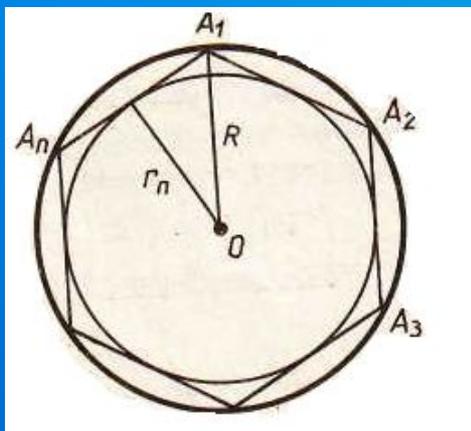
$$S = \pi \cdot r^2$$



$$C = 2\pi R$$

«Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности.

Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности



$$S = \pi R^2$$

Особое значение число π имеет в курсе «Алгебры и начала анализа» в 10 классе для измерения угла в радианах, при изучении темы «Тригонометрические функции».



Математический ребус на тему числа ПИ

Разгадав ребус, вы узнаете имя древнегреческого философа и математика, которому приписывают открытие важнейших теорем геометрии.



Ответ: Пифагор.

На этом школьная жизнь числа π не заканчивается. В старших классах мы встречаемся с этим удивительным числом в курсе физики на таких темах как:

1. Движение тела по окружности:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{- линейная скорость;}$$

$$W = 2\pi n \quad \text{- угловая скорость, } n \text{ – частота вращения}$$

2. Механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{- } S \text{ – площадь сечения (круга) } S = \pi R^2$$

3. Период колебания математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{e}{g}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{- период колебания груза на пружине}$$

4. Закон Кулона:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{- коэффициент пропорциональности}$$

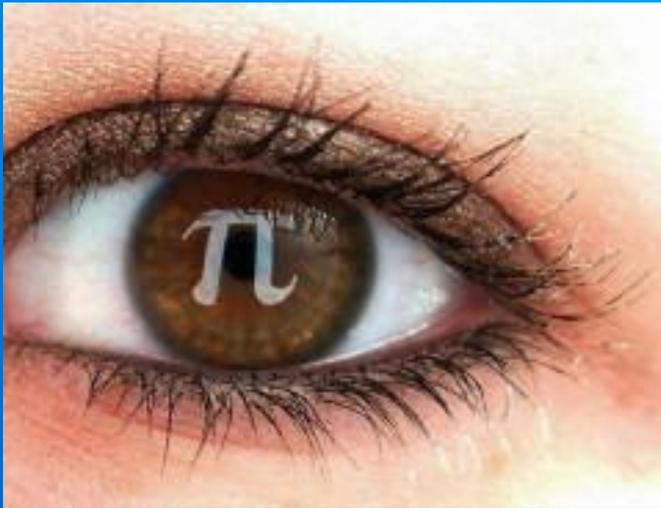
5. Формула Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad \text{- период колебаний в колеблющемся контуре}$$

Возникновение числа ПИ

1. Рассмотрим множество положительных чисел. Если у них случайным образом выбрать два числа, то какова вероятность того, что выбранные числа не будут иметь общего делителя? Ответ неожидан: искомая вероятность равна:

$$\frac{6}{\pi^2}$$



2. Когда-то немецкий математик Лейбниц (1646-1716) заинтересовался, сколько получится в пределе, если последовательно будем складывать такие числа:

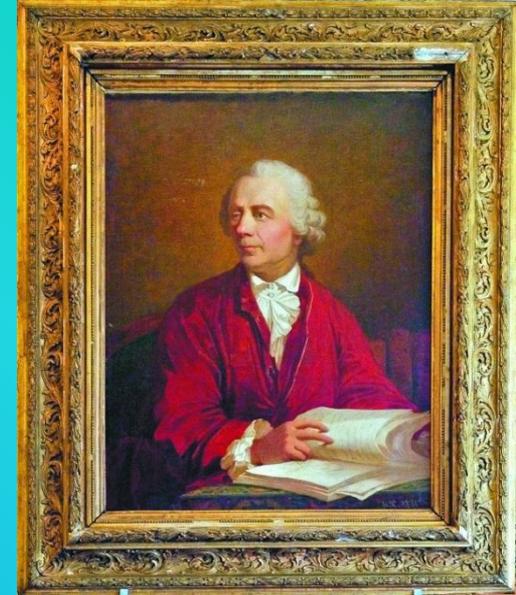
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Оказалось, что в пределе мы получим $\frac{\pi}{4}$. (Для доказательства Лейбниц пользовался приёмами высшей математики).



3. Аналогичный вопрос поставил перед собой Леонард Эйлер. Его интересовала «сумма чисел: ».

