Лекция № 4.
«Дифференциал и интеграл»

Специальность: «Сестринское дело»

Курс: 2

Дисциплина: «Математика»

Подготовила: преподаватель высшей категории Фёдорова Олеся Николаевна

Калуга 2010 год

Функция. Предел функции

Функцией называется соответствие при котором *каждому* значению x из некоторого множества D ($D \in R$) сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x

$y = f(x)$

x – аргумент функции (независимая переменная)

y – значение функции f (зависимая переменная)

D – область определения функции D (f) – все значения x

Все значения y – область значений функции f , E (f)

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами (x; y), где x пробегает всю область определения функции f

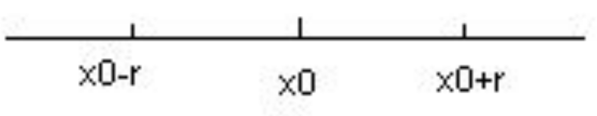
Способы задания функции

1. Аналитический (рекуррентный) – формула
2. Графический – график функции
3. Табличный – таблица зависимости x и y

Рассмотрим интервал с центром в точке x_0 и радиусом r

Окрестностью точки x_0 радиуса r называется интервал с центром в точке x_0 радиуса r, $\delta(x_0)$

Если рассматривается окрестность без самой точки x_0, то она называется проколотой $°\delta(x_0)$



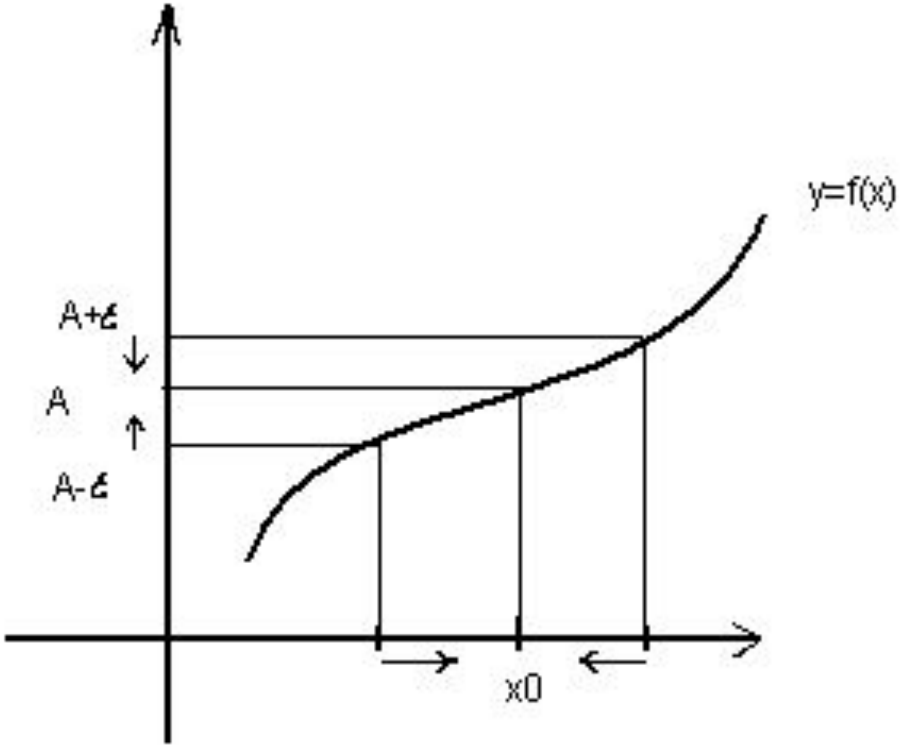
Предел функции

Число А называется **пределом функции f(x) в точке x_0**, если для любого числа $\varepsilon>0$, существует окрестность $\delta>0$, такая, что выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, для любого x из окрестности $\delta(x_0)$

$-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A}$$


y=f(x)
A+ε
A
A-ε
x0

Теоремы о пределах

Теорема о единственности предела: если предел функции существует, то он единственный (число A)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A}$$

Теорема о пределе суммы: если существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует предел их суммы равный сумме пределов функций f(x) и g(x)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Теорема о пределе произведения: если существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует предел их произведения равный произведению пределов функций f(x) и g(x)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Теорема о пределе частного: если существуют пределы функций f(x) и g(x) и предел функции g(x) не равен нулю, то существует предел их частного равный частному пределов функций f(x) и g(x)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}}$$

Следствия из теорем

Следствие 1: постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Следствие 2: если n натуральное число, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n} \qquad \boxed{\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}}$$

Следствие 3: предел многочлена $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ равен значению многочлена в точке x_0 при $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)}$$

Следствие 4: предел дробно –рациональной функции

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

равен значению этой функции в точке x_0 при $x \to x_0$ если x принадлежит области определения функции

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0)}$$

Пример:

$$\lim_{x\to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)=5\cdot 2^3-6\cdot 2^2+2-5=$$

$$=40-24+2-5=13$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{2^2-2+1}{2-3}=\frac{4-2+1}{-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

Производная функции и дифференциал

Производная функции – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращения аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x)$$

Свойства производной

Теорема: производная суммы, произведения, частного вычисляются по следующим формулам:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

Производная сложной функции:

$$h(x) = f(g(x))$$
$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример:

$$h(x) = (x^2 + 1)^5$$
$$h'(x) = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2+1)^4$$

Таблица производных

$y = c$	$y' = 0$
$y = ax^2$	$y' = 2ax$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln x$

$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Дифференциал функции

Нахождение производной называется **дифференцированием**

Дифференциал – это произведение производной функции на приращение аргумента функции y = f(x)

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Рассмотрим функцию y = x, тогда y'= 1 ⇒ dx = Δx ⇒

dy = f'(x)dx ⇒ $y' = \dfrac{dy}{dx}$ (отношение дифференциалов)

Свойства дифференциала

1. Дифференциал функции – это главная часть её приращения
2. Дифференциал функции – это линейная функция приращения аргумента или касательная к графику функции ⇒ геометрически dy = f'(x)dx - уравнение касательной в системе координат (dx; dy) ⇒

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Вычисление дифференциала функции

Пример.

$$y = x^3$$

$$y' = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$$

$$F = \frac{4}{r^2}$$

$$F' = \frac{-8}{r^3} \Rightarrow dF = \frac{-8}{r^3} dr$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Для функции $y=f(x)$ и точки x_0 можно приближенно вычислить значение функции в точке x близкой к x_0, если знать приращение функции Δy на $[x_0; x]$, то точное значение функции $f(x) = y_0 + \Delta y$, где y_0 значение функции в точке x_0

Приближенные формулы основаны на замене приращения функции Δy её дифференциалом dy

$$\Delta y = f(x) - y_0$$

$$f(x) - y_0 \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

$$f(x) \approx y_0 + dy \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Для $y = x^n$

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^{\,n} + n x_0^{\,n-1} \Delta x$$

Пример:

$$(1{,}0004)^5 = (1 + 0{,}0004)^5 \approx 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 0{,}0004 \approx 1 + 0{,}002 \approx 1{,}002$$

$$(0{,}997)^6 = (1 - 0{,}003)^6 \approx 1^6 - 6 \cdot 1^5 \cdot 0{,}003 \approx 1 - 0{,}018 \approx 0{,}982$$

Первообразная функции и интеграл

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Таблица первообразных
4. Методы интегрирования: непосредственное, замена переменной, интегрирование по частям
5. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница
6. Применение определенного интеграла: вычисление площади фигуры, длины дуги, объема тела
7. Дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными