Лекция № 12
Быстрое преобразование Фурье

Нахождение спектральных составляющих дискретного комплексного сигнала непосредственно по формуле ДПФ требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. Так как количество вычислений, а следовательно, и время вычислений приблизительно пропорциональны N^2, то при больших N количество арифметических операций весьма велико. Поэтому нахождение спектра в реальном времени даже для современной вычислительной техники представляет сложную задачу.

По этой причине представляет значительный интерес вычислительные процедуры, уменьшающие количество умножений и сложений.

Быстрое преобразование Фурье

- Основной принцип всех этих алгоритмов заключается в разложении операций вычисления ДПФ сигнала длины на вычисление преобразований Фурье с меньшим числом точек. Разделив анализируемый набор отсчетов на части, вычисляют их ДПФ и объединяют результаты. Такие процедуры получили название алгоритмов *быстрого преобразования Фурье БПФ*.
- При реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычислений в зависимости от способа деления последовательности отсчетов на части (*прореживание по времени или по частоте*) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге (*основание БПФ*).

Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим алгоритмы БПФ с основанием 2, когда длина последовательности $N = 2^{\nu}$, где ν – целое число.

- **<u>БПФ с прореживанием по времени.</u>** Рассмотрим идею БПФ с прореживанием по времени на примере деления набора отсчетов пополам. Введя общепринятое в литературе обозначение для дискретных экспоненциальных функций:

$$e_N(k,n) = e^{-j(2\pi/N)kn} = w_N^{nk}$$

Запишем ДПФ сигнала $x(n)$ в виде:

$$c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk}$$

Быстрое преобразование Фурье

- Разобьем $x(n)$ на две $N/2$-точечные последовательности, состоящие из отсчетов с четными и нечетными номерами соответственно. В результате получим:

$$c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n_ч}^{N/2-1} x(n) w_N^{nk} + \frac{1}{N}\sum_{n_{нч}}^{N/2-1} x(n) w_N^{nk}$$

- Заменяя индексы суммирования на $n = 2p$ при четном n и на $n = (2p+1)$ при нечетном n, придем к выражению:

$$c(k) = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) w_N^{2pk} + \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) w_N^{(2p+1)k} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p)(w_N^2)^{pk} + \frac{1}{N} w_N^k \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1)(w_N^2)^{pk}$$

Быстрое преобразование Фурье

- Так как $w_N^2 = w_{N/2}$, то предыдущее выражение можно записать в виде:

$$c(k) = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p)w_{N/2}^{pk} + \frac{1}{N}w_N^k \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1)w_{N/2}^{pk} =$$

$$\frac{1}{2}G(k) + \frac{1}{2}w_N^k H(k). \qquad (12.1)$$

- Каждая из сумм (12.1) является $N/2$–точечным ДПФ: первая – для четных отсчетов исходной последовательности, а вторая – для нечетных. Несмотря на то, что индекс k в формуле (12.1) распространяется на N значений $k = 0,1,\ldots,(N-1)$, каждая из сумм требует вычислений только для $k = 0,1,\ldots,(N/2-1)$, так как $G(k)$ и $H(k)$ периодичны по k с периодом $N/2$. Объединение же этих сумм приводит к N–точечному ДПФ $c(k)$.