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi}{6^2}$$



Число π участвует и в известной формуле Эйлера

$$e^{2\pi i} = 1$$

из которой ещё глубже выясняется природа числа π .
Полученные формулы для числа π позволяют вычислить это число с большой точностью, не обращаясь к окружности и правильным многоугольникам, и при этом значительно легче и быстрее.

4. Было найдено и много других формул, где неожиданно появляется число π . Вот формула английского математика

Джона Валлиса:
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots$$

5. Удобнее для вычислений ряд, получаемый разложением

$$\arctg(x) \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right)$$

Наилучшую формулу для вычисления числа π получил Дж. Мэчан, пользуясь также разложением в ряды $\arctg(x)$. Он вычислил $\arctg(x)$ с точностью до 100 десятичных знаков.

6. Число $\arctg(x)$ встречается и в некоторых формулах неевклидовой геометрии, где оно, конечно, не является отношением длины окружности к её диаметру, а определяется число аналитически.

Трансцендентность числа π

По определению
трансцендентным называют число,
которое не является
корнем никакого
алгебраического уравнения
с рациональными
коэффициентами.

Вычисления значений числа ПИ

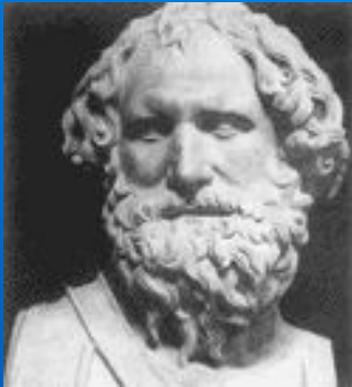
1. В Древнем Египте при вычислении площади круга для π использовали

значение $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16049$

2. Древнеримский архитектор Витрувий принимал $\pi = 3\frac{1}{8}$

3. Архимед нашёл более точное приближение для числа π .

Он показал, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{3}$ так что $\pi \approx 3\frac{1}{7}$



Числовой фокус китайского астронома Цю Шунь-Ши

Напишем по два раза три нечётных числа:

1, 1, 3, 3, 5, 5.

Три последних числа сделаем числителем, а три первых – знаменателем дроби .

$$\frac{355}{113}$$

Эта дробь позволяет вычислить π с точностью до седьмого знака.

Чтобы вычислить приближенно число π , в течение многих столетий поступали так:

в окружность с диаметром, равным единице, мысленно вписывали правильный многоугольник с большим числом сторон и вычисляли периметр этого многоугольника, привлекая «формулу удвоения». Периметр такого многоугольника и принимался равным числу π . Для оценки погрешности такого приближения приходилось рассматривать также периметры правильных описанных многоугольников

