

Связь музыки и математики

"Раздумывая об искусстве и науке, об их взаимных связях и противоречиях, я пришел к выводу, что математика и музыка находятся на крайних полюсах человеческого духа, что этими двумя антиподами ограничивается и определяется вся творческая духовная деятельность человека и, что между ними размещается все, что человечество создало в области науки и искусства."

Г. Нейгауз

Настоящая наука и настоящая музыка требует однородного мыслительного процесса. А Эйнштейн.

Существует распространённое мнение, что **Математика и Музыка** – два полюса человеческого восприятия и две противоположные системы мышления... Как в музыке важна **Логика**, так и в математике важно **образное мышление и воображение**...

Мы живём во времена экономической, политической, культурной и информационной интеграции. Математика и Музыка являются воплощением таких понятий, как **Интеграция и Гармония**.

***В наслаждении красотой есть
элемент наслаждения мышлением.***

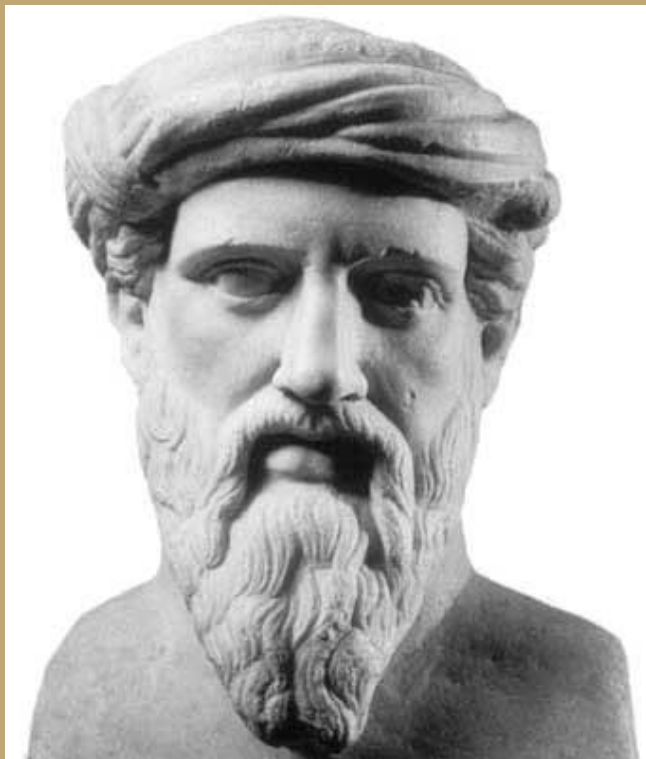
Аристотель

Математика – это не только стройная система законов, теорем, задач, но и уникальное средство познания красоты. А красота многогранна и многолика. Она выражает высшую целесообразность устройства мира, подтверждает универсальность математических закономерностей, которые действуют одинаково эффективно в кристаллах и в живых организмах, в атомах и во Вселенной, в произведениях искусства и научных открытиях.

Красота помогает с радостью воспринимать окружающий мир, математика даёт возможность осознать явления и упрочить знания о гармонии всего мира.

Гармония

Еще древнегреческий философ и математик Пифагор утверждал, что мир это **Гармония**, а гармония – это **число**. Ученики и последователи пифагорейской школы отмечали то, что: *«Можно заметить, что природа и сила числа действует не только в демонических и божественных вещах, но также повсюду во всех человеческих делах и отношениях, во всех технических искусствах и в музыке»*. Филолай. *«Все то, что природа систематически сложила во вселенной, кажется в своих частях, как и в целом, определенным и слаженным в стройный аккорд при помощи числа...»*



Непостижимая гармония

Приятная для слуха слаженность звуков
(музыкально-эстетическое понятие: то же, что «благозвучие»; нем. Harmonie)

Гармония это:

- объединение звуков в созвучия и их закономерное последование (композиционно-техническое понятие);
- гармония как музыкально-художественное средство, соответствующее немецкому **Harmonik**;
- гармонией также называется научная и учебно-практическая дисциплина, изучающая звуковысотную организацию музыки, созвучия и их связи .

МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА



Портрет Пифагора работы венецианского художника XVIII века
Пьетро Лонги.

Пифагор создал свою школу мудрости, положив в ее основу **два искусства – музыку и математику**. Он считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга.

Изобретение Пифагором прототипа современного музыкального строя

Пифагор заметил, что отношение частот двух соседних нот всегда отличается, а отношение частот двух нот, отстоящих друг от дружки на четыре позиции, наоборот, всегда постоянно и составляет $3/2$. Такое созвучие теперь называют **квинтой**. Взяв квинту за основу, Пифагор вывел музыкальную формулу, которая позволяет на основе частоты базовой ноты, от которой ведется отсчет, и порядкового номера заданной ноты получить искомое значение частоты следующей ноты. В результате последовательного применения формулы получаются звуки, отстоящие друг от друга на квинту. В этом ряду есть все ноты звукоряда. И хотя они относятся к разным октавам, но, поделив или умножив частоту нужного звука на два, можно перенести его в соседнюю октаву. Повторяя операцию деления (или умножения) несколько раз, можно заполнить весь диапазон инструмента. Роль математики в этой музыкальной истории очевидна.

Законы пифагорейской музыки

В основе этой музыкальной системы были два закона, которые носят имена двух великих ученых - Пифагора и Архита. Вот эти законы:

1. Две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число $10=1+2+3+4$, т.е. как 1:2, 2:3, 3:4. Причем, чем меньше число n в отношении $n:(n+1)$ ($n=1,2,3$), тем созвучнее получающийся интервал.
2. Частота колебания w звучащей струны обратно пропорциональна ее длине l .

$$w = a : l ,$$

где a - коэффициент, характеризующий физические свойства струны.

Некоторые понятия теории музыки

1. Гаммой, или звукорядом, называется последовательность звуков, расположенных от основного тона (звука) в восходящем или нисходящем порядке.
2. Интервальным коэффициентом двух тонов считают отношение частоты колебаний верхнего тона к частоте колебаний нижнего:

$$w_1 : w_2.$$

Некоторые интервальные коэффициенты и соответствующие им интервалы в средние века были названы совершенными консонансами и получили следующие названия:

октава ($w_2 : w_1 = 2 : 1, l_2 : l_1 = 1 : 2$);

квинта ($w_2 : w_1 = 3 : 2, l_2 : l_1 = 2 : 3$);

кварта ($w_2 : w_1 = 4 : 3, l_2 : l_1 = 3 : 4$).

3. Тоника – основной наиболее устойчивый тон в гамме. С него начинается данная музыкальная система.

Лад – приятная для слуха взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых и имеющая определенный характер звучания.

Музыкальный строй – математическое выражение системы звуковысотных соотношений – лада.

Математическое описание построения музыкальной гаммы

1. Основой музыкальной шкалы–гаммы пифагорейцев был интервал – октава. Она является консонансом, повторяющим верхний звук. Для построения музыкальной гаммы пифагорейцам требовалось разделить октаву на красиво звучащие части. Так как они верили в совершенные пропорции, то связали устройство гаммы со средними величинами: арифметическим, гармоническим.

Среднее арифметическое частот колебаний тоники (w_1) и ее октавного повторения (w_2) помогает найти совершенный консонанс квинту.

Т.к. $w_2 = 2w_1$, то $w_3 = (w_1 + w_2) : 2 = 3w_1 : 2$ или $w_3 : w_1 = 3 : 2$ (w_3 – частота колебаний квинты).

