ГОУ ДПО СарИПКиПРО
региональный конкурс
«Математика в моей жизни - 2009»

"В мире квадратных уравнений"

Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 9 «А» класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Руководитель: Свириденко О.В.

2009 г

Оглавление

Введение

Введение

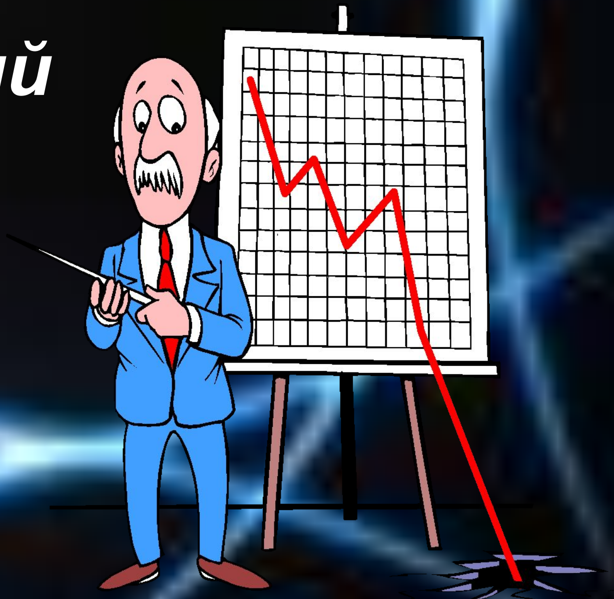
Математика — основа точных наук. На первый взгляд кажется, что она не имеет никакого отношения к природе, но на самом деле это не так. Без неё невозможно построить корабль и самолет, автомобили и метрополитены, даже строительство домов требует точности. Любовь к точным наукам развивает умение логически мыслить, анализировать, смотреть на вещи другими глазами и давать точное определение.

Я согласна с высказыванием английского физиолога Андру Филлинг Хаксли «Математика похожа на мельницу: если вы засыпете в нее зерна пшеницы, то получите муку, если же засыпете отруби, отруби и получите», поэтому я пытаюсь с большим старанием и желанием учить алгебру, геометрию и физику. Но больше всего я люблю решать квадратные уравнения. Знания в этой области мне даются легко.

Цель работы: рассмотреть неизвестные способы решения квадратных уравнений

Задачи:

- ✔ познакомиться с историей возникновения квадратных уравнений
- ✔ повторить теорему Виета и её доказательство
- ✔ узнать и понять незнакомые решения квадратных уравнений



«Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.»

Фуше А.

«Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же.»

Лодж О.

Заметки прошлого

Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они излагаются, например, в вавилонских рукописях времен царя Хаммурапи (XX в. до н. э.), в трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.), древних китайских и японских трактатах.

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ поступали следующим образом. Пусть $AB = x$, $BC = 5$ ($= 10 : 2$). На стороне $AC = AB + BC$ строился квадрат, который разбивался на четыре части, как показано на рисунке 92. Очевидно, что сумма площадей I, II и III частей равна $x^2 + 10x$, или 39.

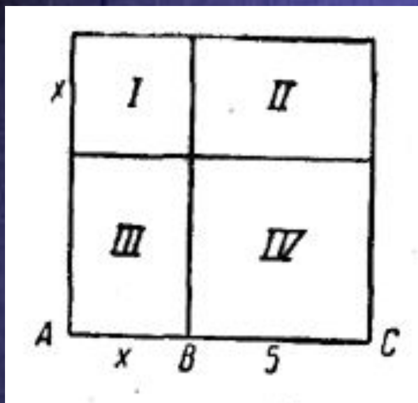


Рис. 92.

Если к этой площади прибавить площадь IV части, то в результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8,$$

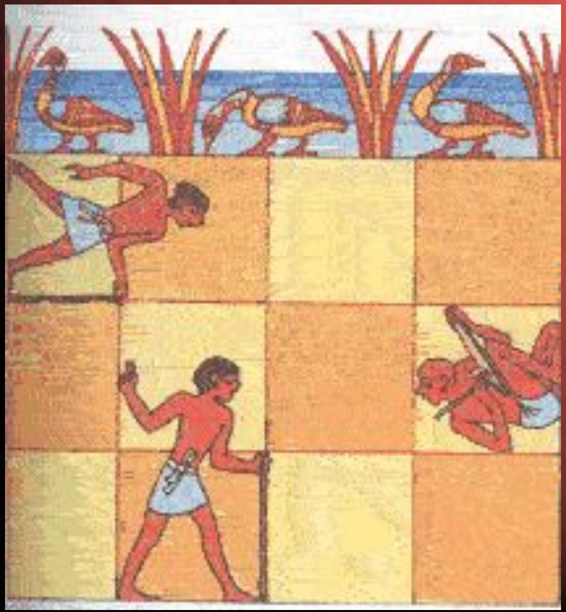
$$x = 3.$$

Древний Египет

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта.

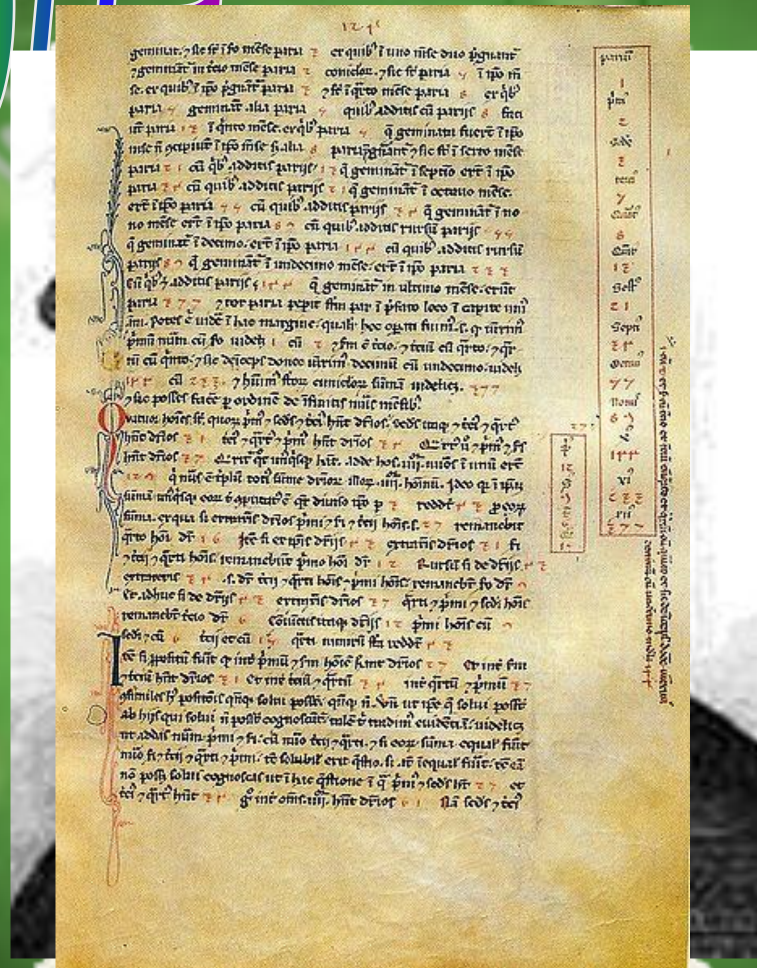
В одном из папирусов есть задача:
«Найти площадь прямоугольного поля, если площадь 12, а 3/4длины равны ширине.»

Пусть x - длина поля. Тогда 3x/4 - его ширина, $S=3x^2/4$ - площадь. Получилось квадратное уравнение
$3x^2/4=12$
В папирусе дано правило:" Разделить 12 на 3/4". 12:3/4=12 4/3=16. Итак, $x^2=16$. "Длина поля равна 4" - указано в папирусе.



Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два решения уравнения: -4 и 4.Но в египетской задаче и мы приняли бы x=4,т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

Европа



…ых уравнений по
…ед ал – Харезми -
…ематик, астроном
…сической алгебры)
…жены в "Книге
…ду итальянским
…оначчи(Пизанский
…первый крупный
…вропы. Автор
…о некоторые
…еры решения задач
…к введению