Проблема квадратуры круга

Можно ли, пользуясь

только циркулем и

линейкой, построить

квадрат, площадь

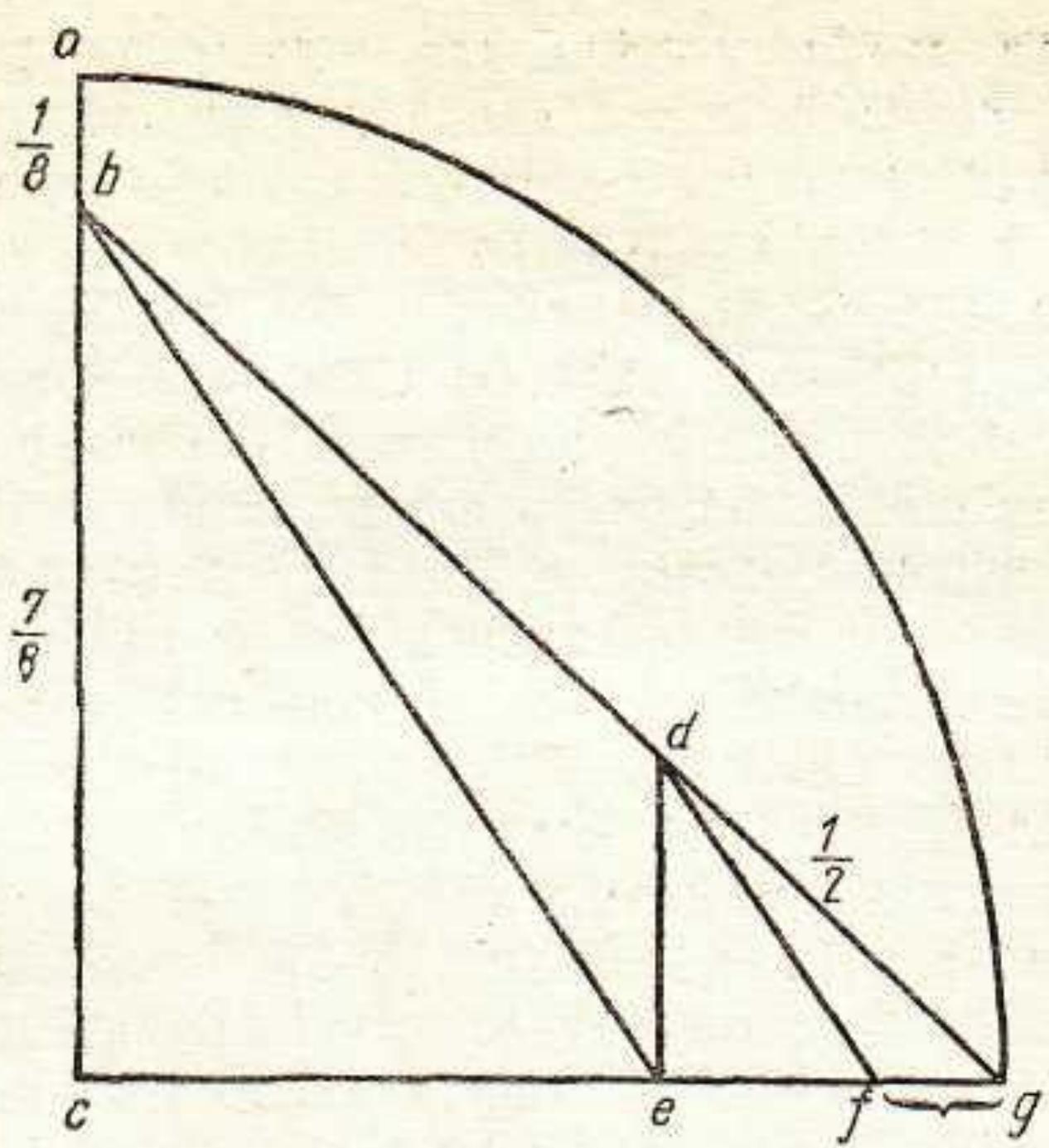
которого была бы в

точности равна

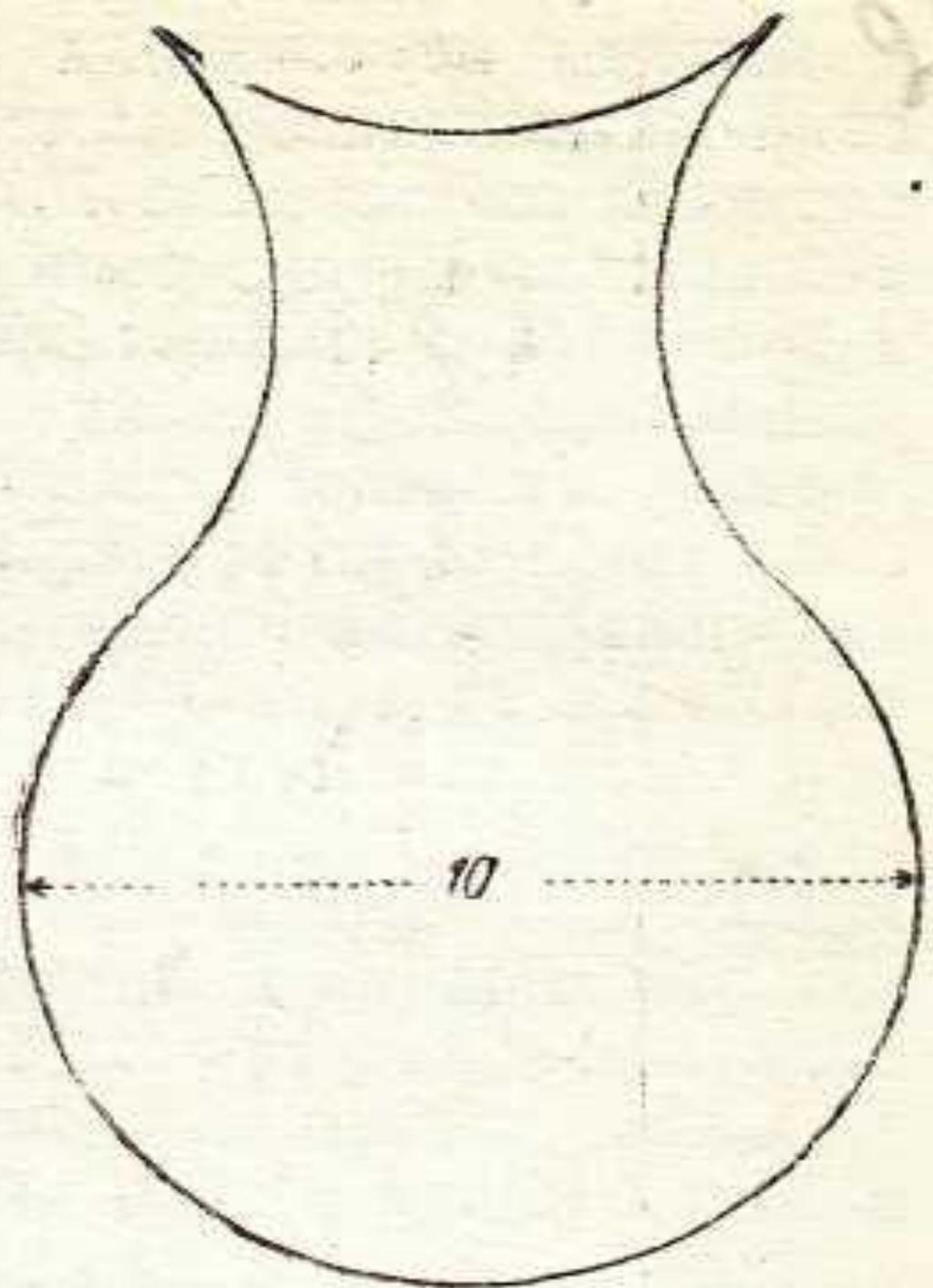
площади данного круга?

Проведём в четверти единичного круга несколько линий так, чтобы отрезок bc был равен $7/8$ радиуса, $dg - 1/2$, отрезок de был параллелен отрезку ac , а df — параллелен отрезку be . Тогда, как легко видеть, расстояние fg равно $\frac{16}{113}$ или $0,1415929\dots$

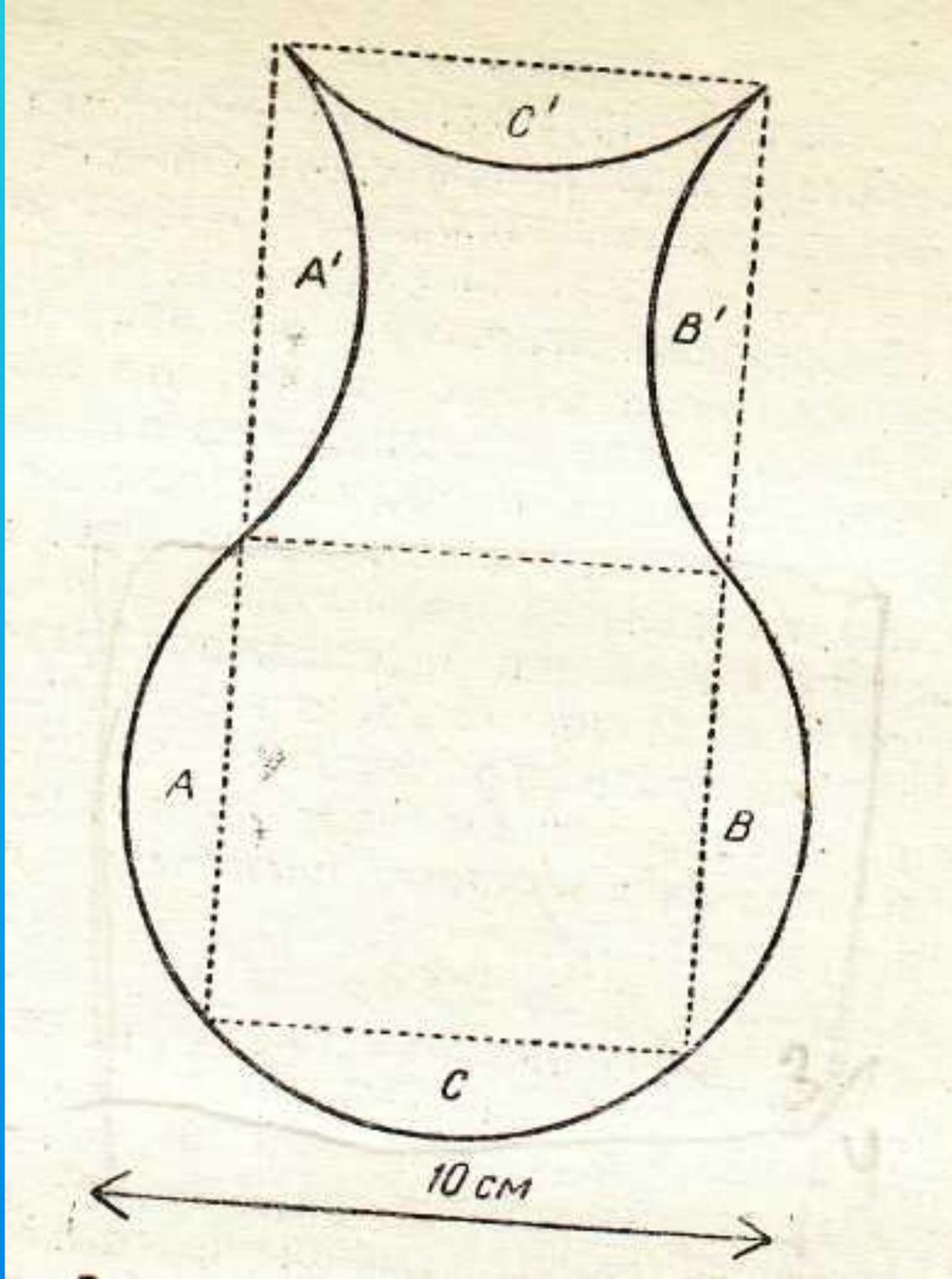
Поскольку π отложим отрезок втрое длиннее радиуса, продолжим его на расстояние fg и получим новый отрезок, длина которого отличается от π меньше чем на одну миллионную.



