

Применение теоремы Пифагора и пифагоровых троек для решения геометрических задач.

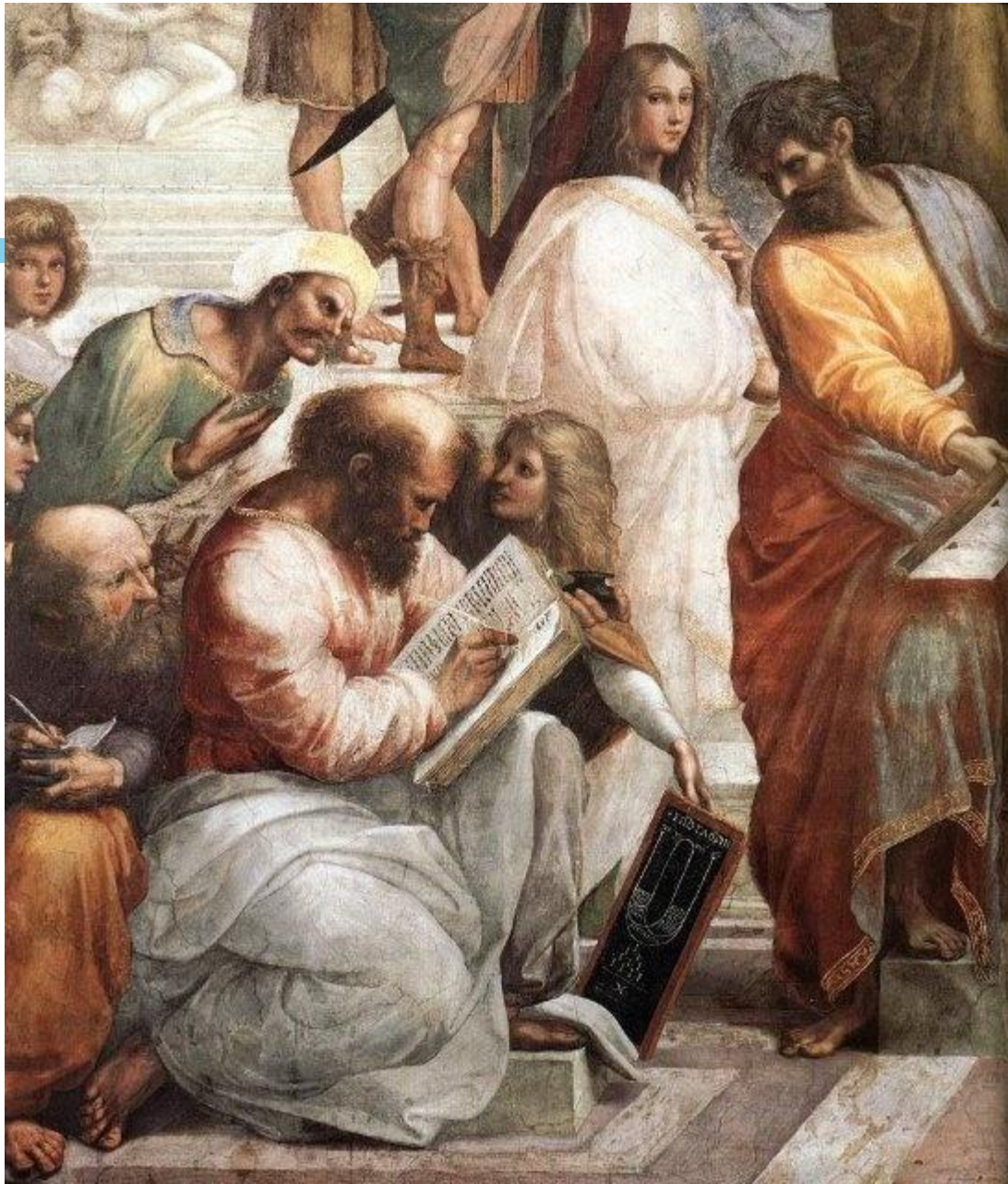


Автор:

Линдфуйт Наталья,
ученица 9 класса

Руководитель:

Лонская Татьяна
Александровна,
учитель математики



Объект исследования:

Теорема Пифагора и пифагоровы тройки.

