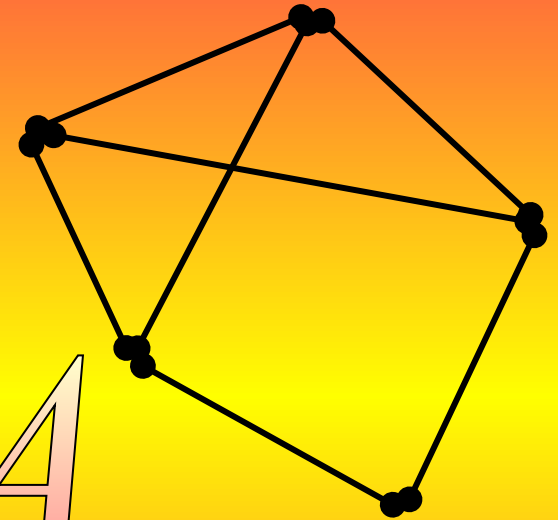
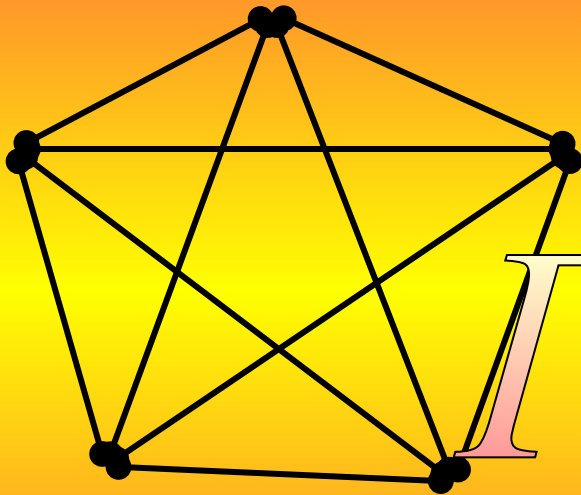
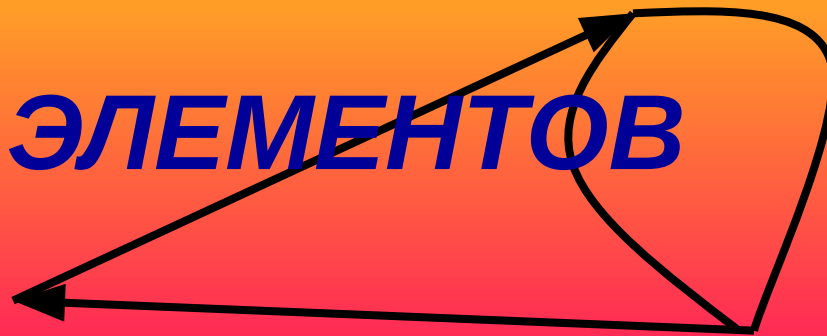


# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



ГРАФ

И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

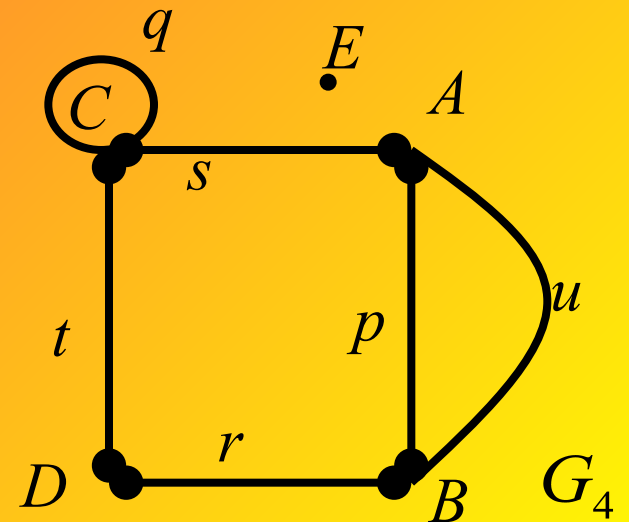
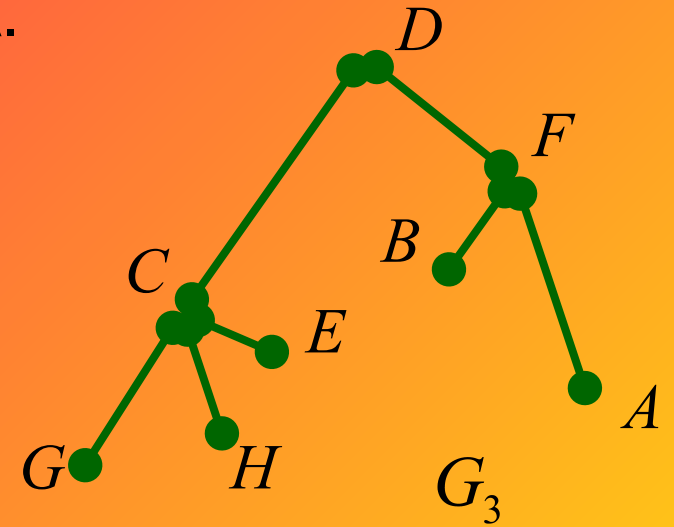
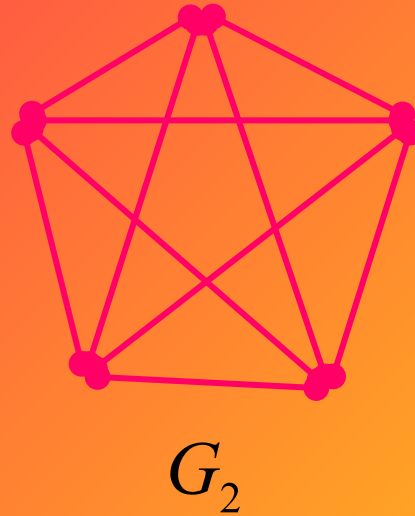
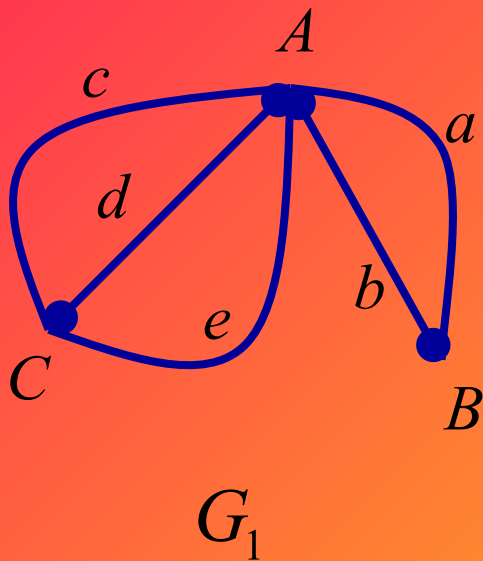


**ГРАФОМ**  $G = (V, X)$  НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

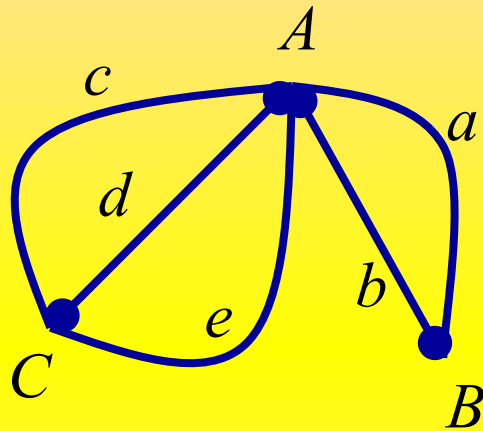
ВПЕРВЫЕ ПОНЯТИЕ «ГРАФ» ВВЕЛ В 1936 г. ВЕНГЕРСКИЙ МАТЕМАТИК ДЕННИ КЁНИГ. НО ПЕРВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИНАДЛЕЖАЛА ПЕРУ ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И БЫЛА НАПИСАНА ЕЩЕ В 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

## ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



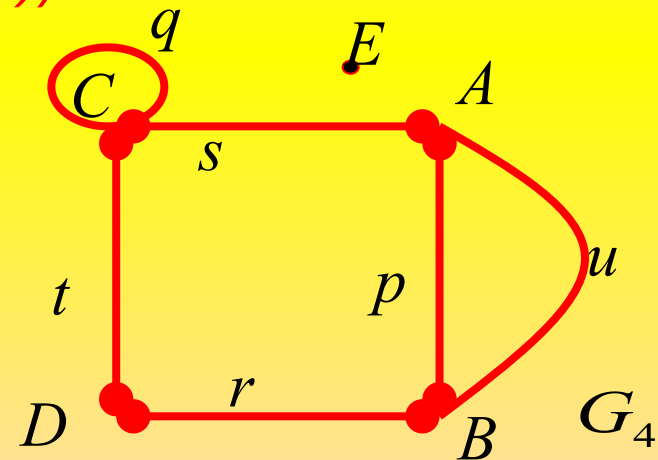
ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ **ИНЦИДЕНТНО**. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.



$G_1$

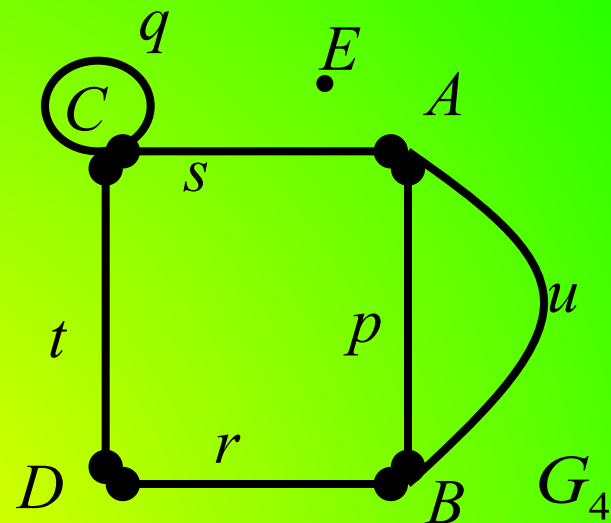
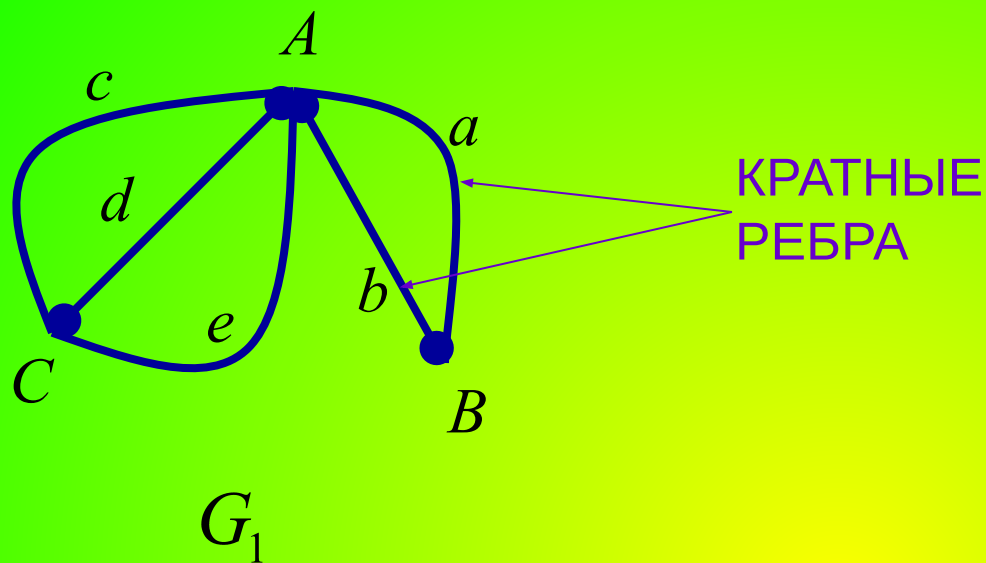
НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ А и В, А и С ; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА  $c$  и  $d$ ,  $a$  и  $b$ .

ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ**(у графа  $G_4$  петля –  $q(C,C)$ ).



$G_4$

ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ  $A$ , НАЗЫВАЕТСЯ **СТЕПЕНЬЮ** ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ  $deg(A)$ .

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

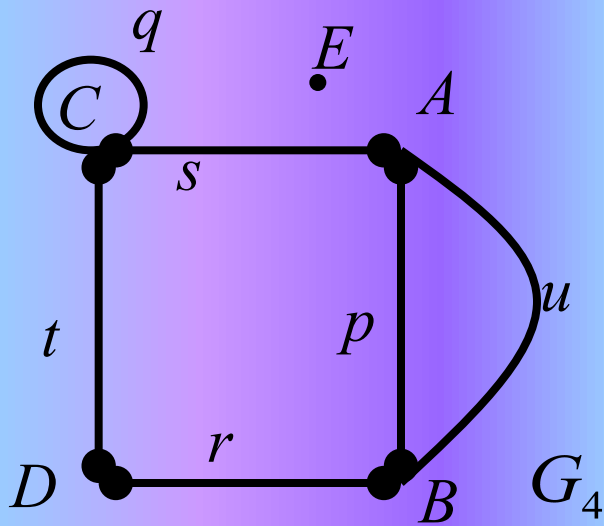
$$deg(A) = 3;$$

$$deg(B) = 3;$$

$$deg(C) = 4;$$

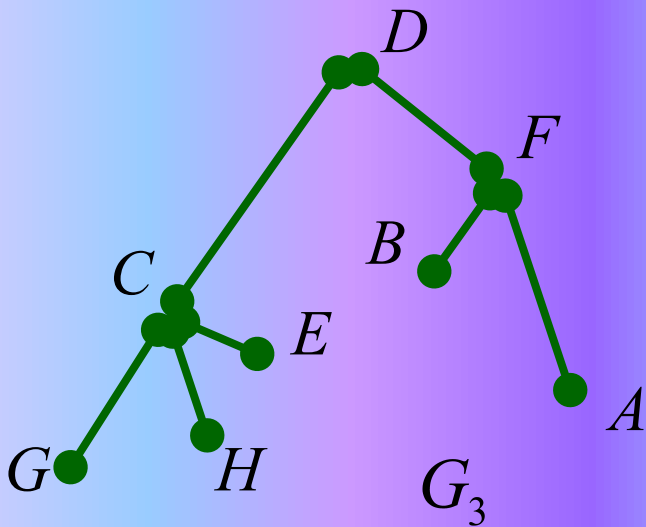
$$deg(D) = 2;$$

$$deg(E) = 0.$$



$deg(E) = 0$  

$E$  –  
ИЗОЛИРОВАННАЯ  
ВЕРШИНА



$deg(G) = 1$   
 $deg(H) = 1$   
 $deg(E) = 1$   
 $deg(B) = 1$   
 $deg(A) = 1$

$G, H, E, B, A$   
- ВИСЯЧИЕ  
ВЕРШИНЫ

# ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ  $G(V, X)$  СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ), ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

# ТЕОРЕМА

ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

# СЛЕДСТВИЕ

НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ  
**ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ  
ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО  
РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ  
СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И  
ТОЛЬКО ОДНИМ  
РЕБРОМ.

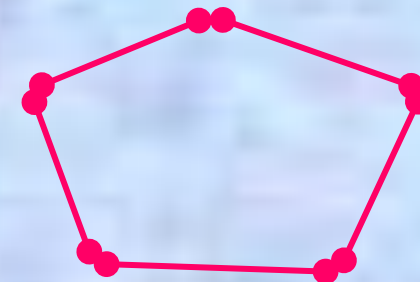


$G_2$

**ДОПОЛНЕНИЕМ** ГРАФА  
НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ  
ЖЕ ВЕРШИНАМИ И  
ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ  
РЕБРА, КОТОРЫЕ  
НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К  
ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ  
ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