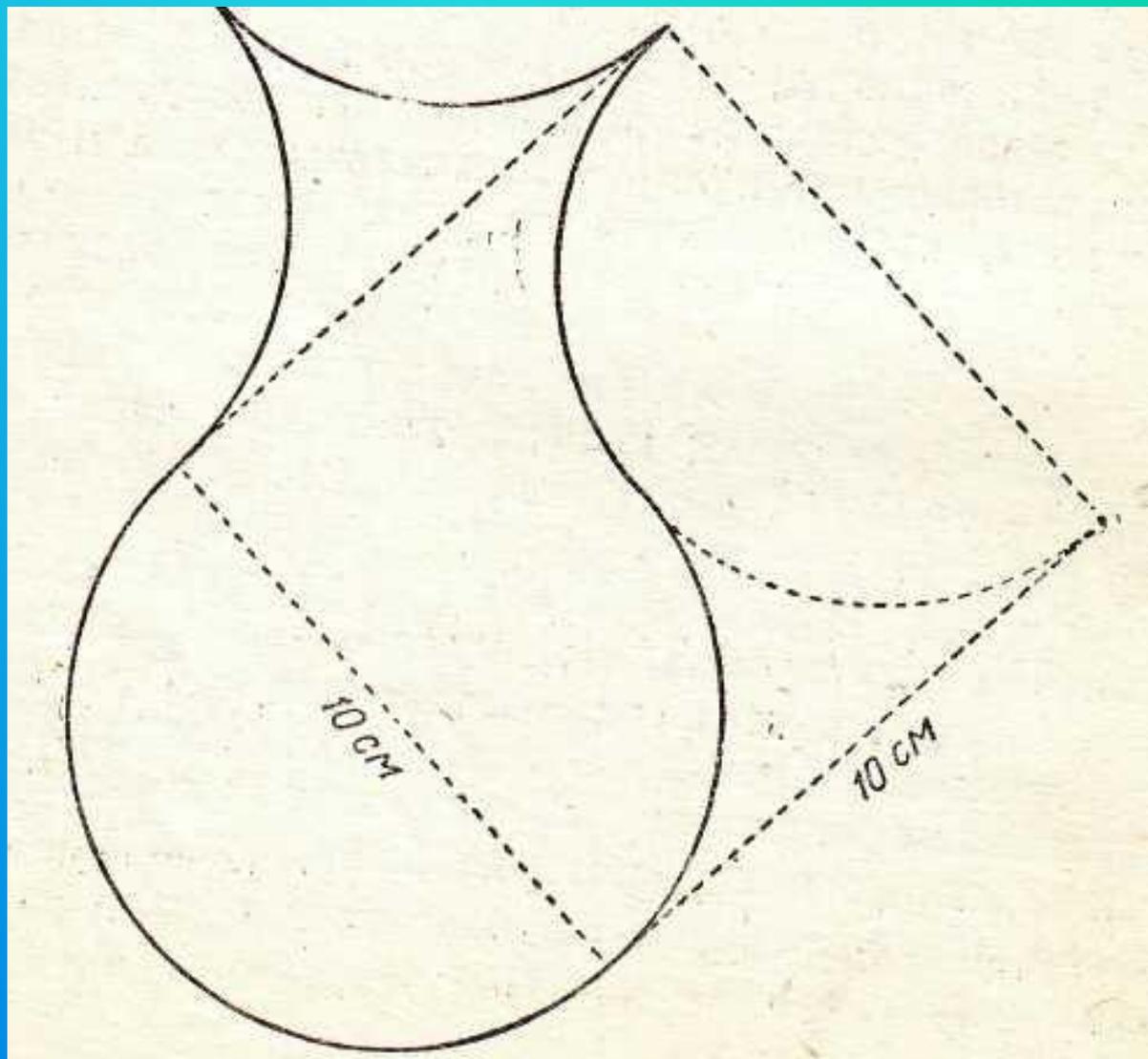
Контур нижней части этой вазы образован дугой в $\frac{3}{4}$ окружности диаметром 10 см. Верхняя половина ограничена тремя четвертушками той же окружности. Как быстро можно назвать с точностью до последнего десятичного знака длину стороны квадрата, имеющего площадь, равную площади этой фигуры?



