

Одно из свойств

арифметических прогрессий.

МАОУ «СОШ № 1» с углублённым изучением отдельных предметов имени И. А. Куратова г. Сыктывкара.

Исполнитель: Лукина Серафима

Руководитель: Карпова Людмила Александровна

2011 год.

Эпиграф

- Через математические знания, полученные в школе, лежит широкая дорога к огромным, почти необозримым областям труда и открытий.

Маркушевич А. И.

Цель исследовательской работы:

- Доказать одно из свойств арифметических прогрессий и воспользоваться им на практике.

- Арифметическая прогрессия - это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

- $a_n = a_1 + d(n - 1)$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$a_1 + a_n$$

$$S_n = \frac{\quad}{2} \times n$$

$$2a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = \frac{\quad}{2} \times n$$

■ **7.32.**

1) Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:
3, 8, 13, ... и 4, 11, 18,

2) Найдите сумму первых 10 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:
3, 7, 11, ... и 1, 10, 19,

- Первый совпадающий член двух данных прогрессий можно найти, непосредственно выписав несколько последовательных членов каждой из них.

$$d = \text{НОК}(d_1; d_2)$$

d_1 – разность первой прогрессии

d_2 – разность второй прогрессии

- « Действительно ли это так и можно ли это доказать? »

- **1) НОК**(Наименьшим общим кратным) натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое кратно и a , и b .


Пример: $\text{НОК}(6; 8) = 24$

2) Если $\text{НОД}(a; b) = 1$, т. е. числа a и b взаимно простые, то $\text{НОК}(a; b) = a \times b$

Пример: $a = 3; b = 4$

$$\text{НОД}(3; 4) = 1$$

$$\text{НОК}(3; 4) = 3 \times 4 = 12$$

- Если $a : b$ и $a : c$  $a : b \times c$
- $\text{НОК}(ra; rb) = r\text{НОК}(a; b)$, где $\text{НОД}(a; b) = 1$

- **Дано:** (a_n) и (b_n) – арифметические прогрессии, соответственно с разностями d_1 и d_2 , $\text{НОД}(d_1; d_2) = 1$;
 (c_n) содержит совпадающие члены данных последовательностей, d – разность прогрессии
-

Доказать: $d = \text{НОК}(d_1; d_2) = d_1 \times d_2$

Доказательство:

1) см (c_n) и (a_n)

$$c_1 = a_R = a_1 + d_1(R - 1)$$

$$c_2 = a_l = a_1 + d_1(l - 1)$$

$$CM \ d = c_2 - c_1 = a_I - a_R = a_1 - a_1 + d_1(I - R) = \\ = d_1(I - R) \longrightarrow d : d_1$$

2) CM (c_n) и (b_n)

$$c_1 = b_m = b_1 + d_2(m - 1)$$

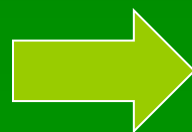
$$c_2 = b_p = b_1 + d_2(p - 1)$$

$$CM \ d = c_2 - c_1 = d_2(m - p) \longrightarrow d : d_2$$

Вывод:

$$1) \ d : d_1$$

$$d : d_2$$



$$d : d_1 \times d_2$$



$$d = \text{НОК}(d_1; d_2)$$

$$\underline{\underline{\text{НОД}(d_1; d_2) = 1}}$$

■ См примеры:

1) $12 : 4$

$\rightarrow 12 = \text{НОК}(4; 3); \text{см } \text{НОД}(4; 3) = 1$

$12 : 3$

Получено $12 = \text{НОК}(4; 3) = 4 \times 3$

2) см $24 : 6$

$\rightarrow 24 = \text{НОК}(6; 8); \text{см } \text{НОД}(6; 8) \neq 1$

$24 : 8$

$24 = \text{НОК}(6; 8) \neq 6 \times 8$

Значит: если $\text{НОД}(d_1; d_2) = 1$,

то $d = \text{НОК}(d_1; d_2) = d_1 \times d_2$

■ Примечание:

Свойство НОК:

Если a и b – не взаимно простые числа,

$$\text{НОК}(ra; rb) = r\text{НОК}(a; b),$$

$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

См пример:

$$\begin{aligned}\text{НОК}(6; 8) &= \text{НОК}(2 \times 3; 2 \times 4) = 2\text{НОК}(3; 4) = \\ &= 2 \times 12 = 24\end{aligned}$$

■ 7.32.

1) Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

$$3, 8, 13, \dots \quad 4, 11, 18, \dots$$

Решение:

1) $S_{20} - ?$

2) $(a_n): 3, 8, 13, \underline{18}, \dots$

$(b_n): 4, 11, \underline{18}, \dots$

$(c_n): 18, \dots$

$$3) d_1 = a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5$$
$$d_2 = b_2 - b_1 = 11 - 4 = 7$$

$$4) \text{ см НОД}(5; 7) = 1$$
$$d = \text{НОК}(d_1; d_2) = \text{НОК}(5; 7) = 7 \times 5 = 35$$

$$5) S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \times n$$

$$2 \times 18 + 35(20 - 1)$$

$$S_{20} = \frac{\quad}{2} \times 20 =$$

$$= \frac{36 + 35 \times 19}{2} \times 20 = \frac{701}{2} \times 20 = 7010$$

Ответ: $S_{20} = 7010$

2) Найдите сумму первых 10
совпадающих членов двух
арифметических прогрессий:

3, 7, 11, ... и 1, 10, 19, ...

Решение:

1) S_{10} - ?

2) (a_n) : 3, 7, 11, 15, 19, ...

(b_n) : 1, 10, 19, ...

(c_n) : 19, ...

$$3) d_1 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$$

$$d_2 = b_2 - b_1 = 10 - 1 = 9$$

$$4) \text{ см НОД}(4; 9) = 1$$

$$d = \text{НОК}(d_1; d_2) = 4 \times 9 = 36$$

$$2a_1 + d(n - 1)$$

$$5) S_n = \frac{\quad \quad \quad}{2} \times n$$

$$2 \times 19 + 36(10 - 1)$$

$$S_{10} = \frac{\quad}{2} \times 10 =$$

$$= \frac{38 + 36 \times 9}{2} \times 10 = \frac{362}{2} \times 10 = 1810$$

Ответ: $S_{10} = 1810$

■ **12.98.**

В арифметической прогрессии 3; 6; 9; ... содержится 463 члена, в арифметической прогрессии 2; 6; 10; ... содержится 351 член. Сколько одинаковых членов содержится в этих прогрессиях.

Решение:

1) n - ?

(a_n) : 3, 6, 9, ... (463 члена)

(b_n) : 2, 6, 10, ... (351 член)

(c_n) : 6, ...

$$2) \mathbf{d_1 = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3}$$

$$\mathbf{d_2 = b_2 - b_1 = 6 - 2 = 4}$$

$$3) \text{ см НОД}(3; 4) = 1$$

$$\mathbf{d = НОК}(d_1; d_2) = \mathbf{НОК}(3; 4) = 3 \times 4 = 12$$

$$4) \text{ см } \mathbf{a_n = a_1 + d(n - 1)}$$

$$\mathbf{a_{463} = 3 + 3(463 - 1) = 1389}$$

$$\mathbf{b_{351} = 2 + 4(351 - 1) = 1402}$$

$$5) c_n = c_1 + d(n - 1); n - ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 12(n - 1) < 1389 \\ 6 + 12(n - 1) < 1402 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 12(n - 1) < 1389 \\ 6 + 12(n - 1) < 1402 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 12n - 12 < 1389 \\ 6 + 12n - 12 < 1402 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 12n - 12 < 1389 \\ 6 + 12n - 12 < 1402 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12n < 1395 \\ 12n < 1408 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12n < 1395 \\ 12n < 1408 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n < 116, 25 \\ n < 117, 33 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n < 116, 25 \\ n < 117, 33 \end{array} \right.$$

$$n = 116$$

Ответ: 116 одинаковых членов
содержится в этих прогрессиях.

- В заключении строки из романа А. С. Пушкина «Евгений Онегин», сказанные о его герое: «...Не мог он ямба от хорея, как мы не бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.

- Ямб – стихотворный размер с ударениями на чётных слогах стиха (н: Мой дядя са~~м~~ых че~~с~~тных пра~~в~~ил), т. е. ударными являются второй, четвёртый, шестой, восьмой и т. д. слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2, 4, 6, 8... .

Хорей – стихотворный размер с ударением на нечётных слогах (н: Буря мглою небо кроет). Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но её первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1; 3; 5; 7,

Практическая значимость

- 1) Моя работа может использоваться на уроках алгебры при изучении темы «Арифметические прогрессии».
- 2) Данное исследование поможет учащимся при написании ГИА и ЕГЭ.

Источники:

- Сборник заданий для подготовки к ГИА в 9 классе;
- Сборник задач по алгебре(8-9 класс) М.Л. Галицкого, А. М. Гольдмана, Л. И. Звавича;
- Учебник для 9 класса с углублённым изучением математики Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К. И. Нешкова;
- Пособие для учителя «Делимость целых чисел» В. Д. Яковлева;
- Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики(для 9 класса) под редакцией Н. Я. Виленкина.