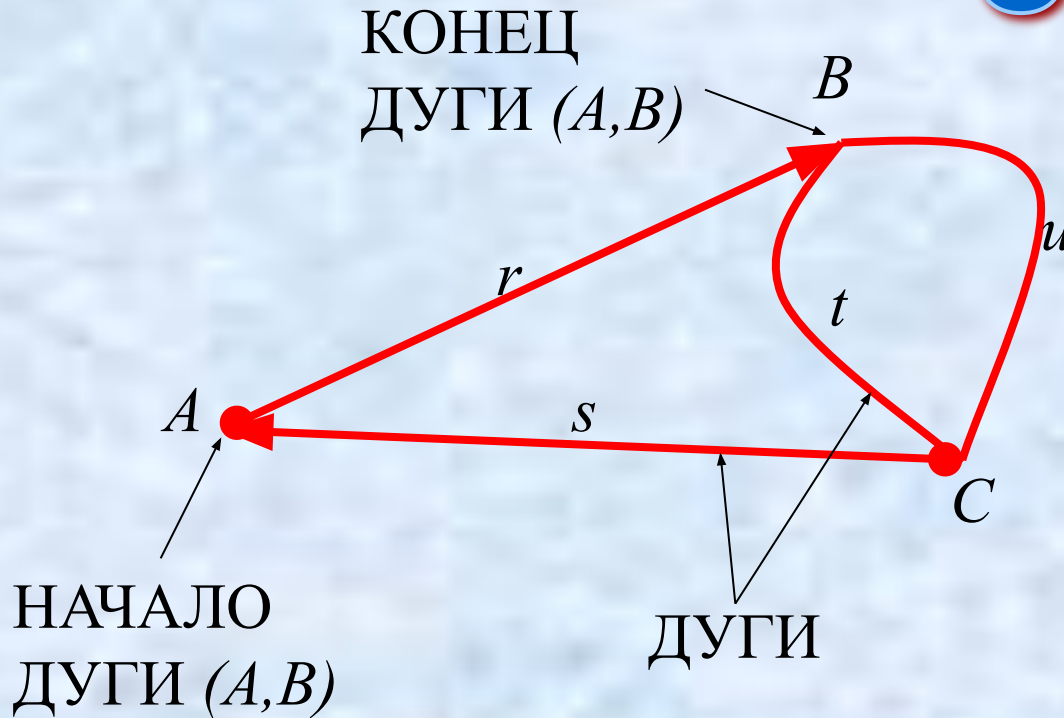
$G_5$



ДОПОЛНЕНИЕ  
ГРАФА  $G_5$  ДО  
ГРАФА  $G_2$



# ОРГРАФ



СТЕПЕНИ ВХОДА  
ВЕРШИН ГРАФА  
(см. рис.):

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА  
ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

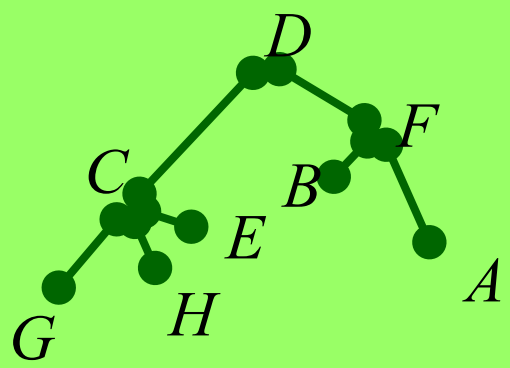
**СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА)**  
ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ  
ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА  
ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ  
(НАЧАЛОМ).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ ВТОРАЯ ВЕРШИНА ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С ПЕРВОЙ ВЕРШИНОЙ СЛЕДУЮЩЕГО, НАЗЫВАЕТСЯ **МАРШРУТОМ**.

ЧИСЛО РЕБЕР МАРШРУТА НАЗЫВАЕТСЯ **ДЛИНОЙ** МАРШРУТА.

ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ ВЕРШИНА МАРШРУТА СОВПАДАЕТ С КОНЕЧНОЙ, ТО ТАКОЙ МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЗАМКНУТЫМ** ИЛИ **ЦИКЛОМ**.