Ответ: сторона квадрата также равна 10 см. Если пунктирные линии провести так, как показано на рисунке, то станет видно, что сегментами А, В, и С можно заполнить «лунки» А', В', и С', при этом образуются два квадрата общей площадью 100 см².

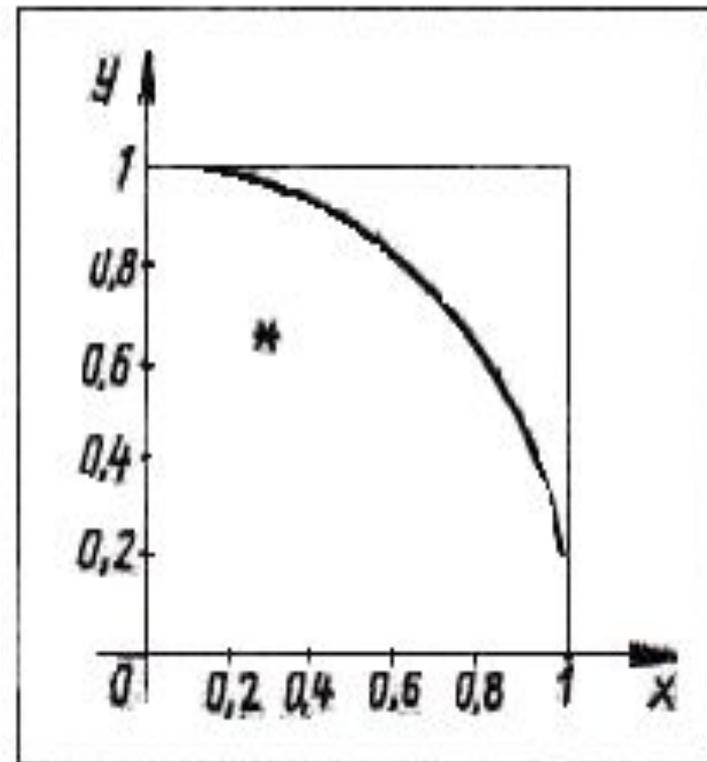


На рисунке
показано, как
разрезать вазу
всего лишь на
три части так,
чтобы из них
можно было
сложить
квадрат 10×10
см.



Метод Монте-Карло

```
PROGRAM METHOD1;
USES CRT;
VAR
X,Y,P: REAL;
I,NKV,NKR: INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
RANDOMIZE;
WRITELN(' ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN(' *** МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ***');
WRITELN;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО КАПЕЛЬ В КВАДРАТЕ?');
READLN(NKV);
WRITELN;
NKR:=0;
FOR I:=0 TO NKV DO
    BEGIN
        X:=RANDOM;
        Y:=RANDOM;
        IF X*X+Y*Y<=1 THEN NKR:=NKR+1;
        END;
P:=4*NKR/NKV;
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```

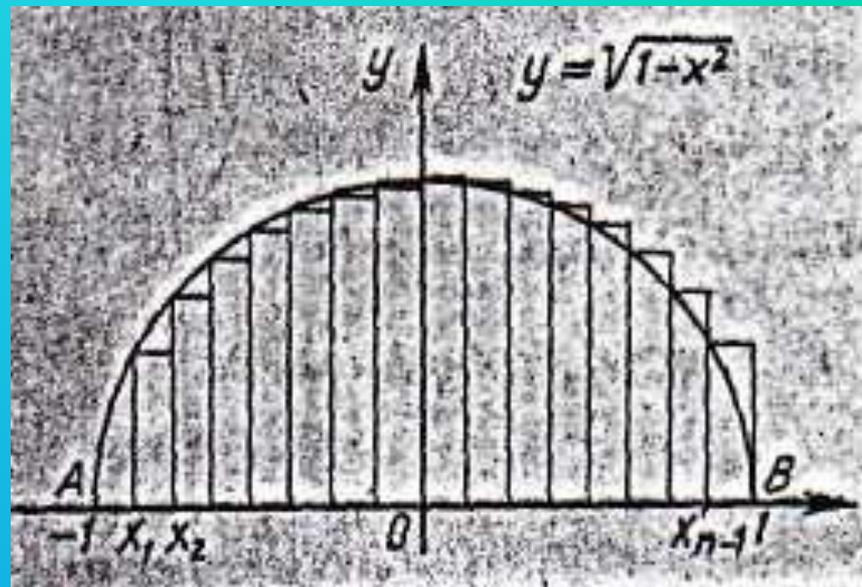


$$\pi \approx 4 \cdot \frac{N_{\text{круга}}}{N_{\text{квадрата}}} \approx 4 \cdot \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

Результат

Метод Прямоугольников