Предмет исследования:

Применение пифагоровых троек для быстрого решения геометрических задач.

- **Цель:** Собрать сведения о пифагоровых тройках и их применения для решения практических задач курса геометрии и задач ЕГЭ типа В 4..
- **Гипотеза:** Мы сможем найти способы быстрого решения геометрических задач и заданий ЕГЭ типа В 4, если будем знать приемы формирования пифагоровых триад и применять таблицы пифагоровых троек.

Задачи:

- 1. Показать уникальность открытия Пифагора и дать определение понятия пифагоровых троек .
- 2. Описать простые способы формирования пифагоровых троек.
- 3. Проанализировать возможности применения теоремы Пифагора, применения полученных знаний о пифагоровых тройках для их практического применения при решении задач.

Методы исследования:

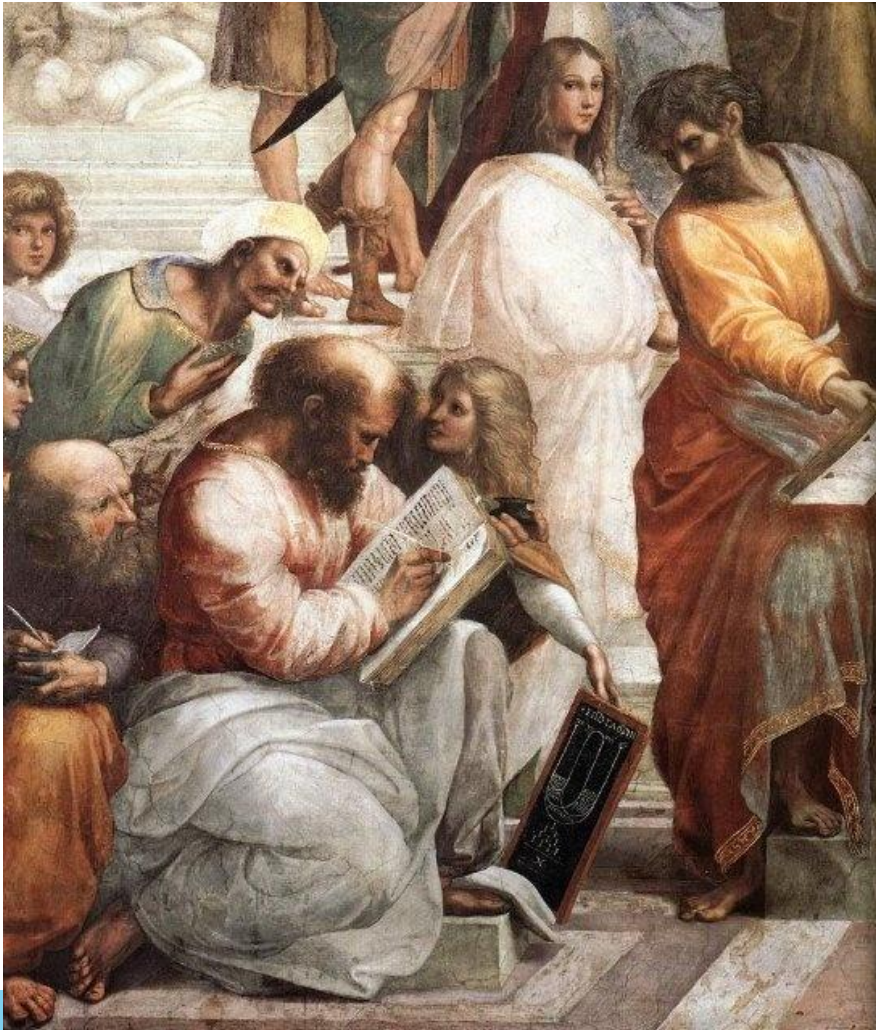
- методы теоретического исследования (анализ литературы, поиск источников);
- анализ ряда задач учебника геометрии 7-9 класса;
- методы эмпирического исследования (изучение опыта решения геометрических задач, нахождение рациональных способов).

