

# Применение теоремы Пифагора и пифагоровых троек для решения геометрических задач.



Автор:

Линдфуйт Наталья,  
ученица 9 класса

Руководитель:

Лонская Татьяна  
Александровна,  
учитель математики



**Объект исследования:**

*Теорема Пифагора и пифагоровы тройки.*

**Предмет исследования:**

*Применение пифагоровых троек для быстрого решения геометрических задач.*

- **Цель:** Собрать сведения о пифагоровых тройках и их применения для решения практических задач курса геометрии и задач ЕГЭ типа В 4..
- **Гипотеза:** Мы сможем найти способы быстрого решения геометрических задач и заданий ЕГЭ типа В 4, если будем знать приемы формирования пифагоровых триад и применять таблицы пифагоровых троек.

## *Задачи:*

- 1. Показать уникальность открытия Пифагора и дать определение понятия пифагоровых троек .
- 2. Описать простые способы формирования пифагоровых троек.
- 3. Проанализировать возможности применения теоремы Пифагора, применения полученных знаний о пифагоровых тройках для их практического применения при решении задач.

# *Методы исследования:*

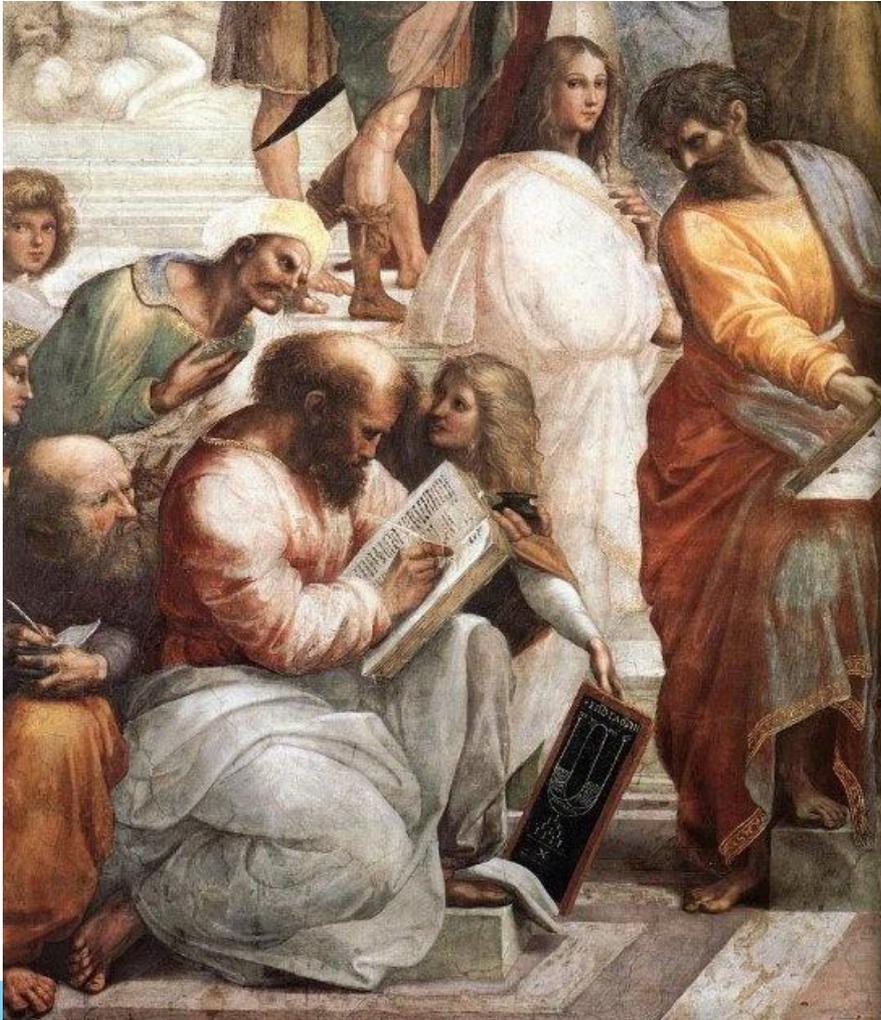
- методы теоретического исследования (анализ литературы, поиск источников);
- анализ ряда задач учебника геометрии 7-9 класса;
- методы эмпирического исследования (изучение опыта решения геометрических задач, нахождение рациональных способов).