```
PROGRAM METHOD2;  
USES CRT;  
VAR  
F, DX, P, X, A: REAL;  
I, N: INTEGER;  
BEGIN  
CLRSCR;  
TEXTBACKGROUND(2);  
TEXTCOLOR(7);  
WRITELN('    ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');  
WRITELN;  
WRITELN('    *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');  
WRITELN;  
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА? ');  
READLN(N);  
WRITELN;  
DX:=1/N;  
FOR I:=0 TO N-1 DO  
    BEGIN  
        F:=SQRT(1-SQR(X));  
        X:=X+DX;  
        A:=A+F;  
    END;  
P:=4*DX*A;  
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);  
READLN;  
END.
```



Результат

Метод Тейлора

```
PROGRAM METHOD3;
USES CRT;
VAR
S, P, F: REAL;
I, N: INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
WRITELN(' ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN (' *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');
WRITELN;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЧЛЕНОВ РЯДА ТЕЙЛОРА? ');
READLN(N);
WRITELN;
S:=1;
FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
        F:=1/(2*I+1);
        IF I MOD 2=0 THEN F:=F ELSE F:=-F;
        S:=S+F;
        END;
P:=4*S;
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

Результат

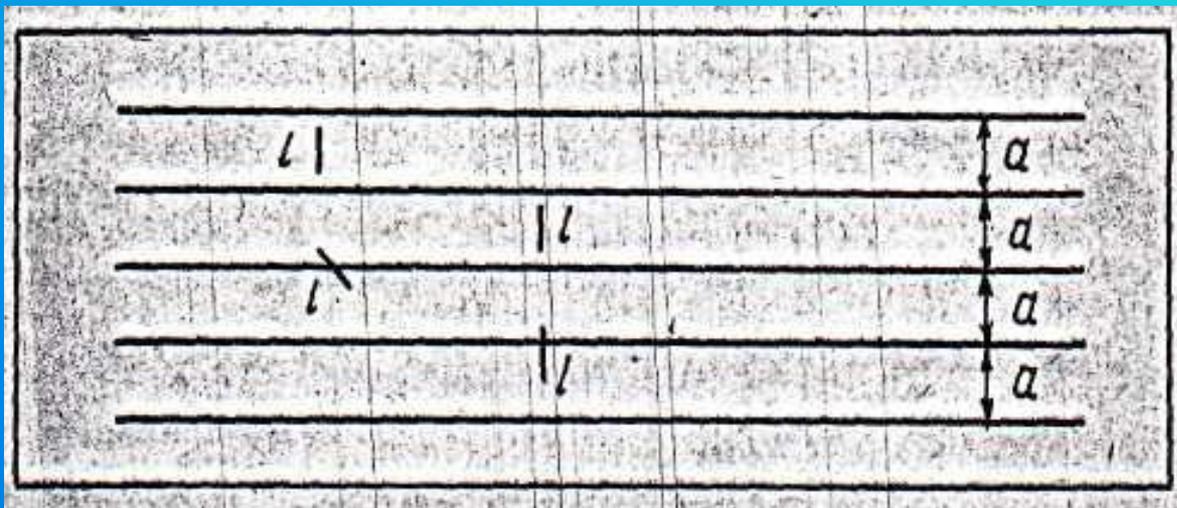
Свои данные исследования я занесла в следующую таблицу:

Значение N	10	25	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
Метод Тейлора	3,232316	3,103145	3,161199	3,151493	3,146568	3,143589	3,142592	3,142092	3,141793	3,141693
Метод Монте-Карло	3,200000	3,520000	3,360000	3,280000	3,340000	3,232000	3,100000	3,190000	3,139200	3,135600
Метод Прямоугольников	3,304518	3,212196	3,178269	3,160417	3,151177	3,145487	3,143555	3,142580	3,141989	3,141791

Вывод: во всех методах вычисления - чем больше значение N (либо – количество капель в квадрате, либо – количество членов ряда Тейлора, либо – количество точек деления отрезка), тем более точнее вычисляется приближённое значение числа π . Из всех трёх методов более точнее работает метод Тейлора

Метод "Падающей иголки"

Я взяла обыкновенную швейную иголку и лист бумаги. На листе провела несколько параллельных прямых так, чтобы расстояние между ними были равны и совпадали с длиной иголки. Чертёж должен быть достаточно большим, чтобы случайно брошенная игла не упала за его пределы.



