Прикладные задачи на экстремумы.

Введение.

В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума. *Л. Эйлер*.

Введение.

Решая некоторые задачи, я встретил такие понятия, как «наибольшее значение», «наименьшее значение», «выгодное», «наилучшее», и меня заинтересовало решение таких задач. Оказывается, что в математике исследование задач на максимум и минимум началось очень давно – двадцать пять веков назад. Долгое время к задачам на отыскание экстремумов (с лат. «экстремум» – «крайний») не было единых подходов.

Введение.

Но примерно триста лет назад – были созданы первые общие методы решения и исследования задач на экстремумы. Тогда же выяснилось, что некоторые специальные задачи оптимизации играют очень важную роль в естествознании. Задачи на максимум и минимум на протяжении всей истории математики играли важную роль в развитии этой науки.

Введение.

За всё это время накопилось большое число красивых, важных, ярких и интересных задач в геометрии алгебре и других науках. В решении конкретных задач принимали участие крупнейшие учёные прошлых эпох: Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Торричелли, Иоганн и Якоб Бернулли, Исаак Ньютон и многие другие. Решение конкретных задач стимулировало развитие теории, и в итоге были выработаны приёмы, позволяющие единым методом решать задачи самой разнообразной природы.

Введение.

В алгебре экстремальные задачи встречаются в темах: «Линейная функция», «Рациональные дроби», «Неравенства», «Системы линейных уравнений и неравенств», «Квадратичная функция», «Последовательности и арифметическая прогрессия». На примере нескольких задач я расскажу о нахождении наибольшего и наименьшего значения в темах «Линейная функция», «Системы линейных неравенств и уравнений», «Рациональные дроби», «Квадратичная функция» и «Геометрия».

Линейная функция.

Наиболее простые, но не менее интересные задачи на экстремумы встречаются в теме «Линейная функция». Вот одна из них:

Имеются ящики, в которые нужно упаковать 78 самоваров. Одни ящики вмещают 3 самовара, другие – 5 самоваров. Какое наименьшее количество ящиков нужно использовать, чтобы упаковать все самовары (недогрузка не допускается)?

Линейная функция.

Решение: Обозначим количество одних ящиков через x, а других – через y. Тогда условие задачи даёт неопределённое уравнение вида $3x+5y=78$. Пары чисел (26; 0), (21; 3), (16;6), (11; 9), (6; 12), (1; 15) являются решениями данного уравнения. (1;15) – оптимальное решение задачи.

Ответ: нужно использовать 16 ящиков.

Системы линейных уравнений и неравенств.

На соревнованиях каждый стрелок делал 10 выстрелов. За каждое попадание он получал 5 очков, за каждый промах снималось 2 очка. Победителем считался тот, кто набрал не менее 30 очков. Сколько раз стрелок должен был попасть в мишень, чтобы быть в числе победителей?

Системы линейных уравнений и неравенств.

Решение: Обозначив число попаданий через x, число промахов – через y, получим неравенство $5x-2y\geq30$. Составим систему

$$\begin{cases}5x-2y\geq30,\\ x+y=10;\end{cases}\quad \begin{cases}5x-20+2x\geq30,\\ y=10-x;\end{cases}\quad \begin{cases}x>7,\\ y<3.\end{cases}$$

Решив систему получаем, что $x=\{8,9,10\}$; $y=\{2,1,0\}$. (8;2)–оптимальное решение.

Ответ: наименьшее число попаданий – 8.

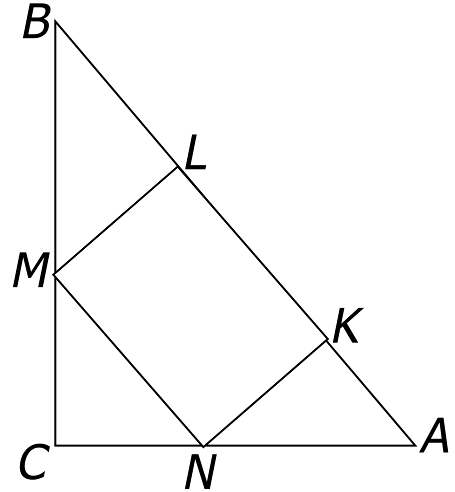
Рациональные дроби.