## *Практическая значимость исследования определяется:*

- проведением исследования по проблеме формирования пифагоровых троек (описание простых способов)
- описанием опыта применения знаний о пифагоровых тройках;
- разработкой рекомендаций ученикам 8-11 класса при решении задач, материалы исследования могут быть использованы учениками и учителями при преподавании курса геометрии.

# Глава 1. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки

## 1.1 Биография Пифагора

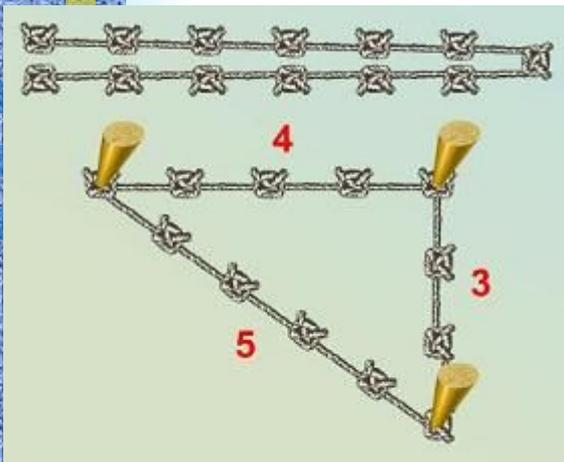


- *Пифагор Самосский* — древнегреческий философ и математик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев

## 1.3 Пифагоровы тройки и способы их формирования

- Пифагоровы тройки – это тройки  $(x, y, z)$  натуральных чисел  $x, y, z$ , для которых выполняется равенство

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$



# Способ 1.

- Обычно пользуются таким приемом подбора решений:  
произвольные взаимно простые числа  $m$  и  $n$ ,  $(m,n)=1$ ,  $m > n$  одно из них четное, а другое нечетное, и формируют триаду  
 **$(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$  (1)**

- Триаду  $(a, b, c)$  принято называть **примитивной** (основной), если  $a$  и  $b$  – взаимно простые числа, т. е.  $(a, b) = 1$   
формула  $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$  дает все возможные примитивные триады.

## 2. Следующий приём возник из наблюдений над некоторыми свойствами триад.

а) Пусть первое число триады (длина одного катета) – нечетное, тогда, например, для триады (3; 4; 5) наблюдаем:  $3^2 = 4+5$ ,  
(5; 12; 13) наблюдаем:  $5^2 = 12+13$ ,  
(7; 24; 25) -  $7^2 = 24+25$  и т. д.

# A

Эти наблюдения показывают приём подбора:  
взять нечетное число , возвести его в квадрат  
и результат представить в виде суммы двух  
последовательных чисел; слагаемые будут  
вторым и третьим членами триады.

- Пример: триада (13;84;85),  
 $13^2 = 84+85$   
действительно  $13^2 + 84^2 = 85^2$ .

б) пусть первое число триады – четное. Тогда, например, для триады **(3; 4; 5)** наблюдаем:  
 **$4=2(3+5)$** , для триады **(8; 15; 17)** —  **$8=2(15+17)$**

и т. д.

Наблюдения позволяют сделать вывод:

- Взять число, кратное 4, его квадрат разделить на 2 и результат представить как сумму двух последовательных нечетных чисел; слагаемые будут вторым и третьим членами триады.
- Пример: **(16; 63; 65)**     **$16^2=2(63+65)$**

## *Свойства пифагоровых троек*

**Свойство 1.** Числа, входящие в простейшую пифагорову тройку, попарно взаимно просты.

- Действительно, если два из них, например  $x$  и  $y$  имеют простой общий делитель  $p$ , то из равенства (1) следует, что на  $p$  делится и третье число  $z$ . Это противоречит тому, что тройка – простейшая.
- **Следствие.** В простейшей пифагоровой тройке только одно число может быть чётным.
- **Свойство 2.** В простейшей пифагоровой тройке числа  $x$  и  $y$  не могут быть одновременно нечётными.

