Одно из свойств арифметических прогрессий.

МАОУ «СОШ № 1» с углублённым изучением отдельных предметов имени И. А. Куратова г. Сыктывкара.

Исполнитель: Лукина Серафима

Руководитель: Карпова Людмила Александровна

2011 год.

Эпиграф

- Через математические знания, полученные в школе, лежит широкая дорога к огромным, почти необозримым областям труда и открытий.

Маркушевич А. И.

Цель исследовательской работы:

- Доказать одно из свойств арифметических прогрессий и воспользоваться им на практике.

- **Арифметическая прогрессия - это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.**
- $a_n = a_1 + d(n - 1)$

$d = a_{n+1} - a_n$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \times n$$

- **7.32.**

1) Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

3, 8, 13, … и 4, 11, 18, … .

2)Найдите сумму первых 10 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

3, 7, 11, … и 1, 10, 19, … .

- **Первый совпадающий член двух данных прогрессий можно найти, непосредственно выписав несколько последовательных членов каждой из них.**

  $d = НОК(d_1; d_2)$

  d_1 – разность первой прогрессии

  d_2 – разность второй прогрессии

- **« Действительно ли это так и можно ли это доказать?»**

- 1) НОК(Наименьшим общим кратным) натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое кратно и a, и b.

  Пример: НОК(6; 8) = 24

  2)Если НОД(a; b) = 1, т. е. числа a и b взаимно простые, то НОК(a; b) = a x b

  Пример: a = 3; b = 4

  НОД(3; 4) = 1

  НОК(3; 4) = 3 x 4 = 12

- Если a : b и a : c a : b x c
- НОК(Ra; Rb) = RНОК(a; b), где НОД(a; b) = 1

- **Дано:** (a_n) и (b_n) – арифметические прогрессии, соответственно с разностями d_1 и d_2, $НОД(d_1;d_2) = 1$;

  (c_n) содержит совпадающие члены данных последовательностей, d – разность прогрессии

Доказать: $d = НОК(d_1; d_2) = d_1 \times d_2$

Доказательство:

1) см (c_n) и (a_n)

$c_1 = a_R = a_1 + d_1(R - 1)$

$c_2 = a_l = a_1 + d_1(l - 1)$

См $d = c_2 - c_1 = a_l - a_R = a_1 - a_1 + d_1(l - R) =$

$= d_1(l - R)$ → $d : d_1$

2)см (c_n) и (b_n)

$c_1 = b_m = b_1 + d_2(m - 1)$

$c_2 = b_p = b_1 + d_2(p - 1)$

см $d = c_2 - c_1 = d_2(m - p)$ → $d : d_2$

Вывод:

1)$d : d_1$

$d : d_2$

→ $d : d_1 \times d_2$ → $d = НОК(d_1; d_2)$

$НОД(d_1; d_2) = 1$

- См примеры:

1) 12 : 4

12 = НОК(4; 3);см НОД(4;3) = 1

12 : 3

Получено 12 = НОК(4; 3) = 4 х 3

2) см 24 : 6

24 = НОК(6; 8); см НОД(6; 8)≠1

24 : 8

24 = НОК(6;8) ≠ 6 х 8

Значит: если НОД(d_1; d_2) = 1,

то d = НОК(d_1;d_2) = d_1 х d_2

- **Примечание:**

Свойство НОК:

Если a и b – не взаимно простые числа,

НОК(ra; rb) = rНОК(a; b),

НОД(a; b) = 1

См пример:

НОК(6;8) = НОК(2 x 3; 2 x 4) = 2НОК(3; 4) =

= 2 x 12 = 24

- **7.32.**

1)Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

3, 8, 13, … 4, 11, 18, … .

Решение:

1) S_{20} - ?

2) (a_n): 3, 8, 13, 18, …

(b_n): 4, 11, 18, …

(c_n): 18, …

3) $d_1 = a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5$

$d_2 = b_2 - b_1 = 11 - 4 = 7$

4) см НОД(5; 7) = 1

$d = НОК(d_1; d_2) = НОК(5; 7) = 7 \times 5 = 35$

5) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \times n$

$$S_{20} = \frac{2 \times 18 + 35(20 - 1)}{2} \times 20 =$$

$$= \frac{36 + 35 \times 19}{2} \times 20 = \frac{701}{2} \times 20 = 7010$$

Ответ: $S_{20} = 7010$

2) Найдите сумму первых 10 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

3, 7, 11, … и 1, 10, 19, …

Решение:

1) S_{10} - ?

2) (a_n): 3, 7, 11, 15, 19, …

(b_n): 1, 10, 19, …

(c_n): 19, …

3) $d_1 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$d_2 = b_2 - b_1 = 10 - 1 = 9$

4) см НОД(4; 9) = 1

$d = НОК(d_1; d_2) = 4 \times 9 = 36$

5) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \times n$

$$S_{10} = \frac{2 \times 19 + 36(10 - 1)}{2} \times 10 =$$

$$= \frac{38 + 36 \times 9}{2} \times 10 = \frac{362}{2} \times 10 = 1810$$

Ответ: $S_{10} = 1810$

- **12.98.**

  В арифметической прогрессии 3; 6; 9; … содержится 463 члена, в арифметической прогрессии 2; 6; 10; … содержится 351 член. Сколько одинаковых членов содержится в этих прогрессиях.

Решение:

1) n - ?

(a_n): 3, 6, 9, … (463 члена)

(b_n): 2, 6, 10, … (351 член)

(c_n): 6, …

2) $d_1 = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$

$d_2 = b_2 - b_1 = 6 - 2 = 4$

3) см НОД(3; 4) = 1

$d = НОК(d_1; d_2) = НОК(3; 4) = 3 \times 4 = 12$

4) см $a_n = a_1 + d(n - 1)$

$a_{463} = 3 + 3(463 - 1) = 1389$

$b_{351} = 2 + 4(351 - 1) = 1402$

5) $c_n = c_1 + d(n-1)$; n - ?

$$\begin{cases} 6 + 12(n-1) < 1389 \\ 6 + 12(n-1) < 1402 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + 12n - 12 < 1389 \\ 6 + 12n - 12 < 1402 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12n < 1395 \\ 12n < 1408 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n < 116,25 \\ n < 117,33 \end{cases}$$

$n = 116$

Ответ: 116 одинаковых членов содержится в этих прогрессиях.

- В заключении строки из романа А. С. Пушкина «Евгений Онегин», сказанные о его герое: «…Не мог он ямба от хорея, как мы не бились, отличить».Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.

- Ямб – стихотворный размер с ударениями на чётных слогах стиха (н: Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил), т. е. ударными являются второй, четвёртый, шестой, восьмой и т. д. слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2, 4, 6, 8… .

Хорей – стихотворный размер с ударением на нечётных слогах (н: Буря мглою небо кроет). Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но её первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1; 3; 5; 7, … .

Практическая значимость

- 1)Моя работа может использоваться на уроках алгебры при изучении темы «Арифметические прогрессии».

  2)Данное исследование поможет учащимся при написании ГИА и ЕГЭ.

Источники:

- Сборник заданий для подготовки к ГИА в 9 классе;

  Сборник задач по алгебре(8-9 класс) М.Л. Галицкого, А. М. Гольдмана, Л. И. Звавича;

  Учебник для 9 класса с углублённым изучением математики Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К. И. Нешкова;

  Пособие для учителя «Делимость целых чисел» В. Д. Яковлева;

  Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики(для 9 класса) под редакцией Н. Я. Виленкина.