Практическая значимость исследования определяется:

- проведением исследования по проблеме формирования пифагоровых троек (описание простых способов)
- описанием опыта применения знаний о пифагоровых тройках;
- разработкой рекомендаций ученикам 8-11 класса при решении задач, материалы исследования могут быть использованы учениками и учителями при преподавании курса геометрии.

Глава 1. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки

1.1 Биография Пифагора

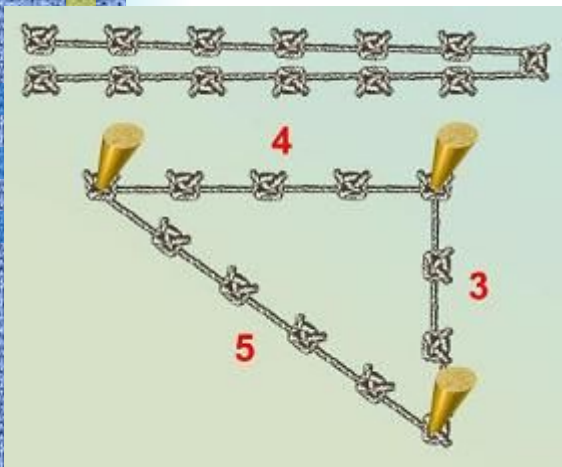


- *Пифагор Самосский* — древнегреческий философ и математик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев

1.3 Пифагоровы тройки и способы их формирования

- Пифагоровы тройки – это тройки (x, y, z) натуральных чисел x, y, z , для которых выполняется равенство

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$



Способ 1.

- Обычно пользуются таким приемом подбора решений:
произвольные взаимно простые числа m и n , $(m,n)=1$, $m > n$ одно из них четное, а другое нечетное, и формируют триаду
 $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$ (1)

- Триаду (a, b, c) принято называть **примитивной** (основной), если a и b – взаимно простые числа, т. е. $(a, b) = 1$
формула $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$ дает все возможные примитивные триады.

2. Следующий приём возник из наблюдений над некоторыми свойствами триад.

а) Пусть первое число триады (длина одного катета) – нечетное, тогда, например, для триады (3; 4; 5) наблюдаем: $3^2 = 4+5$,
(5; 12; 13) наблюдаем: $5^2 = 12+13$,
(7; 24; 25) - $7^2 = 24+25$ и т. д.

A

Эти наблюдения показывают приём подбора:
взять нечетное число , возвести его в квадрат
и результат представить в виде суммы двух
последовательных чисел; слагаемые будут
вторым и третьим членами триады.

- Пример: триада (13;84;85),
 $13^2 = 84+85$
действительно $13^2 + 84^2 = 85^2$.

б) пусть первое число триады – четное. Тогда, например, для триады **(3; 4; 5)** наблюдаем:
 $4=2(3+5)$, для триады **(8; 15; 17)** — **$8=2(15+17)$**

и т. д.

Наблюдения позволяют сделать вывод:

- Взять число, кратное 4, его квадрат разделить на 2 и результат представить как сумму двух последовательных нечетных чисел; слагаемые будут вторым и третьим членами триады.
- Пример: **(16; 63; 65)** **$16^2=2(63+65)$**

Свойства пифагоровых троек

Свойство 1. Числа, входящие в простейшую пифагорову тройку, попарно взаимно просты.