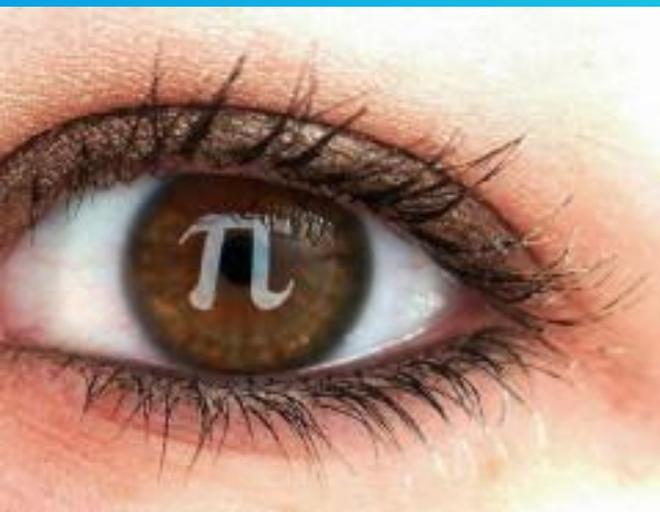
На этот лист я бросала сверху иглу и подсчитывала, сколько раз при данном числе бросаний игла пересечёт одну из параллелей (безразлично какую).

Свои результаты я занесла в таблицу:

№ опыта	Число бросания иглы (n)	Количество пересечений линий иглой (m)	Результат отношения $\frac{m}{n}$
1	20	15	0,75
2	30	22	0,733333
3	40	27	0,675
4	50	33	0,66
5	60	45	0,75
6	70	51	0,72857
7	80	53	0,6625
8	90	58	0,644444
9	100	67	0,67
10	120	77	0,641667

Вывод: оказалось, что при большем числе бросаний (n) $\frac{m}{n} \approx \frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi} \approx 0,63662$
дробь

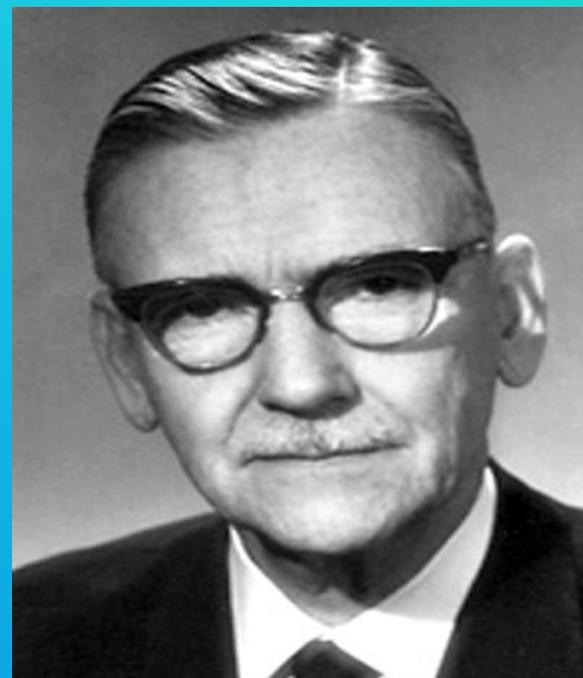
и это равенство будет тем точнее, чем больше будет число бросаний.



Число π - разумно

Идеальная дата рождения числа π

14 марта 1592 года (3,141592)

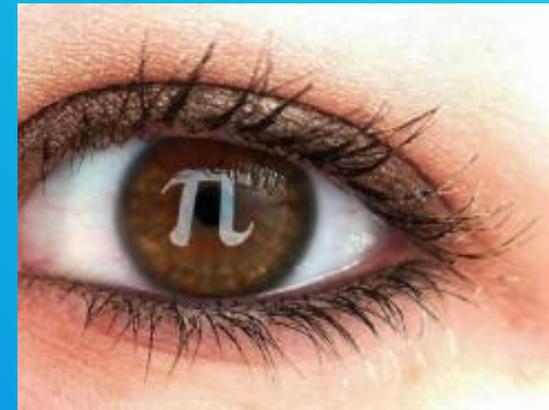


Альберт Эйнштейн

14 марта 1879 года

Вадим Косоогооров:

«Почему, зная о нежелании числа ПИ быть опознанным в качестве разумного, я не побоялся прийти сюда и вам всё это рассказать? Да потому, что для меня это и был единственный способ выжить. Теперь-то ПИ придётся или убить всех вас, или смириться с тем, что его тайна раскрыта. Будем надеяться, что Оно поступит разумно»



Спасибо за внимание!

