МОУ «СОШ №14»

Решение задач с помощью дробно-рациональных выражений

8 класс

г.Череповец

«Успех – это не пункт назначения.

Это движение».

Т. Фастер.

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такие уравнения называют рациональным уравнением.

Рациональные уравнения

Целые рациональные уравнения

$$\frac{2x+3}{5}=5x;$$

$$x^2+6x+8=0;$$

$$\frac{x+5}{4}=\frac{x-9}{6}.$$

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{2x+3}{5+x}=4x;$$

$$\frac{x^2+6x+8}{x+2}=0;$$

$$\frac{x+5}{4x}=\frac{x-9}{6}.$$

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

- Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- Умножить обе части уравнения на этот общий знаменатель,
  чтобы получить целое уравнение;
- Решить полученное целое уравнение;
- Исключить корни, обращающие каждый знаменатель в нуль
  или найти ОДЗ (Область допустимых значений переменных в знаменателях данных дробей)

- ***Задачи на движение по местности.***
- ***Задачи на движение по воде.***
- ***Задачи на работу.***
- ***Задачи на нахождение дробей и т.д.***

s – *расстояние*, ***v*** – *скорость*, **t** - *время*

$s = vt$

$t = s : v$

~~$s = v : t$~~

$v = s : t$

~~$t = s \cdot v$~~

~~$t \cdot v = s$~~

~~$v = t : s$~~

$v \cdot t = s$

выход

Устные упражнения:

- **1. При каких значениях переменной существует данная дробь**
- **а)** $\frac{3+6a}{3-6a}$ **б)** $\frac{a+1}{a^2-4}$ **?**
- **2. Разложите на множители**
- **а)** $x^2 - 2xy + y^2 - 25$ **б)** $x^2 + 8x - 9$

3. Решите уравнения:

$$\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$$

$$x \neq -5$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$Ответ: 5$$

$$\frac{2x^2}{2x-3} = \frac{3x}{2x-3}$$

$$2x - 3 \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$$

$$2x^2 = 3x$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x-3) = 0$$

$$x = 0 или x = \frac{3}{2}$$

Ответ: 0

Решение уравнений.

Вариант 1.

$$\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$$

Вариант 2.

$$\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+3}$$

Вариант 3.

$$\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$$

Вариант 4.

$$\frac{1+5x}{x+1}=\frac{2+x}{x}$$

О т в е т ы:

I вариант: $x_1 = -1$, $x_2 = -27$ $(x \neq -7;\ x \neq 1)$

II вариант: $x = 0{,}2$ $(x \neq 0{,}5;\ x \neq -3)$

III вариант: $x = \frac{2}{9}$ $(x \neq 0{,}5;\ x \neq -0{,}5)$

IVвариант: $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}5$ $(x \neq -1;\ x \neq 0)$.

Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 ч?

Пусть x ч – время, затраченное на дорогу от озера до деревни. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Скорость	Время	Расстояние
От озера	15 км/ч	x ч	$15x$ км
От деревни	10 км/ч	$(1 - x)$ ч	$10(1 - x)$ км

1 ч

	Скорость	Время	Расстояние
От озера	15 км/ч	x ч	$15x$ км
От деревни	10 км/ч	$(1 - x)$ ч	$10(1 - x)$ км

Расстояние одно и то же, т.е одинаковое.

А. $15x = 10(1 - x)$ — **верно**

Б. $\frac{15}{x} + \frac{10}{1 - x} = 1$ — $\cancel{v \cdot t}$

В. $15x + 10(1 - x) = 1$ — $\cancel{s_1 + s_2 = t}$

Г. $15(1 - x) = 10x$ — $\cancel{v_1 \cdot t_2 = v_2 \cdot t_1}$

выход

Лыжник от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 12 км/ч. Сколько времени ушло у него на обратную дорогу, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 3 ч?

Пусть x ч – время на обратную дорогу. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Скорость	Время	Расстояние
От озера	15 км/ч	$(3 - x)$ ч	$15(3 - x)$ км
От деревни	12 км/ч	x ч	$12x$ км

3 ч

	Скорость	Время	Расстояние
От озера	15 км/ч	$(3 - x)$ ч	$15(3 - x)$ км
От деревни	12 км/ч	x ч	$12x$ км

Расстояние одно и то же, т.е одинаковое.