- Действительно, если два из них, например x и y имеют простой общий делитель p , то из равенства (1) следует, что на p делится и третье число z . Это противоречит тому, что тройка – простейшая.
- **Следствие.** В простейшей пифагоровой тройке только одно число может быть чётным.
- **Свойство 2.** В простейшей пифагоровой тройке числа x и y не могут быть одновременно нечётными.

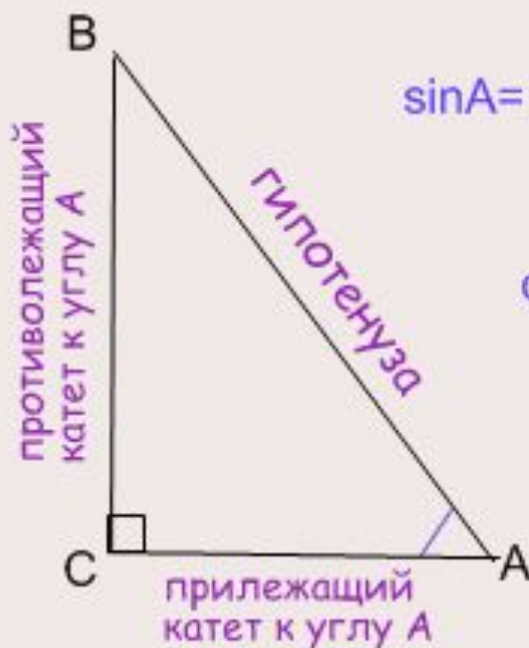
Свойство 3.

- Из данного пифагорова треугольника со сторонами (a, b, c) можно получить бесконечное множество подобных ему треугольников со сторонами (ka, kb, kc) , где k – произвольное натуральное число.

Таблица **1**. Прimitives пифагоровы тройки
для $m \leq 10$

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	4	3	5	8	1	16	63	65
3	2	12	5	13	8	3	48	55	73
4	1	8	15	17	8	5	80	39	89
4	3	24	7	25	8	7	112	15	113
5	2	20	21	29	9	2	36	77	85
5	4	40	9	41	9	4	72	65	97
6	1	12	35	37	9	8	144	17	145
6	5	60	11	61	10	1	20	99	101
7	2	28	45	53	10	3	60	91	109
7	4	56	33	65	10	7	140	51	149
7	6	84	13	85	10	9	180	19	181

Рассмотрим решение заданий, содержащихся в открытом банке заданий (адрес сайта <http://mathege.ru/or/ege/>).



$$\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

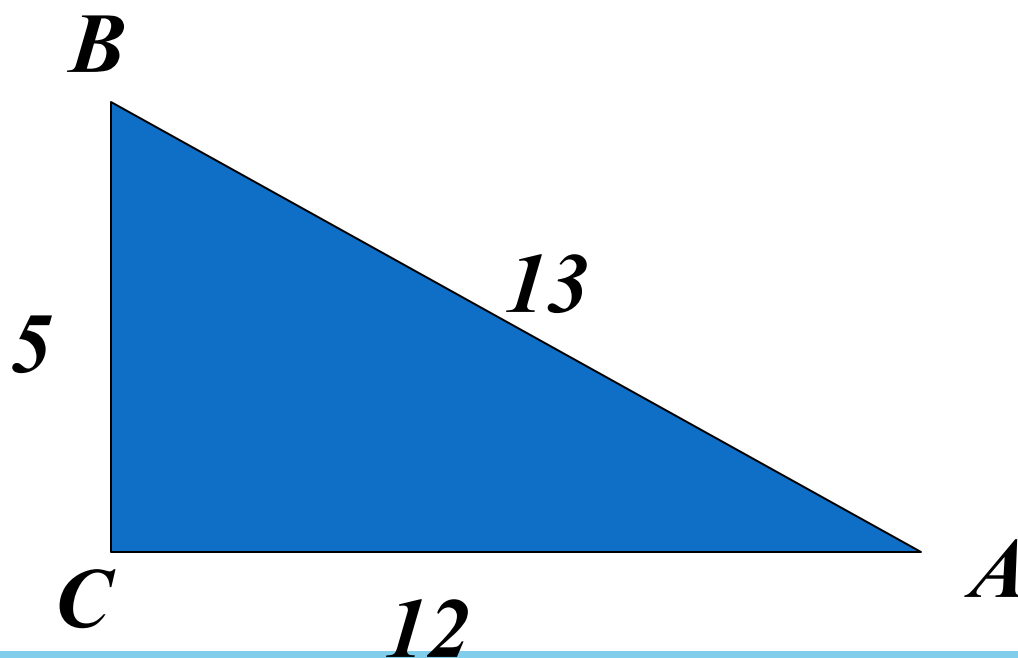
$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