На автомобиле новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег в 24000 км, а шина на переднем колесе– в16000 км. Какой максимальный путь можно совершить на этих шинах?

Решение: Износ шины на заднем колесе будет равен 1/16000 км, а износ шины на переднем колесе – 1/24000 км. Износ шин на обоих колёсах равен:1/16000+1/24000=1/9600. Максимальный путь равен 1/(1/9600)·2=19200 (км).

Квадратичная функция.

А вот геометрическая задача на составле-ние квадратичной функции: В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом 60^0 вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?



Квадратичная функция.

Решение: $AB=16$ см. $NK:KA=\mathrm{tg}60^0=\sqrt{3}$. По свойству пропорции получаем: $KA=x\sqrt{3}/3$. Треугольник ABC подобен треугольнику MBL по двум углам. Составим отношение между сторонами треугольников: $BL:BC=ML:AC$. По теореме Пифагора $BC=8\sqrt{3}$. Находим, что $BL=x\sqrt{3}$. $KL=16-4x\sqrt{3}:3$. Площадь прямоугольника находим по формуле: $S=x(16-4\sqrt{3}x/3)=-4\sqrt{3}x^2/3+16x=-4\sqrt{3}:3(x-2\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}$. Площадь будет наибольшей при $x=2\sqrt{3}$. Значит, $KL=16(4\cdot2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}):3=8$(см). Ответ: $2\sqrt{3}$см

Метод оценки.

Некоторые задачи на экстремумы решаются методом оценки. В методе оценки следует коснуться неравенства Коши для нескольких переменных:

$$\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)/n.$$

На одном из предприятий стоимость x деталей, изготовленных рабочим сверхурочно, определяется по формуле $y=0{,}1x^2+0{,}5x+2$. Определите количество деталей, при котором себестоимость одной детали была бы наименьшей.

Метод оценки.

Решение: Найдём среднее арифметическое для $0{,}1x^2$, $0{,}5x$ и 2: $(0{,}1x^2+0{,}5x+2)/x=0{,}5+0{,}1x+2/x$. Из трёх величин одна постоянная (0,5), а две другие – переменные. Среднее геометрическое для переменных $0{,}1x$ и $2/x$ равно $\sqrt{0{,}2}$. Используя неравенство Коши для двух переменных получаем: $0{,}5+(2/x+0{,}1x)\geq 0{,}5+2\sqrt{0{,}8}$; $0{,}5+(2/x+0{,}1x)\geq 0{,}5+\sqrt{0{,}8}$. Левая часть неравенства принимает наименьшее значение равное $0{,}5+\sqrt{0{,}8}$.

Метод оценки.

Решаем уравнение $0,1x^2-\sqrt{0,8}x+2=0$; $D=0,8-0,8=0$; $x=\sqrt{0,8}/0,2=\sqrt{20}$. Но так как x – это количество деталей, то $x=4$ или $x=5$.

