Научно-исследовательская работа по математике:

«Знаменитые задачи древности. Трисекция угла».

«Знаменитые задачи древности. Трисекция угла».

Выполнил:
ученик 6 класса
Зеленин Никита
Руководитель:
учитель математики
Левищенко О. П.
Образовательное учреждение:
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 59» г. Курска

План работы:

План работы:

1. Введение
2. Историческая справка
3. Решение Древних греков
4. Решение пифагорейцев
5. Решение Архимеда
6. Решение по системе «ПОКО»
7. Ещё один метод решения задачи
8. Доказательство невозможности
9. Заключение
10. Список литературы

1. Введение

Математические задачи, возникающие в жизни и в практической деятельности людей, в технике, и в науке, в том числе и в математике, весьма многочисленны и многообразны.

Среди математических задач есть такие, которые пользуются популярностью; им со временем присвоили эпитеты: «знаменитые», «коварные», «неподдающиеся» и т.п.

Особенно большое внимание привлекали к себе в течение многих веков задачи, которые с давних времён известны как «знаменитые задачи древности». Под этим названием обычно формулировали три знаменитые задачи:

1. Квадратура круга;
2. Трисекция угла;
3. Удвоение куба.

Некоторые авторы причисляют к ним ещё две задачи эпохи античности: деление окружности на равные части (построение правильных многоугольников) и квадратура луночек.

Все эти задачи возникли в глубокой древности из практических потребностей людей. На первом этапе своего существования они выступали как вычислительные задачи: по некоторым правилам вычислялись приближённые значения искомых величин.

В древней Греции этим задачам придали классические формулировки:

1. **разделить данный угол на три равные части;**
2. **построить квадрат, равновеликий данному кругу;**
3. **построить ребро нового куба, объём которого был бы в 2 раза больше данного куба;**
4. **построить правильный п- угольник (разделить окружность на п равных частей);**
5. **построить прямолинейную фигуру, равновеликую данной круговой луночке.**

Эти задачи пытались решить методами геометрической алгебры, а именно: с помощью циркуля и линейки.

Простота формулировок этих задач и непреодолимые трудности, возникшие на пути их решения, способствовали росту их популярности. Над ними бились лучшие геометрические умы. Затем им отдавали силы арабские математики. В течение столетий лучшие европейские математики трудились над решением задач античности. Пытаясь найти строгие решения указанных задач, учёные получали «попутно» многие важные результаты для математики.

Впервые о знаменитых задачах математики я услышал от нашего учителя математики на факультативном занятии «Наглядная геометрия». Мне захотелось узнать: чем же знамениты эти задачи? Почему я до сих пор о них ничего не знаю? Кто автор этих задач?

Возникшие вопросы определили цели и задачи моей работы.

Цель исследования: рассмотреть подробно одну из знаменитых задач математики.

Объект исследования: задача о трисекции угла.

Предмет исследования: значимость данной задачи в математике, в жизни.

Гипотеза: знаменитые задачи античности имеют важное значение в развитии математики и носят практическую значимость до сих пор

при решении, составлении задач, применении на практике.

Цель, предмет и гипотеза исследования определили постановку **следующих задач:**

1) изучить различные источники информации по вопросу о трисекции угла;

2) рассмотреть историю возникновения знаменитых задач;

3) познакомиться с различными способами решения задачи о трисекции угла;

4) проанализировать роль и место знаменитых задач в развитии математики и их применение на практике.

2. Историческая справка

Деление любого угла на три равные части называют трисекцией угла.

Задача трисекции угла возникла в Древней Греции, примерно в V веке до н.э. из потребностей архитектуры и строительной техники. Древним грекам удалось решить задачу о трисекции прямого угла при помощи циркуля и линейки.

Можно построить треть прямого угла: поделив пополам угол правильного треугольника. А, проведя биссектрису в образовавшемся угле в 30˚, получим угол величиной 15˚ - треть угла в 45˚. Есть и другие углы, для которых трисекция выполнима. Наверное, подобные построения и вселили надежду открыть способ трисекции любого угла посредством циркуля и линейки.