Быстрое преобразование Фурье

Схема БПФ

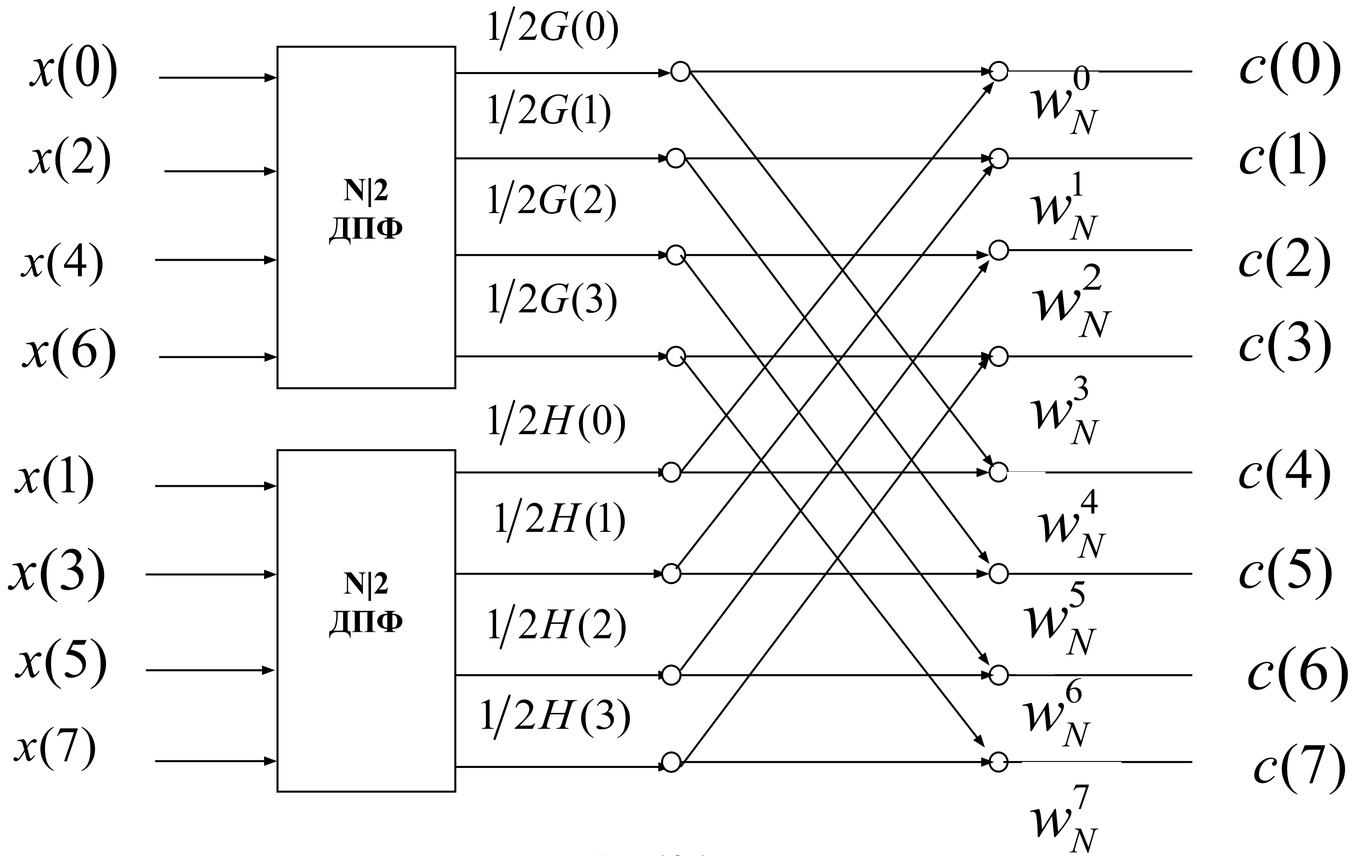

Рис.12.1

Быстрое преобразование Фурье

- Далее можно вычислить каждое $N/2-$точечное ДПФ разбиением сумм на два $N/4-$точечных ДПФ. Таким образом, $G(k)$ и $H(k)$ могут быть вычислены в виде:

$$G(k)=\frac{2}{N}\sum_{p=0}^{N/2-1} g(p)w_{N/2}^{pk}=\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l)w_{N/2}^{2lk}+\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1)w_{N/2}^{(2l+1)k}=$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l)w_{N/4}^{lk}+\frac{2}{N}w_{N/2}^{k}\sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1)w_{N/4}^{lk}\ ;$$

$$H(k)=\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l)w_{N/4}^{lk}+\frac{2}{N}w_{N/2}^{k}\sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l+1)w_{N/4}^{lk}\ .$$

Быстрое преобразование Фурье

- Продолжим описанную процедуру разбиения исходной ДПФ на преобразования меньшей размерности, пока не останутся только двухточечные преобразования. Двухточечные ДПФ (их число равно $N/2$) могут быть вообще вычислены без использования операций умножения. Действительно, для двухточечной последовательности $f(n),\ n=1,2;$ согласно определению ДПФ имеем два спектральных отсчета:

$$s(0)=1/2\left[f(0)w_2^0+f(1)w_2^0\right]=f(0)+f(1)$$

$$s(1)=1/2\left[f(0)w_2^0+f(1)w_2^1\right]=f(0)-f(1)$$

Быстрое преобразование Фурье

- Число требуемых при этом пар операций «умножение – сложение» можно оценить как $N\log_2 N$ Таким образом, вычислительные затраты по сравнению с непосредственным использованием формулы ДПФ уменьшается в $N/\log_2 N$ раз. При больших N это отношение становится весьма велико. Например, при $N = 1024$ достигается более чем 100-кратное ускорение, но и это еще не предел. Количество комплексных умножений в алгоритме БПФ с прореживанием по времени может быть сокращено вдвое.

Быстрое преобразование Фурье

- Из рассмотренного алгоритма следует, что на каждой ступени вычислений происходит преобразование одного множества из N комплексных чисел в другое множество из N комплексных чисел.
- Будем считать $x_m(l)$ входным массивом на m-й ступени вычисления , а $x_{m+1}(l)$ – выходным массивом на $(m+1)$ ступени вычислений.

С учетом введенных обозначений имеем:

$$x_{m+1}(p) = \frac{1}{2}\left[x_m(p) + w_N^r x_m(q)\right];$$

$$x_{m+1}(q) = \frac{1}{2}\left[x_m(p) + w_N^{r+N/2} x_m(q)\right].$$

Быстрое преобразование Фурье

- Вышеприведенные соотношения подсказывают метод сокращения числа комплексных умножений вдвое. Так как $w_N^{N/2} = -1$, эти соотношения можно записать в виде:

$$x_{m+1}(p) = \frac{1}{2}\left[x_m(p) + w_N^r x_m(q)\right];$$

$$x_{m+1}(q) = \frac{1}{2}\left[x_m(p) - w_N^r x_m(q)\right].$$

- Так как на каждую ступень разбиения имеется $N/2$ таких операций, а общее число ступеней равно $\log_2 N$, то общее число пар операций «умножение-сложение» сокращается до $\frac{N}{2}\log_2 N$.