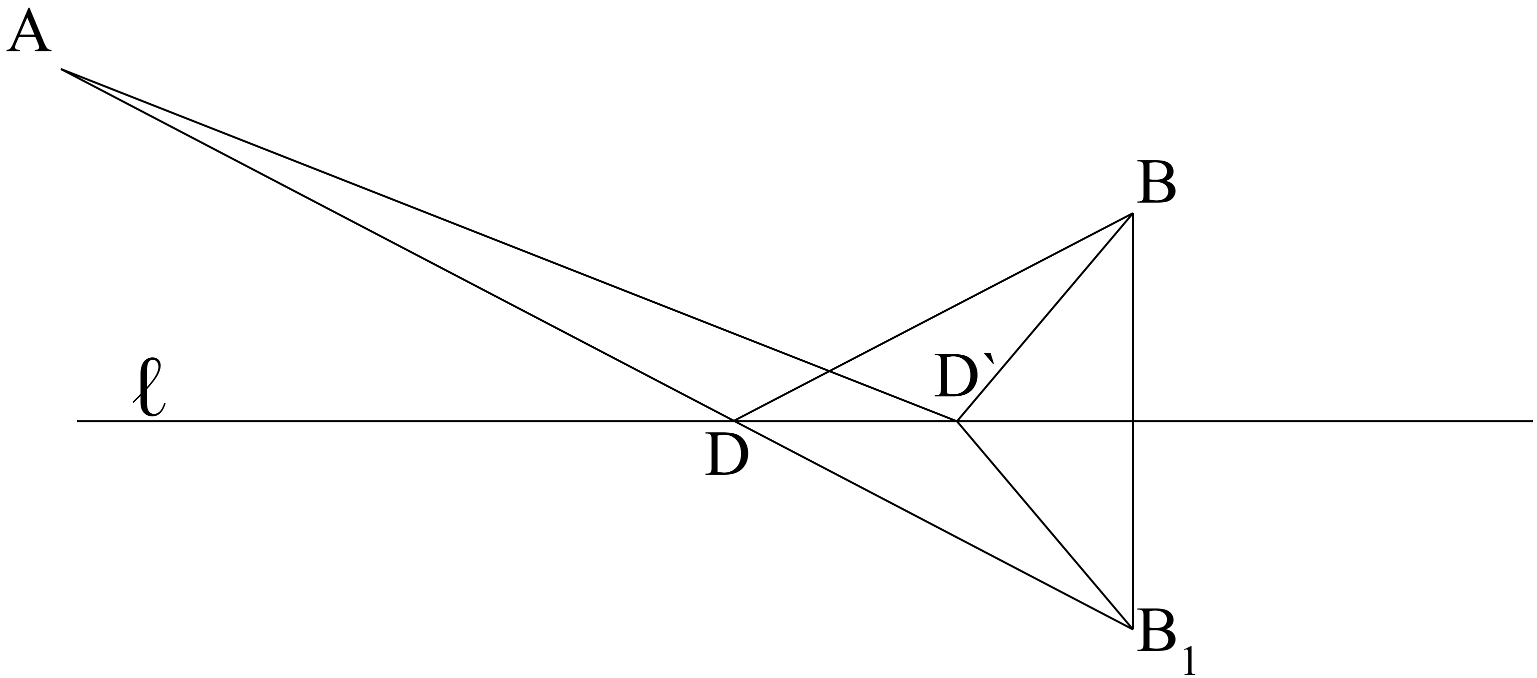
Ответ: 4 или 5 деталей.

Геометрия.

Основу задач по геометрии на максимум и минимум составляют задачи на преобразование плоскости. Основной задачей является старинная задача, написанная в I веке до н. э. Вот как она звучит:

Даны две точки A и B по одну сторону от прямой ℓ. Требуется найти на ℓ такую точку D, чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.

Геометрия.



Геометрия.

Решение: Пусть точка B_1 – точка, симметричная точке B относительно прямой ℓ. Соединим A с B_1. Тогда точка D пересечения AB_1 с прямой ℓ – искомая. Действительно, для любой точки D`, отличной от D, имеет место неравенство: $AD` + D`B_1 > AB_1$ (т.к. в треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны); $AD` + D`B > AD + DB$.

Заключение.

Я коснулся только нескольких задач на экстремумы, так как задачи на экстремумы встречаются в природе, сельском хозяйстве, в различных областях промышленности. Большое число задач оптимизации возникает в космонавтике, химической промышленности и технике. Это задачи управления технологическими процессами, приборами и системами. Траектории света и радиоволн, движения маятников и планет, течения и многие другие движения являются решениями некоторых задач на максимум и минимум.