

Диофант и его уравнения

Автор: Потапова Софья
10 класс, МОУ гимназия № 63
Научный руководитель:
Багина Татьяна Александровна,
учитель математики высшей
категории

Цель:

- научиться решать диофантовы уравнения и задачи, сводящиеся к ним

Гипотеза:

- умение решать диофантовы уравнения полезно не только при подготовке к математическим олимпиадам, они также могут описывать и бытовые ситуации, встречающиеся на нашем жизненном пути.

Задачи:

- познакомиться с теоретическим блоком, связанным с Диофантом и его уравнениями;
- классифицировать диофантовы уравнения;
- научиться решать уравнения в целых числах несколькими способами и классифицировать методы;
- сделать выводы;
- создать приложение, в которое будет входить подборка разных задач;

Методы:

- Анализ
- Классификация
- Наблюдение
- Обобщение

Объект

- Диофантовы уравнения

- Практическая значимость моей работы заключается в использовании ее на углубленных занятиях по математике, при подготовке к математическим олимпиадам и к ЕГЭ.

Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Пусть Диофант прожил x лет. Составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Умножим уравнение на 84, чтобы избавиться от дробей:

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x,$$

$$-9x = -756,$$

$$x = 84.$$

Таким образом, Диофант прожил 84 года.

Неопределенные уравнения I – ой степени и их решения

1) $ax + by = c$

2) $ax + by + cz = d$

$$ax + by = c$$

- 1) *Метод перебора*
- 2) *Метод «спуска»*

Рассмотрим уравнение:

$$4,5x + 6y = 57.$$

Нужно найти все натуральные значения переменных x и y .

Решение

Помножим обе части уравнения на 2, чтобы избавиться от дробных чисел, получим:

$$9x + 12y = 114.$$

Выразим y через x :

$$y = \frac{144 - 9x}{12}$$

Ответ:

x	2	10
y	8	2

Даны два автомобиля Урал 5557, автомобили отправили в рейс Мыс Каменный – Лабытнанги - Мыс Каменный.

Всего понадобилось 4 т дизельного топлива и 2 водителя, чтобы выполнить этот рейс. Нужно определить транспортные затраты, а именно стоимость 1 т дизельного топлива и оплату труда водителей, выполняющих этот рейс, если известно, что всего затрачено 76000 р.

Решение

Пусть x – стоимость 1 т дизельного топлива, а
 y – оплата труда водителей.

Тогда $4x + 2y$ – затрачено на выполнение рейса.

А по условию задачи затрачено 76000 р.

Получим уравнение:

$$2x + 4y = 76000$$

Выразим переменную y через x :

$$y = \frac{76000 - 2x}{4}$$

Выделив целую часть, получим:

$$y = 19000 - \frac{2x}{4} \quad (1).$$

Чтобы значение дроби $\frac{2x}{4}$

было целым числом, нужно, $2x$ было кратно 4.

Т.е. $2x = 4z$, где z - целое число. Отсюда:

$$x = \frac{4z}{2} = 2z.$$

Значение x подставим в выражение (1):

$$y = 19000 - \frac{2x}{4} = 19000 - z$$

Итак:

$$x = 2z,$$

$$y = 19000 - z.$$

Т.к. $x, y \geq 0$, то $19000 \geq z \geq 0$, следовательно, придавая z целые значения от 0 до 19000, получим следующие значения x и y :

z	0	1	2	...	18999	19000
x	0	2	4	...	37998	38000
y	19000	18999	18998	...	1	0

Если $x = 18000$, $y = 10000$, то $z = 9000$,

проверим:

$$18000 = 2 \cdot 9000$$

$$10000 = 19000 - 9000$$

$$ax + by + cz = d$$

1.) При трех коэффициентах a , b и c может возникнуть, по крайней мере, два взаимнопростых коэффициента.

Например: $12x + 11y + 15z = 141.$

В данном примере коэффициенты a и b взаимнопросты.

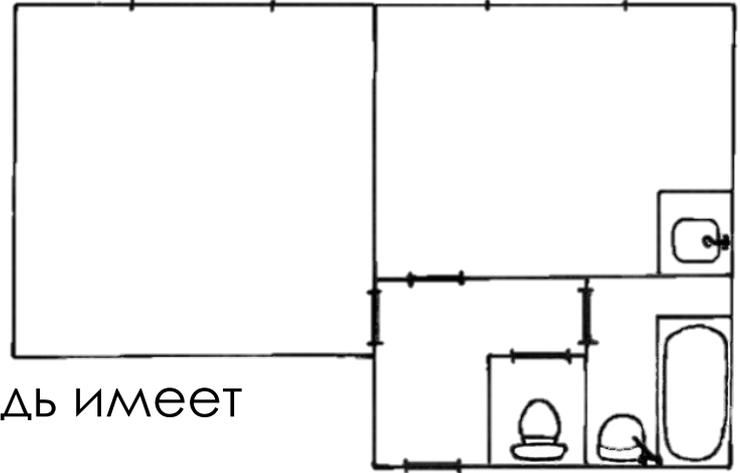
2.) Каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимнопросты. Например:

$$12x + 15y + 20z = 181.$$

Здесь коэффициенты a и b имеют общий множитель 3, b и c – множитель 5, a и c – 4 и все три коэффициента взаимнопросты.

Задача:

Дана однокомнатная квартира.
Стоимость содержания жилья
на 1 м^2 составляет 8 р.
Стоимость теплоэнергии
на 1 м^2 равна 33 р.
Стоимость 1 м^3 воды
на человека – 16 р. Какую площадь имеет
квартира.



Какая площадь отапливается в
этой квартире.
Норматив потребления воды на человека в
течение месяца.
Если известно, что
в квартплате за месяц всего
начислено 1416 р.

Решение:

Обозначим переменными:

x - количество кв. м в квартире,

y – количество кв. м в квартире, которым отведена теплоэнергия, а

z – количество воды (м^3), потребляемое на человека.

Тогда $8x + 33y + 16z$ - всего начислено в квартплате за месяц.

А по условию задачи, всего начислено 1416 р.

Получим уравнение:

$$8x + 33y + 16z = 1416$$

Выразим x :

$$x = \frac{1416 - 33y - 16z}{8}$$

Выделив целую часть уравнения, получим:

$$x = 177 - 4y - 2z - \frac{y}{8}$$

Пусть выражение $\frac{y}{8}$

будет целым, чтобы коэффициент x тоже был целым.

Заменяем это выражение на t :

$$x = 177 - 4y - 2z - t.$$

Если $t = \frac{y}{8}$, то $y = 8t$.

Теперь подставим значение y в уравнение

$$X = 177 - 4y - 2z - t:$$

$$x = 177 - 4(8t) - 2z - t = 177 - 32t - 2z - t = 177 - 33t - 2z$$

Значит

$$x = 177 - 33t - 2z,$$

$$y = 8t.$$

Придавая z и t произвольные целые значения,
получим решение исходного уравнения:

t	1	2
z	4	5
x	136	101
y	8	16

Заключение:

В ходе данного исследования я овладела новыми математическими навыками, научилась решать диофантовы уравнения разными методами. На примерах показала, что умение решать диофантовы уравнения полезно не только при подготовке к математическим олимпиадам, они также могут описывать и бытовые ситуации, встречающиеся на нашем жизненном пути.