В дальнейшем было также доказано, что угол вида a = p /2n, где n ∈ N , можно разделить на три равные части.

Р. Декарт высказал предположение о неразрешимости задачи о трисекции произвольного угла при помощи циркуля и линейки без засечек.

Это утверждение было доказано в 1837 году Ванцелем.

В 15 веке самаркандский ученый применил трисекцию угла к составлению весьма точных тригонометрических таблиц.

В 16 веке французский математик Ф. Виет на основе трисекции угла нашел тригонометрическое решение квадратного уравнения при помощи циркуля и линейки без засечек.

Задачу на трисекцию угла можно решить, если угол равен:

1. 90°, 45°, 22,5°,... p /2n, где n ∈ N (все эти углы образуют бесконечно малую геометрическую прогрессию со знаменателем q =1/2).
2. 180°.
3. 360°.

3. Решение Древних греков

Авторы решения	Инструм енты	Точность	Использо вание для острого угла	Для прямого угла	Для тупого угла	Для угла от 180° до 360°
Древние греки.	Циркуль и линейка без засечек	С уменьшени ем угла, точность уменьшает ся	для угла а = р /2n, где nI N	Да	Нет	Только для угла 180° и 360°

Из приведенной таблицы видно, что задача трисекции угла в 90 градусов разрешима. Любой острый угол нельзя разделить на 3 равные части при помощи циркуля и линейки, а углы а = р /2n, где nI N можно.

4. Решение пифагорейцев

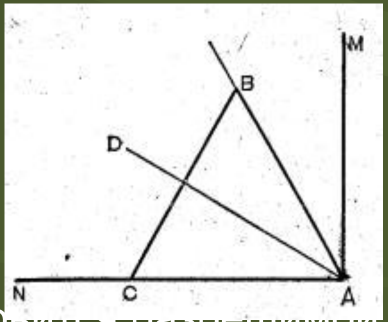
Деление прямого угла на три равные части умели производить ещё пифагорейцы, основываясь на том, что в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°. Пусть требуется разделить на три равные части прямой угол *MAN,* откладываем на полупрямой AN произвольный отрезок AC, на котором строим равносторонний треугольник *ACB*. Так как угол *CAB*

равен 60°, то угол BAM равен 30°. Построим биссектрису AD

угла *CAB*, получаем искомое деление прямого угла *MAN*

на три равных угла: NAD, DAB, BAM.

Задача о трисекции угла оказывается разрешимой и при некоторых других частных значениях угла (например, для углов в $90°/2^n$, n – натуральное число), однако не в общем случае, т.е. любой угол невозможно разделить на три равных части с помощью только циркуля и линейки. Это было доказано лишь в первой половине XIX в.



Задача о трисекции угла становится разрешимой и общем случае, если не ограничиваться в геометрических построениях одними только классическими инструментами, циркулем и линейкой.

5. Решение Архимеда

Решение Архимеда

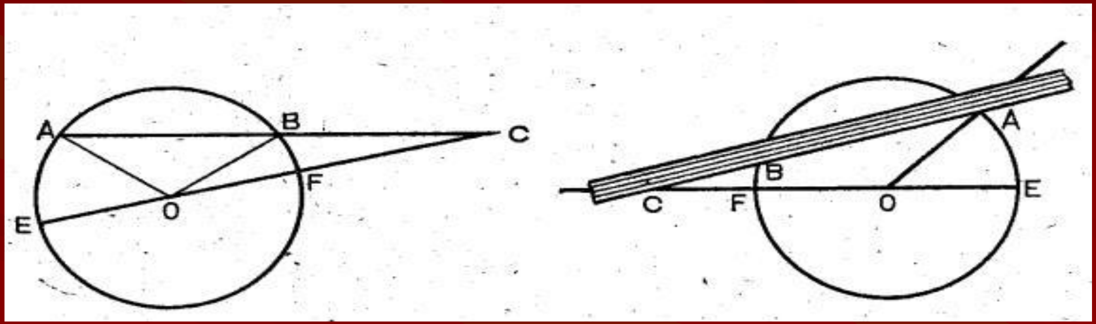


Рис. 4 Рис. 5

Интересное решение задачи о трисекции угла дал Архимед в своей книге «Леммы», в которой доказывается , что если продолжить хорду АВ (рис.4) окружности радиуса *r* на отрезок ВС = *r* и провести через *С* диаметр FE , то дуга *BF* будет втрое меньше дуги *AE*. Действительно на основе теорем о внешнем угле треугольника и о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника имеем:

AOE = OAB + ACO,

OAB = ABO, ACO = BOC

значит, AOE = 3 BOC

Отсюда следует так называемый способ «вставки» для деления на три равные части угла *AOE*. Описав окружность с центром *O* и радиусом и , проводим диаметр . Линейку *CB* на которой нанесена длина радиуса *r* (например, помощью двух штрихов), прикладываем и двигаем так, чтобы её точка *С* скользила по продолжению диаметра , а сама линейка всё время проходила бы через точку *A* окружности, пока точка *B* линейки не окажется на окружности. Тогда угол *BCF* и будет искомой третьей частью угла *AOE* (Рис.5). Как видно, в этом приёме используется вставка отрезка *CB* между продолжением диаметра *EF* и окружностью так, чтобы продолжение отрезка *CB* прошло через заданную точку *A* окружности. В указанном выше построении применяется, помимо циркуля, не просто линейка как инструмент для проведения прямых, а линейки с делениями, которая даёт длину определённого отрезка.

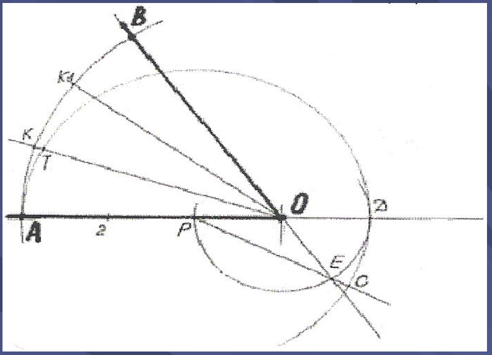
6. Решение по системе "ПОКО"

Предложен простой и доступный для выполнения в полевых условиях способ геометрического разделения плоского угла на три равные части по системе «ПОКО», при котором не требуется применения сложных инструментов, а достаточно использовать циркуль и линейку без делений. Так, чтобы разделить заданный плоский угол АОВ на три равные части (секции), выполняют(см. рисунок) следующие построения:

В заданном углу АОВ продлевают его стороны за вершину угла в точке О.

Из точки О проводят циркулем дугу АВ произвольным радиусом.

Отрезок АО делят обычным способом на три равные части (точки 2 и Р).



Разделение заданного угла на три равные части по системе «ПОКО».

Проводят из точки О, как из центра, циркулем дугу радиусом ОР, которая пересечет продолжение сторон заданного угла за точку О в точках Д и Е. При этом отрезок ОД по величине составит 1/3 длины отрезка АО, а величина дуги ДЕ составит 1/3 от величины дуги АВ.

Делят отрезок АД пополам обычным способом (точка Р), и из точки Р, как из центра, проводят циркулем полуокружность радиусом АР, которая пересечет продолжение отрезка АО в точке Д. Проводят луч из точки Р через точку Е, который пересечет в точке С полуокружность с центром в точке Р.

Откладывают на полуокружности с центром в точке Р от точки А дугу АТ, равную дуге ДС.

Проводят луч из точки О через точку Т, который пересечет дугу АВ в точке К. При этом величина дуги АК составит точно 1/3 величины дуги АВ.

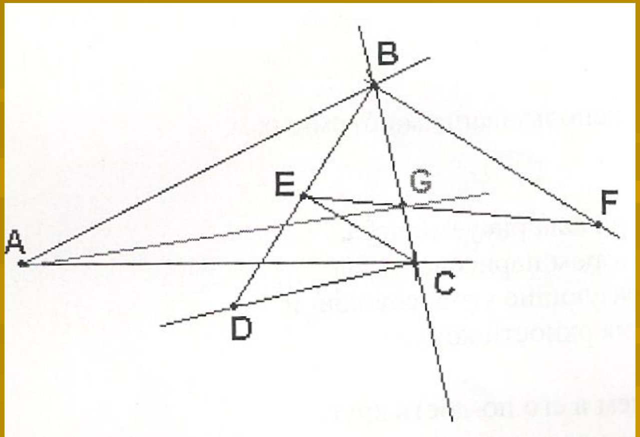
Откладывают на дуге АВ от точки К дугу КК!, равную дуге АК, проводят лучи из точки О через точки К и К1, получают три равные секции в заданном углу АОВ.

Таким образом, заданный угол АОВ простым геометрическим построением делится на три равные части. При этом используются всего лишь простейшие

7. Ещё один метод решения задачи

Алгоритм решения задачи:

1. С помощью циркуля определяются точки B и C таким образом, что AB=AC
2. Проводится прямая через точки BC
3. В точке C строится перпендикуляр к прямой BC
4. Определяется точка D таким образом, что BC=CD
5. В прямоугольном треугольнике BCD опускаем перпендикуляр на гипотенузу DB (получаем точку E и прямоугольный треугольнике CEB)
6. Из точки B проводим прямую параллельную отрезку EC
7. На этой прямой находим точку F таким образом, что BF=2*EC
8. Проводим отрезок EF, определяя точку G, так как угол CEF=30гр., то отрезок CG=BC/3
9. Поделить отрезок BG на две равные части не составляет никакого труда, таким образом, задача трисекции угла решена.



8. Доказательство невозможности

Уже в умах древнегреческих математиков зародилась мысль о том, что средствами геометрической алгебры эти задачи не разрешить. И лишь в 19 веке было строго доказано, что все эти задачи неразрешимы с помощью циркуля и линейки.

Французский математик П. Ванцель в 1837 г. первым строго доказал, что невозможно осуществить трисекцию циркулем и линейкой. Пусть β = α/3. По известной формуле, cos 3α = = 4 cos3 β - 3 cos β. Тогда для величины x = 2 cos β   получается уравнение x3 – 3x - a = 0, где a = 2 cos α . Геометрическая задача трисекции данного угла а циркулем и линейкой разрешима тогда и только тогда, когда полученное алгебраическое уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Возьмём, например, α = 60°. Тогда уравнение примет вид x3 – 3x - 1 = 0. Оно неразрешимо в квадратных радикалах, а потому и трисекция с помощью циркуля и линейки в данном случае невозможна. Тем более она невозможна в общем случае. Интересно, что вообще для углов вида 360°/n с целым п трисекцию удаётся осуществить тогда и только тогда, когда n не делится на 3.

Задача о трисекции угла в общем случае не разрешима при помощи циркуля и линейки, но это вовсе не значит, что данную задачу нельзя решить другими вспомогательными средствами.

Первый из древнегреческих учёных, кто дал строгое решение задачи о трисекции любого острого угла при помощи дополнительных вспомогательных средств, был Гипий из Элиды. Он применил для решения задачи о трисекции угла трансцендентную кривую, которую позже Лейбниц назвал в 17 веке квадратрисой.

Вспомогательные средства использовали и другие учёные Древней Греции. Так, например, Никомед во 2 веке до н. э. открыл кривую Конхоиду и применял её при решении задач трисекции угла и удвоения куба.

Но построить конхоиду Никомеда было достаточно сложно. Поэтому для решения задачи трисекции угла использовали метод вставок, положив в основу идеи Никомеда.

Таким образом, учёным Древней Греции удалось найти строгое решение задачи трисекции угла, но только с помощью дополнительных вспомогательных средств.

Другие весьма оригинальные, но довольно сложные способы решения задачи о трисекции угла дали учёные Декарт, Ньютон, Клеро, Шаль. Все эти решения основаны на отыскании точек пересечения конического сечения с окружностью.

А впервые использовал конические сечения для решения задачи о трисекции угла Папа Александрийский.

Для достижения указанной цели придумано много механических приборов, которые называются трисекторами. Простейший трисектор легко изготовить из плотной бумаги, картона или тонкой жести. Он послужит подсобным чертёжным инструментом.

Трисектор и схема его применения. На рис. 143 трисектор изображен в натуральную величину (заштрихованная фигура). Примыкающая к полукругу полоска *AB* равна по длине радиусу полукруга. Край полоски *BD* составляет прямой угол с прямой *AC;* он касается полукруга в точке В; длина этой полоски произвольна. На том же рисунке показано употребление трисектора. Пусть, например, требуется разделить на три равные части угол *KSM*.

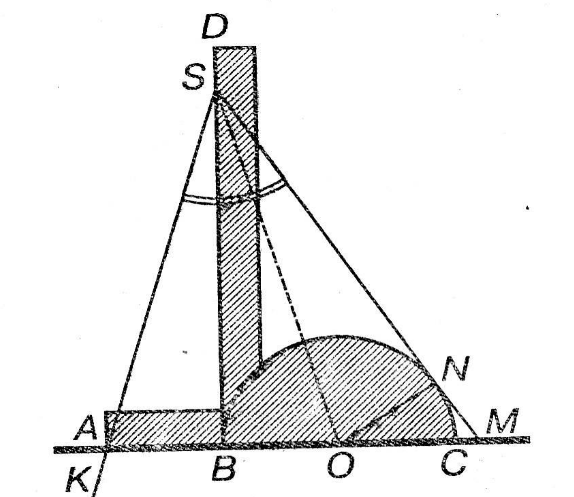


Рис. 143. Трисектор и схема его употребления.

Трисектор помещают так, чтобы вершина угла S находилась на линии BD, одна сторона угла прошла

через точку *A,* а другая сторона коснулась полукруга. Затем проводят прямые *SB* и *SO,* и деление данного угла на три равные части окончено. Для доказательства соединим отрезком прямой центр полукруга О с точкой касания *N.* Легко убедиться в том, что треугольник *ASB* равен треугольнику *SBO,* а треугольник *SBO* равен треугольнику OSN. Из равенства этих трех треугольников следует, что углы *ASB, BS0* и 0SN равны между собой, что и требовалось доказать.

Такой способ трисекции угла не является чисто геометрическим; его скорее можно назвать механи ческим.

9. Заключение

Итак, было доказано, что знаменитые задачи невозможно решить только циркулем и линейкой. Но ужу постановка задачи – «доказать неразрешимость» - была смелым шагом вперёд.

Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре.

Немало преуспели в нестандартных и различных приближённых решениях любители математики – среди них 3 знаменитые задачи древности особенно популярны. Задачи кажутся доступными любому: вводят в заблуждение их простые формулировки.

До сих пор редакции математических журналов время от времени получают письма, авторы которых пытаются опровергнуть давно установленные истины и подробно излагают решение какой – либо из знаменитых задач с помощью циркуля и линейки.

Изучив различные информационные источники по данному вопросу, я достиг поставленной цели:

1) узнал формулировки знаменитых задач, их суть;

2) проследил историю развития известных задач;

3) открыл для себя имена учёных – математиков, занимавшихся «коварными задачами»;

4) научился применять методы геометрической алгебры для решения задач.

Моя гипотеза о важности древних задач, их применении в практической деятельности – подтвердилась.

С пользой прошло время сбора материала по теме. Я научился выбирать главное из обилия литературы, сравнивать различные способы решения задач, систематизировать материал.

Попытки решить эти задачи с помощью методов геометрической алгебры способствовали попутным открытиям математиков, изготовлению различных технических приспособлений, помогающих разделить угол на 3 равные части.

Заинтересовали меня и другие знаменитые задачи: о квадратуре круга, удвоении куба. Некоторые мои одноклассники занимались изучением этих задач. В дальнейшем мы планируем выступить со своими исследовательскими работами перед учениками – любителями математики, во время предметной недели математики, традиционно проводимой в нашей школе.

10. Литература и источники из Интернета:

- «Энциклопедия для детей. Математика» Аванта+ Москва 2004г., с. 321-322.
- http:// demo.karelia.ru
- http:// cultinfo.ru
- http:// inventors.ru