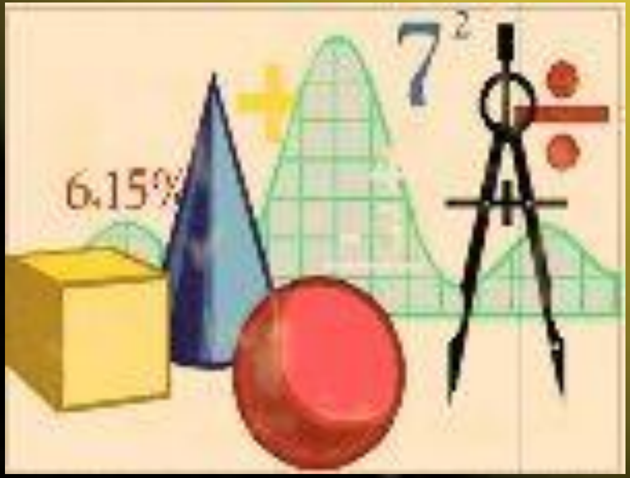
Леонардо Фибоначчи
абака

Европа

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду

$$x^2 + bx = c$$

при возможных комбинациях знаков коэффициентов b , c , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем (около 1487 — 19 апреля 1567) — немецкий математик .



Основные понятия

Квадратное уравнение- это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ где, a, b, c - действительные числа, причем a не равно 0. Если a = 1 , то квадратное уравнение называют **приведенным**; если a не равно 1, - то **неприведенным**. Числа a, b, c носят следующие названия a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.

Теорема Виета

Франсуа Виет.
Литография с гравюры XVI в.

«Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как коэффициентов, так и неизвестных величин не только в алгебре, но также и в тригонометрии».

Бернал Д.

Четыре года опалы оказались чрезвычайно плодотворными для Виета. Математика стала единственной страстью, он работал самозабвенно, мог просиживать за письменным столом по трое суток подряд, только иногда забываясь сном на несколько минут. Именно тогда он начал большой труд, который назвал "Искусство анализа или Новая алгебра". Завершить его не удалось, но главное определило развитие всей математики Нового времени.

Выражает связь между корнями и коэффициентами уравнения. Виет записал уравнения общими формулами, записанными с помощью коэффициентов, символика Виета ещё далека от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел, поэтому при решении уравнений рассматривал только положительные корни.

Теорема, выражающая связь коэффициентов квадратного уравнения и его корней, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 году так: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.

Доказательство теоремы Виета

Пусть x_1 и x_2 – различные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Теорема Виета утверждает, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = –p$$

$$x_1\, x_2 = q$$

Для доказательства подставим каждый из корней в выражение для квадратного трехчлена. Получим два верных числовых равенства:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0$$

Вычтем эти равенства друг из друга. Получим

$$x_1^2 – x_2^2 + p\,(x_1 – x_2) = 0$$

Разложим разность квадратов и одновременно перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$(x_1 – x_2)\,(x_1 + x_2) = –p\,(x_1 – x_2)$$

Так как по условию корни x_1 и x_2 различны, то $x_1 – x_2$ не равна 0 и мы можем сократить равенство на $x_1 – x_2$. Получим первое равенство теоремы:

$$x_1 + x_2 = –p$$

Для доказательства второго подставим в одно из написанных выше равенств (например, в первое) вместо коэффициента p, равное ему число $– (x_1 + x_2)$:

$$x_1^2 – (x_1 + x_2) x_1 + q = 0$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$x_1^2 – x_1^2 – x_2 x_1 + q = 0$$

$x_1 x_2 = q$, что и требовалось доказать.

Способы решения квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD, поэтому

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 -

циркуля и линейки (рис. 5)

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

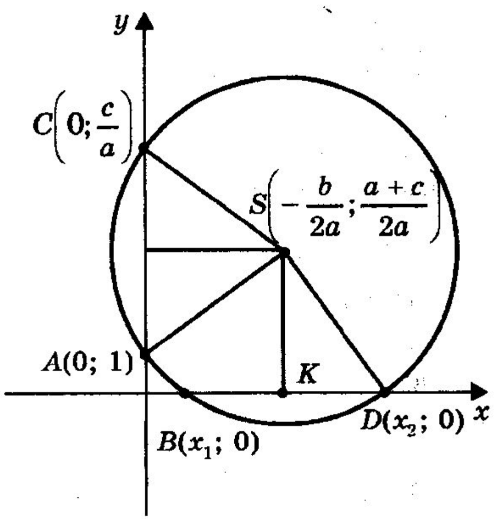


Рис. 5

Итак:

- 1) Построим точки $S\left(-\frac{b}{2a};\frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и A(0; 1);
- 2) проведем окружность с радиусом SA;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ох являются корнями исходного квадратного уравнения.