А. $15(3 - x) = 12x$ — **верно**

Б. $\frac{15}{x} + \frac{12}{3 - x} = 3$ — $\cancel{v \cdot t}$

В. $15x + 12(3 - x) = 3$ — $v_1 \cdot t_2 \cancel{+} v_2 \cdot t_1$

Г. $15x = 12(3 - x)$ — $v_1 \cdot t_2 \cancel{=} v_2 \cdot t_1$

выход

Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 20 км ему потребовалось на 20 мин меньше, чем второму. Чему равны скорости велосипедистов?

Пусть x км/ч – скорость первого велосипедиста. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый велосипедист	20	на 3 км/ч больше	$\frac{20}{x}$
Второй велосипедист	20	на 3 км/ч меньше	$\frac{20}{x-3}$

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый велосипедист	20	x	$\frac{20}{x}$
Второй велосипедист	20	$x - 3$	$\frac{20}{x-3}$

Время первого велосипедиста на 20 мин меньше, чем время второго.

А. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x-3} = \frac{1}{3}$

$t_1 < t_2$

Б. $\frac{20}{x-3} - \frac{20}{x} = \frac{1}{3}$

верно

В. $\frac{20}{x-3} - \frac{20}{x} = 20$

~~**20 мин!**~~

Г. $20x - 20(x - 3) = 20$

~~$S : V$~~

ВЫХОД

Скорость первого пешехода на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 5 км ему потребовалось на 15 мин меньше, чем второму. Чему равны скорости пешеходов?

Пусть x км/ч – скорость первого пешехода. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый пешеход	5	на 1 км/ч больше	$\frac{5}{x}$
Второй пешеход	5	на 1 км/ч меньше	$\frac{5}{x-1}$

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый пешеход	5	x	$\frac{5}{x}$
Второй пешеход	5	$x-1$	$\frac{5}{x-1}$

Время первого пешехода на 15 мин меньше, чем время второго.

А. $\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x} = \frac{1}{4}$ — **верно**

Б. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x-1} = \frac{1}{4}$ — $t_1 < t_2$

В. $\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x} = 15$ — ~~**15 мин!**~~

Г. $5x - 5(x-1) = 15$ — ~~$s = v$~~

ВЫХОД

Расстояние по реке между двумя деревнями равно 2 км. На путь туда и обратно моторная лодка затратила 22 мин. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Пусть x ч – собственная скорость лодки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Расстояние	Скорость	Время
По течению	2 км	$(x+1)$ км/ч	$\frac{2}{x+1}$ ч
Против течения	2 км	$(x-1)$ км/ч	$\frac{2}{x-1}$ ч

	Расстояние	Скорость	Время
По течению	2 км	$(x + 1)$ км/ч	$\frac{2}{x+1}$ ч
Против течения	2 км	$(x - 1)$ км/ч	$\frac{2}{x-1}$ ч

На весь путь по течению и против течения лодка затратила 22 мин.

А. $2(x + 1) + 2(x - 1) = 22$

~~S · V~~

Б. $\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{11}{30}$

верно

В. $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} = \frac{11}{30}$

~~V : S~~

Г. $\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 22$

~~22 мин~~

выход

Моторная лодка курсирует между двумя пристанями, расстояние между которыми по реке равно 4 км. На путь по течению у нее уходит на 3 мин меньше, чем на путь против течения. Чему равна скорость течения реки, если известно, что скорость лодки в стоячей воде равна 18 км/ч?

Пусть x ч – скорость течения реки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

	Расстояние	Скорость	Время
По течению	4 км	$(18 + x)$ км/ч	$\frac{4}{18 + x}$ ч
Против течения	4 км	$(18 - x)$ км/ч	$\frac{4}{18 - x}$ ч

	Расстояние	Скорость	Время
По течению	4 км	$(18 + x)$ км/ч	$\frac{4}{18 + x}$ ч
Против течения	4 км	$(18 - x)$ км/ч	$\frac{4}{18 - x}$ ч

Время по течению на 3 мин меньше, чем время против течения.

А. $\frac{4}{18 - x} - \frac{2}{18 + x} = \frac{1}{20}$ — **верно**

Б. $\frac{18 - x}{4} - \frac{18 + x}{4} = 3$ — ~~$v \cdot s$~~

В. $\frac{4}{18 + x} - \frac{2}{18 - x} = \frac{1}{20}$ — $t_1 < t_2$

Г. $4(18 + x) - 4(18 - x) = 3$ — ~~$s \cdot v$~~

выход

От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до поселка?

Пусть x км – расстояние от города до поселка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

	Расстояние (км)	Время (ч)	Скорость (км/ч)
Проехал	x	3	$\frac{x}{3}$
Мог проехать	x на	2 ше	$\frac{x}{2}$

	Расстояние (км)	Время (ч)	Скорость (км/ч)
Проехал	x	3	$\frac{x}{3}$
Мог проехать	x	2	$\frac{x}{2}$

Увеличится скорость автомобиля на 25 км/ч.

А. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 25$ — **верно**

Б. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 25$ — $v_1 < v_2$

В. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x} = 25$ — ~~$t \cdot s$~~

В. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x} = 25$ — ~~$t \cdot s$~~

выход

От дома до школы Коля обычно едет на велосипеде со скоростью 10 км/ч. Чтобы приехать в школу раньше на ¼ ч, ему надо ехать со скоростью 12 км/ч. Чему равно расстояние от дома до школы?

Пусть x км – расстояние от дома до школы. Какое уравнение соответствует условию задачи?

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Едет	x	10	$\frac{x}{10}$
Надо ехать	x	12	$\frac{x}{12}$

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Ехал	x	10	$\frac{x}{10}$
Надо ехать	x	12	$\frac{x}{12}$

Приедет раньше на ¼ часа.

А. $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$ — **верно**

Б. $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = 15$ — ~~**15 мин**~~

А. $\frac{x}{12} - \frac{x}{10} = \frac{1}{4}$ — $t_2 < t_1$

Б. $\frac{x}{12} - \frac{x}{10} = 15$ — $t_2 < t_1$

выход

Задачи ГИА - 2010

Вариант 1.
Какова скорость автобуса?

Вариант 2.
Какова скорость автобуса?

Вариант 3.
Какова скорость велосипедиста?

Скорость автобуса на 25 км/ч меньше скорости автомобиля. Расстояние от города до поселка автобус проезжает за 3 ч, а автомобиль за 2 ч. Какова скорость автобуса?

Пусть скорость автобуса x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

$$s = vt$$

	Скорость	Время	Расстояние
Автобус	на 25 км/ч меньше	3 ч	$3x$ км
Автомобиль	на 25 км/ч больше	2 ч	$2(x + 25)$ км

	Скорость	Время	Расстояние
Автобус	x км/ч	3 ч	$3x$ км
Автомобиль	$(x + 25)$ км/ч	2 ч	$2(x + 25)$ км

Расстояние одно и то же, т.е одинаковое.

А. $3x = 2(x + 25)$ — **верно**

Б. $2x = 3(x - 25)$ — $\cancel{v_1 \cdot t_2}$

В. $2x = 3(x + 25)$ — $\cancel{v_1 \cdot t_2}$

Г. $3x = 2(x - 25)$ — $\cancel{v_2 \cdot t_2}$

выход

Скорость автобуса на 27 км/ч больше скорости велосипедиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 5 ч, а автобус за 2 ч. Какова скорость автобуса?

Пусть скорость автобуса x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

$$s = vt$$

	Скорость	Время	Расстояние
Автобус	на 27 км/ч больше	2 ч	$2x$ км
Велосипедист	на 27 км/ч меньше	5 ч	$5(x - 27)$ км

	Скорость	Время	Расстояние
Автобус	x км/ч	2 ч	$2x$ км
Велосипедист	$(x - 27)$ км/ч	5 ч	$5(x - 27)$ км

Расстояние одно и то же, т.е одинаковое.

А. $5x = 2(x - 27)$

$\cancel{v_1 \cdot t_2}$

Б. $5x = 2(x + 27)$

$\cancel{v_1 \cdot t_2}$

В. $2x = 5(x + 27)$

$\cancel{v_2 \cdot t_2}$

Г. $2x = 5(x - 27)$

верно

выход

Скорость велосипедиста на 36 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 6 ч, а мотоциклист за 2 ч. Какова скорость велосипедиста?

Пусть скорость велосипедиста x км/ч. Какое уравнение соответствует условию задачи?

s = vt

	Скорость	Время	Расстояние
Велосипедист	на 36 км/ч меньше	6 ч	$6x$ км
Мотоциклист	на 36 км/ч больше	2 ч	$2(x + 36)$ км

	Скорость	Время	Расстояние
Велосипедист	x км/ч	6 ч	$6x$ км
Мотоциклист	$(x + 36)$ км/ч	2 ч	$2(x + 36)$ км

Расстояние одно и то же, т.е одинаковое.

А. $6x = 2(x - 36)$ — $\cancel{v_2 \cdot t_2}$

Б. $6x = 2(x + 36)$ — **верно**

В. $2x = 6(x - 36)$ — $\cancel{v_1 \cdot t_2}$

Г. $2x = 6(x + 36)$ — $\cancel{v_1 \cdot t_2}$

выход