Задание В4 ЕГЭ

Задание В4 (№ 4595) В треугольнике ABC угол C равен 90° ,

$$\cos B = \frac{5}{13}, AB = 13. \text{ Найдите AC.}$$



Задачи на нахождение тангенса острого угла

Задание В4 (№ 4609) В треугольнике ABC угол C равен 90° ,
 $|AB| = 10$, $|AC| = 8$. Найдите $\text{tg}A$.

- В этом задании сразу угадывается тройка (6, 8, 10). Остается только по рисунку определить отношение противолежащего катета углу A к прилежащему. $\text{tg}A = 6/10 = 0,6$

Более сложными являются задачи вида: (№ 4637)

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{7}{8}$, $AC = \sqrt{15}$.

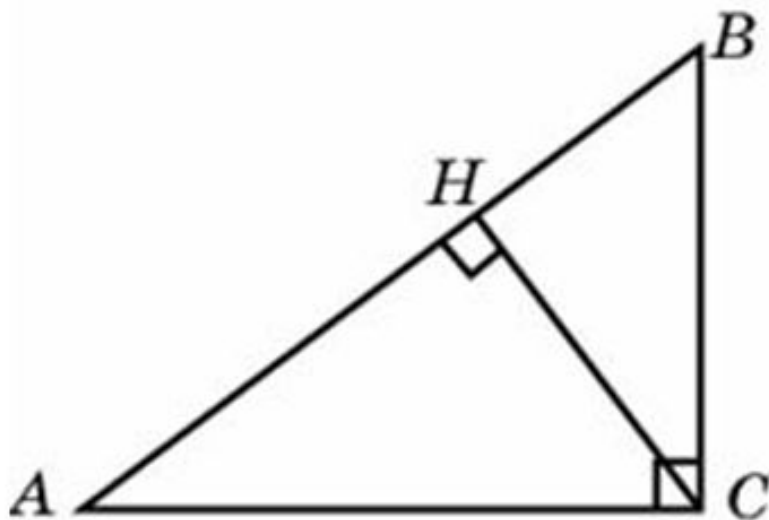
Найдите AB.

- Решение: Быстрый способ решения основан на понимании того факта, что синус угла это есть отношение сторон треугольника и следовательно стороны его можно задать как $AB = 8x$, BC (противолежащий катет) $= 7x$. $AC = \sqrt{15}$.
- По теореме Пифагора, $(8x)^2 = (7x)^2 + (\sqrt{15})^2$,
- решая уравнение найдем $x = 1$ и тогда гипотенуза $AB = 8$.

При решении заданий обращаем внимание, на то что подсказкой для использования той или иной «тройки» является значение синуса, косину и тангенса, обязательно необходим чертеж для решения заданий.

Задание В4 (№ 4811) В треугольнике ABC угол C равен 90° ,

$\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Найдите высоту CH .



Заключение

- Пифагоровы тройки находят прямое применение в проектировании множества вещей, окружающих нас в повседневной жизни. А умы учёных продолжают искать новые варианты доказательств теоремы Пифагора.

Спасибо за внимание