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра (AS > SK, или R > a + c/2a), окружность пересекает ось Ох в двух точках (рис. 6,а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра (AS = SB, или R = a + c/2a), окружность касается оси Ох (рис. 6,б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 – корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB,\text{ или } R < \frac{a+c}{2a}\right)$

окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

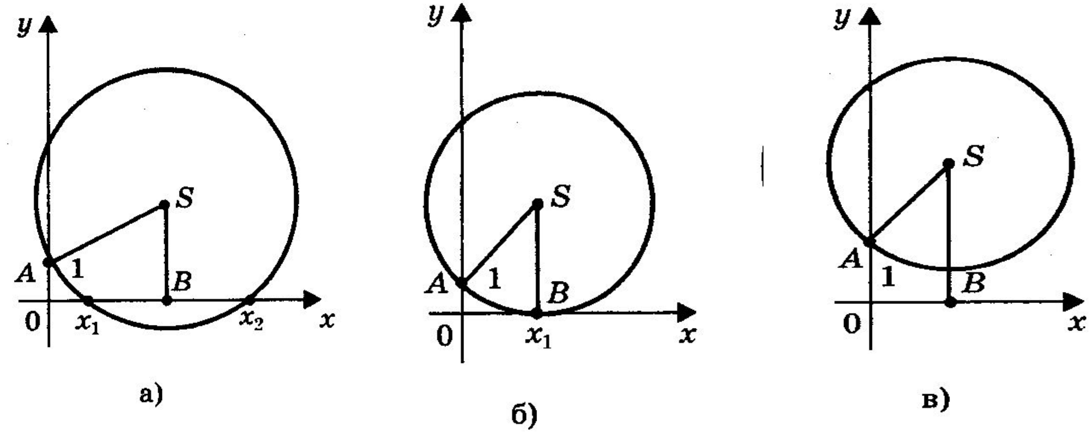


Рис. 6

а) $AS > SB$, $R > \frac{a+c}{2a}$. Два решения x_1 и x_2.

б) $AS = SB$, $R = \frac{a+c}{2a}$. Одно решение x_1.

в) $AS < SB$, $R < \frac{a+c}{2a}$. Нет решения.

- **Пример:**

Решим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ (рис. 7).

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2\cdot 1} = -1.$$

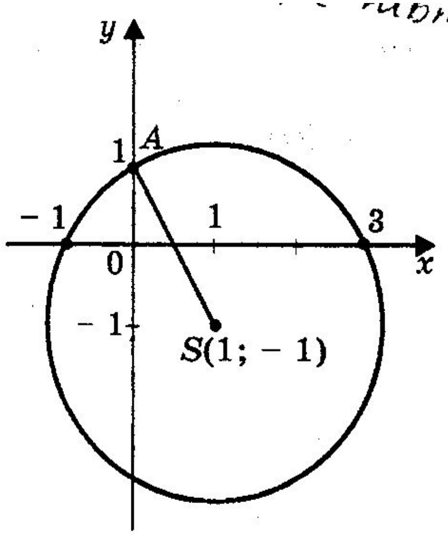


Рис. 7

Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1).

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

$z^2 + pz + q = 0.$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$

Из подобия треугольников CAH и CDF

получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$

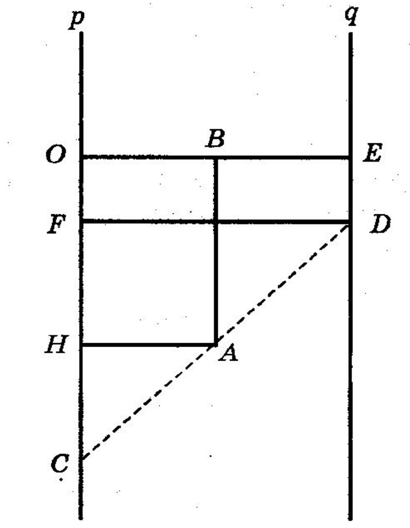


Рис. 11

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$$2z^2 - 9z + 2 = 0.$$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$$z^2 - 4,5z + 1 = 0.$$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

3) Для уравнения

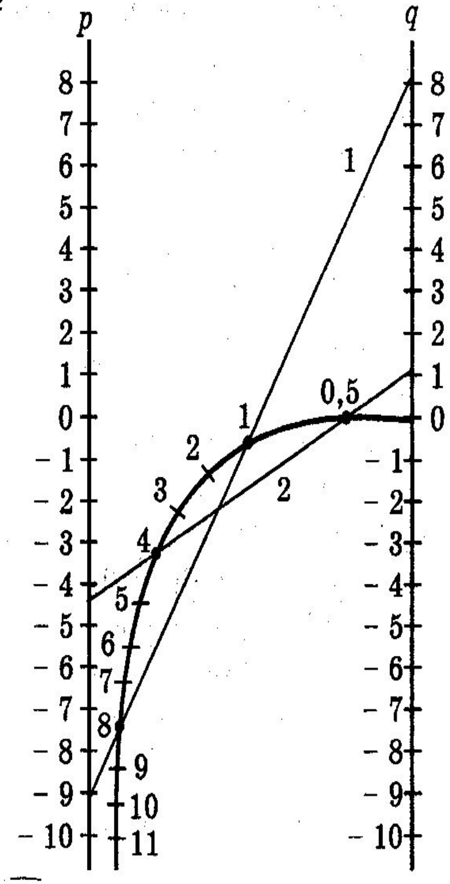
$$z^2 - 25z + 66 = 0$$

коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение

$$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и $t_2 = 4,4$, откуда

$$z_1 = 5t_1 = 3,0 \text{ и } z_2 = 5t_2 = 22,0.$$



Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Площадь S квадрата ABCD можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников ($4 \cdot 2{,}5x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов ($6{,}25 \cdot 4 = 25$), т.е. $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим, что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата ABCD, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

Примеры.

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна $2{,}5x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого их них 2,5, а площадь 6,25.

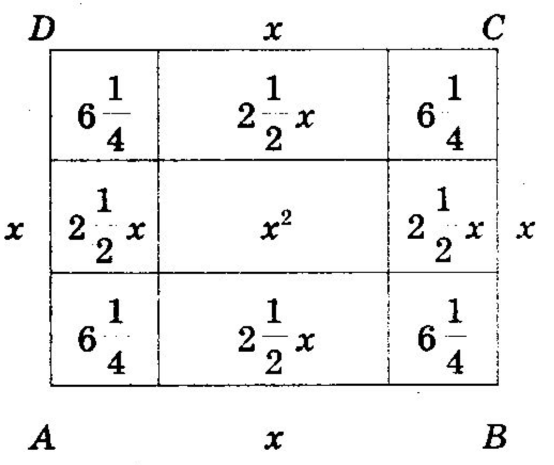


Рис. 15

2.Решить геометрически уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0.$

Преобразуя уравнение, получаем

$y^2 - 6y = 16.$

На рис. 17 находим «изображения» выражения $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению $y^2 - 6y$ прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной $y - 3$. Заменяя выражение $y^2 - 6y$ равным ему числом 16, получаем: $(y - 3)^2 = 16 + 9$, т.е.

$y - 3 = \pm\sqrt{25}$, или $y - 3 = \pm 5$, где

$y_1 = 8$ и $y_2 = -2.$

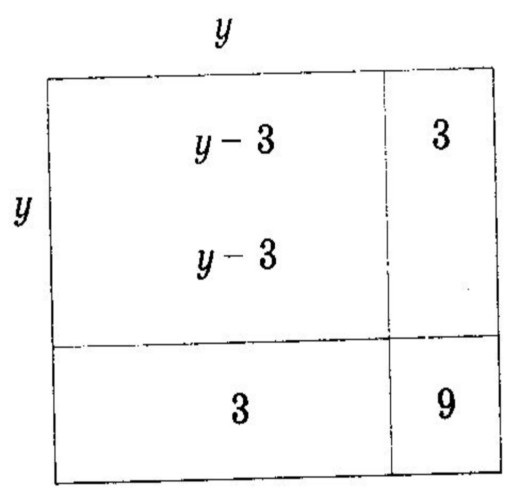


Рис. 17

Вывод

В ходе работы я познакомилась с историей возникновения квадратных уравнений, повторила теорему Виета и её доказательство.

Узнала интересные способы решения квадратных уравнений.

Я уверена, что математические знания, в частности по данной теме, помогут мне при поступлении в ВУз.

Литература:

1.Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия

2.Википедия

3.Справочник математических формул