ЕСЛИ РЕБРО ВСТРЕТИЛОСЬ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ, ТО МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЦЕПЬЮ**.

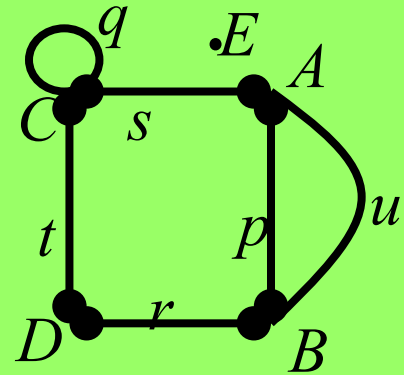


**HCDFD** – МАРШРУТ ДЛИНОЙ 4.

$(t, s, p, r)$  – 4-цикл

$(t, s, u, r, t, s, p, r)$  – 8-цикл

петля  $(q)$  – 1-цикл



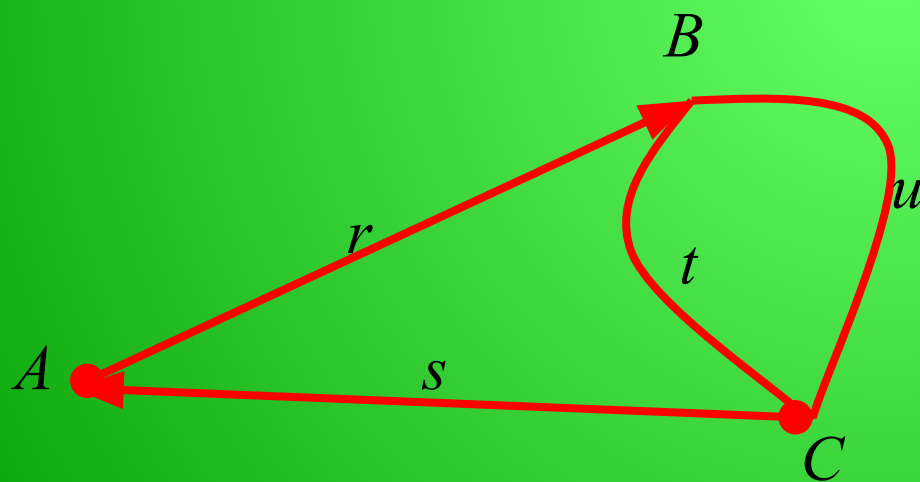
$(t, s, p)$  – 3-цепь

**ПУТЬ** – УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ КОНЕЦ ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С НАЧАЛОМ СЛЕДУЮЩЕГО И ВСЕ РЕБРА ЕДИНСТВЕННЫ.

$(u, s, r, t)$  – 4-путь

$(r, u)$  – 2-путь

$(s, r, t)$  и  $(u, s, r)$  – 3-циклы



**ЦИКЛ** В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

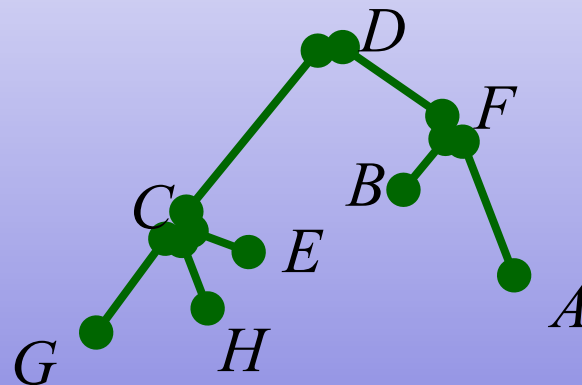
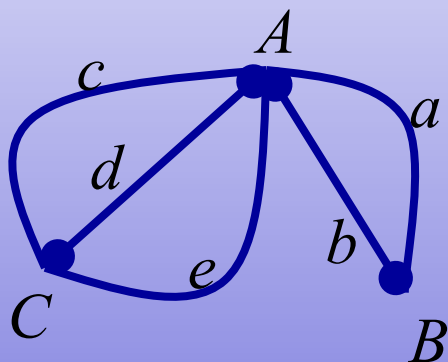
ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ  
НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ  
ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ  
ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ  
НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ  
МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО  
ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

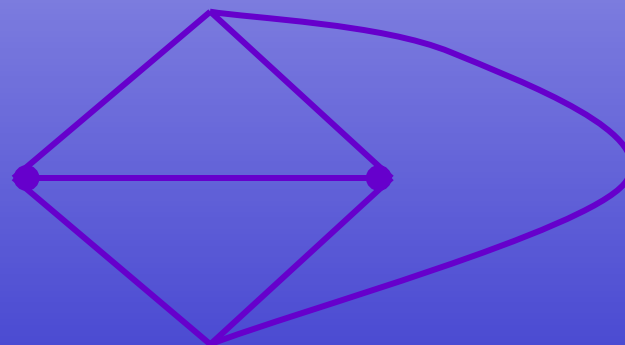
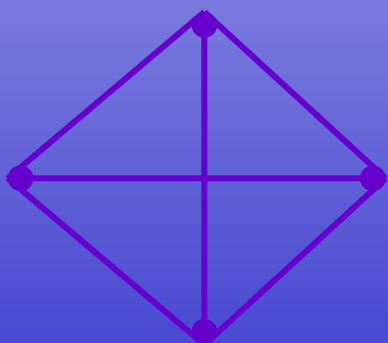
# ТЕОРЕМА

*ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ  
ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ  
ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И  
ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ  
ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ,  
РАВНУЮ 2.*

ГРАФ  $G$  НАЗЫВАЕТСЯ ПЛАНАРНЫМ(ПЛОСКИМ), ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ  $G'$ , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.



## ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ



ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ

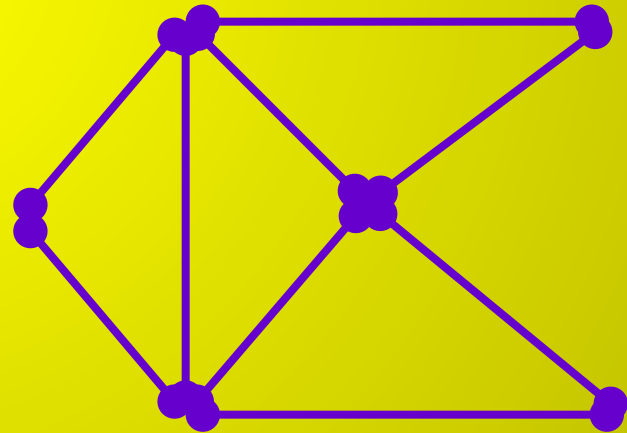
ИЗОБРАЖЕННЫЙ ИНАЧЕ

**ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА**  
НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), КОТОРЫЙ  
СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО  
ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ  
ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ **ЭЙЛЕРОВЫМ**.

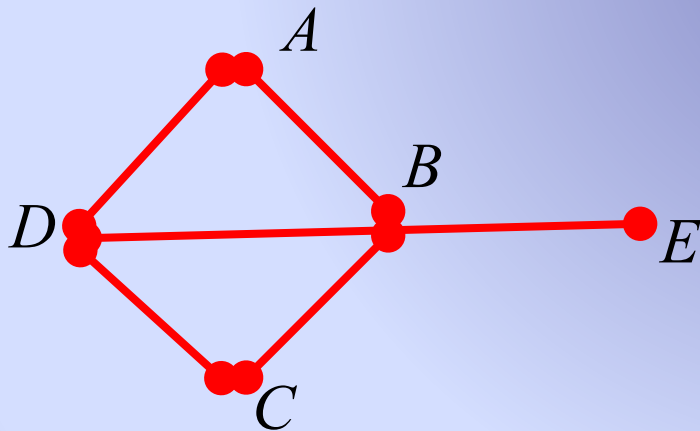
## ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ  
ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И  
ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН –  
СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ  
ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



**ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ  
(ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ  
ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ  
КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО  
ОДИН РАЗ.**

**ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ  
ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ  
ГАМИЛЬТОНОВЫМ.**



*(C, D, A, B, E) –  
гамильтонов путь*

**МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ** ГРАФА  $G$  НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ  $B$ , СОСТОЯЩУЮ ИЗ  $n$  СТРОК(ВЕРШИНЫ) И  $m$  СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

•ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $V_i$  ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ  $X_j$   
 $b_{ij} = 0$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $V_i$  ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ  $X_j$

•ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $V_i$  ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ  $X_j$   
 $b_{ij} = 0$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $V_i$  НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ  $X_j$   
 $b_{ij} = -1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $V_i$  ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ  $X_j$

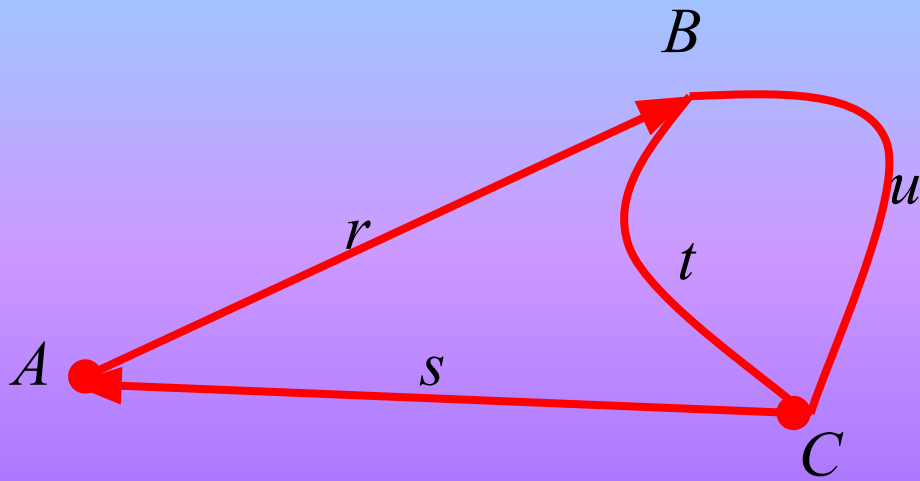


**МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ** ГРАФА  $G(V, X)$  БЕЗ КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ МАТРИЦУ  $A$  ПОРЯДКА  $n$ , В КОТОРОЙ:

$$a_{ij} = 1, \text{ ЕСЛИ } (V_i, V_j) \in X$$

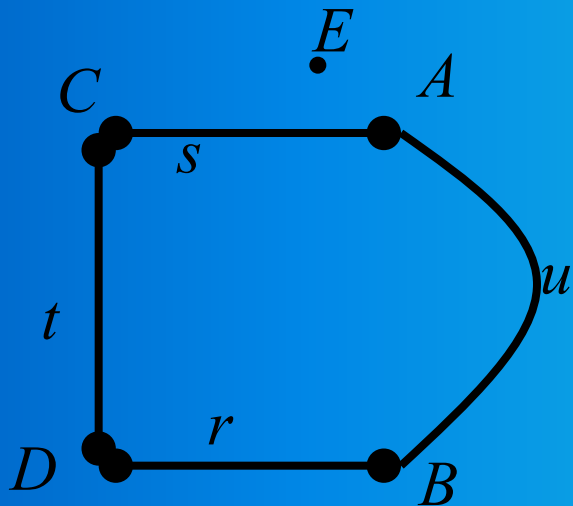
$$a_{ij} = 0, \text{ ЕСЛИ } (V_i, V_j) \notin X$$

# ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ



	$r$	$s$	$t$	$u$
$A$	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$B$	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
$C$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>

# ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ТАБЛИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ



	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>	0	1	1	0	0
<i>B</i>	1	0	0	1	0
<i>C</i>	1	0	0	1	0
<i>D</i>	0	1	1	0	0
<i>E</i>	0	0	0	0	0

Автор: Оркина Марина Александровна,  
преподаватель ГОУ СПО  
«Зубово-Полянский педагогический колледж»  
Республика Мордовия