



Тема урока:

**Сумма n -первых членов
арифметической прогрессии**

Цель урока:

- **Вывести формулу суммы n -членов арифметической прогрессии, выработать навыки непосредственного применения данной формулы.**

Задачи урока:

- *Учебная: познакомить учащихся с формулой суммы n -первых членов арифметической прогрессии.*
- *Воспитательная: воспитывать интерес к истории математики.*
- *Развивающая: развивать любознательность и вычислительные навыки.*

Арифметический диктант:

1. У арифметической прогрессии первый член 4 (6), второй 6 (4). Найти разность d .
2. У арифметической прогрессии первый член 6 (4), второй 2 (6). Найти третий член.
3. Найти десятый (восьмой) член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1, а разность d равна 4 (5).
4. Является ли последовательность четных (нечетных) чисел арифметической прогрессией?
5. (a_n) – арифметическая прогрессия. Выразите через a_1 и d a_{10} ; a_{100} ; a_n ; a_{n+1} (a_{20} ; a_{200} ; a_{2n} ; a_{2n+2}).
6. Определение арифметической прогрессии. Понятие разности арифметической прогрессии. Вывод формулы n -го члена арифметической прогрессии.

Проверь себя!

- 1 вариант: (1) $d = 2$; (2) $a_3 = -2$; (3) 37; (4) Да; (5) $a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{100} = a_1 + 99d$; $a_n = a_1 + d(n - 1)$; $a_{n+1} = a_1 + nd$.
- 2 вариант (1) $d = -2$; (2) $a_3 = 8$; (3) $a_8 = 36$; (4) Да; (5) $a_{20} = a_1 + 19d$; $a_{200} = a_1 + 199d$; $a_{2n} = a_1 + d(2n - 1)$.
- (6) Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Разность между любым ее членом, начиная со второго и предыдущим членом равна разности арифметической прогрессии.

Из истории математики:

С формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии был связан эпизод из жизни немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777 – 1855).




Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу:


«Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 40 включительно: $1 + 2 + 3 + \dots + 40$.

Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил...»

Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тетради Гаусса было написано одно число и притом верное.



*Как Гауссу удалось
так быстро
сосчитать сумму
такого большого
количества чисел?*



**Попытаемся найти
ответ на данный
вопрос.**

Вот схема рассуждений Гаусса.

Сумма чисел в каждой паре 41. Таких пар 20, поэтому искомая сумма равна

$$41 \times 20 = 820.$$

Попытаемся понять как ему это удалось.

Выведем формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

a_n) – арифметическая прогрессия.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots = a_2 + a_1$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n \text{ и т.д.}$$


$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

$S_n = (a_1 + a_n)n : 2$ – **формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.**

$$S_n = (a_1 + a_n)n : 2, \quad a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = (a_1 + a_1 + d(n-1))n : 2 = (2a_1 + d(n - 1))n : 2$$

$S_n = (2a_1 + d(n - 1))n : 2$ – **формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.**



***А теперь подобно Гауссу
решим задачу о нахождении
суммы натуральных чисел от
1 до 40.***

Тренировочные упражнения:

1. (a_n) –
арифметическая
прогрессия.

$a_1 = 6, a_5 = 26$. Найти
 S_5 .

Решение:

$$S_n = (a_1 + a_n) : 2 \times n$$

Теперь вычислим сумму пяти первых членов арифметической прогрессии: $S_5 = (6 + 26) : 2 \times 5 = 80$.

Ответ: 80.

**2. (a_n) – арифметическая
прогрессия.**

$a_1 = 12, d = -3$. Найти S_{16} .

Решение:

$$S_{16} = (a_1 + a_{16}) : 2 \times 16$$

Заметим, что в данной прогрессии не задан последний член этой суммы. Найдем 16 член прогрессии:

$$a_{16} = 12 + 15 \times (-3) = 12 + (-45) = -33$$

Теперь вычислим сумму: $S_{16} = (12 + (-33)) \times 16 : 2 = (-21) \times 8 = -168$. Ответ: -168.

При решении таких задач можно воспользоваться второй формулой

$$S_{16} = (2a_1 + d(n-1)) : 2 \times 16 = (2 \times 12 + 15 \times (-3)) : 2 \times 16 = -21 : 2 \times 16 = -168. \text{ Ответ: } -168.$$



Работа по учебнику.

В заключение вспомним строки А. С. Пушкина из романа «Евгений Онегин», сказанные о его герое: «...не мог он ямба от хорея, как мы не бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб – стихотворный метр с ударениями на четных слогах стиха (Мой дядя самых честных правил...), то есть ударными являются 2-й, 4-й, 6-й, 8-й и т. д. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2, 4, 6, 8, ... Хорей – стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. (Буря мглою небо кроет...) Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но ее первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1, 3, 5, 7,

Задание на дом:

1. Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 6$, $d = 4$.
2. Найдите сумму первых n – членов арифметической прогрессии, $1,6; 1,4; \dots$, если $n = 6$.
3. Найти сумму натуральных чисел начиная с 20 по 110 включительно.
4. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии (a_n) , в которой $a_1 = 6$, $a_7 = 26$.