2. У древних греков существовал и другой способ построения музыкальной гаммы, кроме описанного выше. Он был более простым и удобным и до сих пор применяется при настройке музыкальных инструментов. Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь совершенными консонансами - квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходящего звука, например "до" $(3/2)^0 = 1$, мы движемся по квартам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. И тогда получаем: $(3/2)^1 = 3/2$ - соль, $(3/2)^2 : 2 = 9/8$ - ре, $(3/2)^3 : 2 = 27/16$ - ля, $(3/2)^4 : 2 = 81/64$ - ми, $(3/2)^5 : 2 = 243/128$ - си, $(3/2)^{-1} : 2 = 4/3$ - фа. (Все математические расчеты можно выполнить на компьютере, используя программу "Калькулятор".)

Длина струны l_3 , соответствующая квинте, по второму закону Пифагора-Архита будет средним гармоническим длин струн тоники l_1 и ее октавного повторения l_2 .

Т.к. $l_2 = l_1 : 2$, то $l_3 = 2 l_1 l_2 : (l_1 + l_2) = 2 l_1 l_1 : 2 : (l_1 + l_1 : 2) = l_1^2 : ((2 l_1 + l_1) : 2) = 2 l_1^2 : 3 l_1 = 2 l_1 : 3$; или $l_3 : l_1 = 2 : 3$.

Взяв далее среднее гармоническое частот основного тона w_1 и октавы w_2 , получим $w_4 = 2w_1 w_2 : (w_1 + w_2) = 2w_1 2w_1 : (w_1 + 2w_1) = 4w_1^2 : 3w_1 = 4w_1 : 3$. Значит $w_4 : w_1 = 4 : 3$. В результате находим еще один совершенный консонанс – кварту.

Определим, как связаны длины струн найденных частот (l_4 и l_1):

$l_4 = (l_1 + l_2) : 2 = (l_1 + l_1 : 2) : 2 = (2 l_1 + l_1) : 2 : 2 = 3 l_1 : 4$; $l_4 : l_1 = 3 : 4$.

Это значит, что длины струн l_1 , l_2 и l_4 связаны между собой средним арифметическим.

Итак, частота колебаний квинты является средним арифметическим частот колебаний основного тона w_1 и октавы w_2 , а частота колебаний кварты - средним гармоническим w_1 и w_2 . Или иначе: длина струны квинты есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2 , а длина струны кварты – среднее арифметическое l_1 и l_2 . Это лишь незначительная часть тех прекрасных пропорций, которые были воплощены в пифагорейской музыкальной гамме.

Браво, Пифагор!

Избавил музыкантов от головной боли! Однако одновременно создал проблему: в звукоряде, построенном по его формуле, целое число квинт не укладывается в целое число октав. Такое несоответствие получило название "пифагорова комма". Пифагорова комма - не только кажущийся математический парадокс. Главное, что при пифагоровой системе невозможно играть в произвольной тональности, не фальшивя.

Интервал между октавой, полученной шагами по 12-равномерным полутонам $\sqrt[12]{2}$, и чистой октавой равен и называется **пифагоровой коммой** (коммой в музыкальной акустике называется интервал, не превышающий $1/9$ целого тона. Пифагорова комма приблизительно равна $1/9$ тона).

Пифагорийская школа



Пифагору принадлежит и открытие терапевтического эффекта музыки. Он не колебался относительно влияния музыки на ум и тело, называя это “музыкальной медициной”. Он полагал, “что музыка во многом содействует здоровью, если пользоваться ею соответственно подобающим ладам, так как человеческая душа, и весь мир в целом имеют музыкально-числовую основу”.

Вечерами проводилось хоровое пение, сопровождавшееся струнными инструментами. “Отходя ко сну, они (пифагорейцы) освобождали разум от смятения и шума, царящего в нем после проведенного дня, некоторыми напевами и специальными мелодиями и таким путем обеспечивали себе спокойный, с немногочисленными, но приятными сновидениями, сон, а, встав ото сна, снимали сонную вялость и оцепенение с помощью другого рода мелодий”.

Использованные ресурсы

- www.erudition.ru
- www.rus-lib.ru
- exsolver.narod.ru
- revolution.allbest.ru
- festival.1september.ru