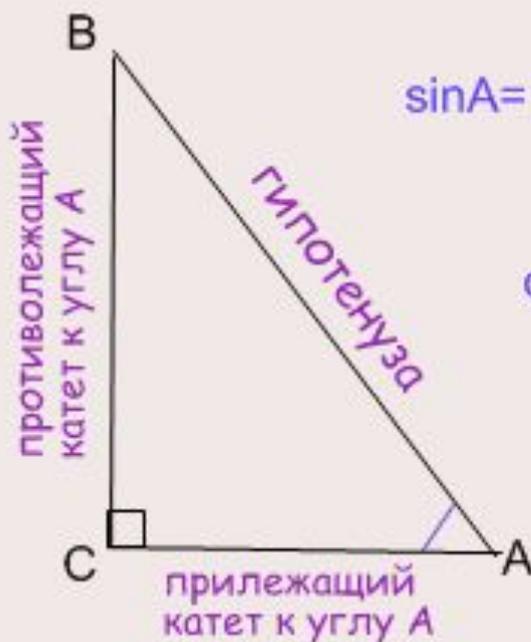
## Свойство 3.

- Из данного пифагорова треугольника со сторонами  $(a, b, c)$  можно получить бесконечное множество подобных ему треугольников со сторонами  $(ka, kb, kc)$ , где  $k$  – произвольное натуральное число.

Таблица **1**. Прimitives пифагоровы тройки  
для  $m \leq 10$

<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
2	1	4	3	5	8	1	16	63	65
3	2	12	5	13	8	3	48	55	73
4	1	8	15	17	8	5	80	39	89
4	3	24	7	25	8	7	112	15	113
5	2	20	21	29	9	2	36	77	85
5	4	40	9	41	9	4	72	65	97
6	1	12	35	37	9	8	144	17	145
6	5	60	11	61	10	1	20	99	101
7	2	28	45	53	10	3	60	91	109
7	4	56	33	65	10	7	140	51	149
7	6	84	13	85	10	9	180	19	181

Рассмотрим решение заданий, содержащихся в открытом банке заданий (адрес сайта <http://mathege.ru/or/ege/> ).



$$\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

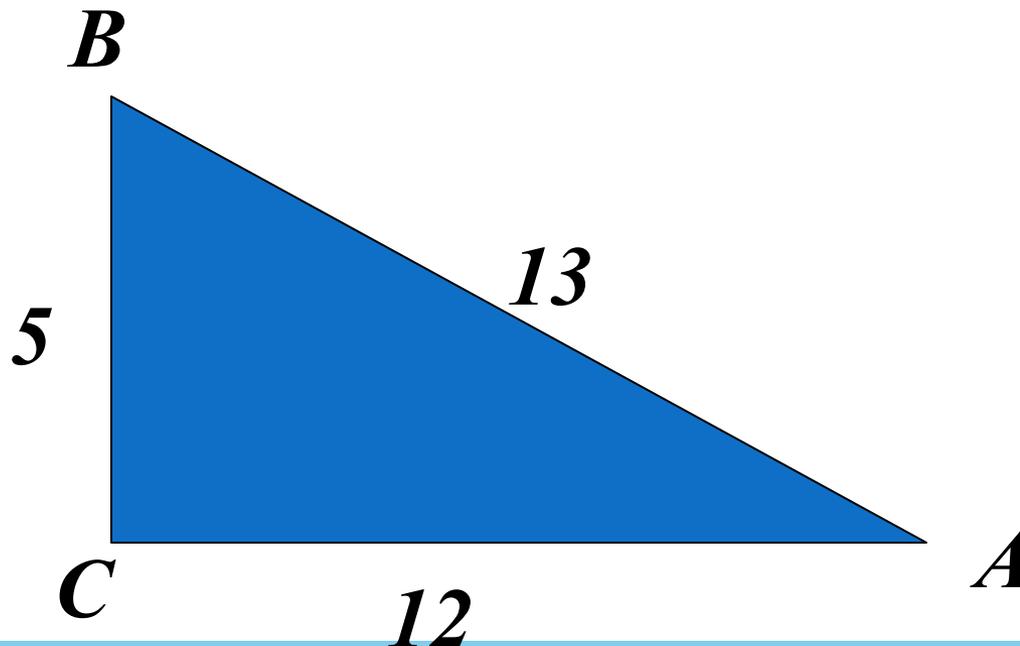
$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

# Задание В4 ЕГЭ

Задание В4 (№ 4595) В треугольнике ABC угол C равен  $90^\circ$ ,

$$\cos B = \frac{5}{13}, AB = 13. \text{ Найдите AC.}$$



## Задачи на нахождение тангенса острого угла

Задание В4 (№ 4609) В треугольнике ABC угол C равен  $90^\circ$ ,  
 $|AB| = 10$ ,  $|AC| = 8$ . Найдите  $\text{tg}A$ .

- В этом задании сразу угадывается тройка (6, 8, 10). Остается только по рисунку определить отношение противолежащего катета углу A к прилежащему.  $\text{tg}A = 6/10 = 0,6$

Более сложными являются задачи вида: (№ 4637)

В треугольнике ABC угол C равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{7}{8}$ ,  $AC = \sqrt{15}$ .

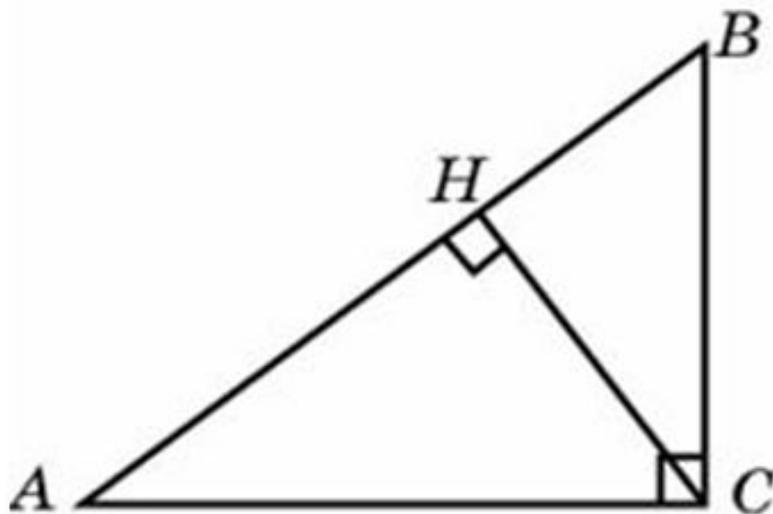
Найдите AB.

- Решение: Быстрый способ решения основан на понимании того факта, что синус угла это есть отношение сторон треугольника и следовательно стороны его можно задать как  $AB = 8x$ ,  $BC$  (противолежащий катет)  $= 7x$ .  $AC = \sqrt{15}$ .
- По теореме Пифагора,  $(8x)^2 = (7x)^2 + (\sqrt{15})^2$ ,
- решая уравнение найдем  $x = 1$  и тогда гипотенуза  $AB = 8$ .

При решении заданий обращаем внимание, на то что подсказкой для использования той или иной «тройки» является значение синуса, косину и тангенса, обязательно необходим чертеж для решения заданий.

Задание В4 (№ 4811) В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,

$\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $AC = 4$ . Найдите высоту  $CH$ .



# Заключение

- Пифагоровы тройки находят прямое применение в проектировании множества вещей, окружающих нас в повседневной жизни. А умы учёных продолжают искать новые варианты доказательств теоремы Пифагора.

Спасибо за внимание

