

Основы теории проверки статистических гипотез.

Доцент Аймаханова А.Ш.

План лекции:

1. Статистические гипотезы в медико-биологических исследованиях.
2. Параметрические критерии различий.
3. Непараметрические критерии.
4. Критерии согласия.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется **проверкой гипотез**.

Задачи статистической проверки гипотез:

- Относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H_0 .
- Из этой генеральной совокупности извлекается выборка.
- Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H_0 или принять ее.

Статистическая гипотеза - это предположение о виде распределения или о величинах неизвестных параметров генеральной совокупности, которая может быть проверена на основании выборочных показателей.

Примеры статистических гипотез:

Генеральная совокупность распределена по нормальному закону Гаусса.

Дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

Статистические ГИПОТЕЗЫ



Параметрические

Непараметрические

Нулевой гипотезой H_0 называется основная гипотеза, которая проверяется.

Альтернативной гипотезой H_1 , называется гипотеза, конкурирующая с нулевой, то есть противоречащая ей.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. $a = a_0$

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Статистическим критерием проверки гипотезы H_0 называется правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 .

Основной принцип проверки гипотез

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки X_1, X_2, \dots, X_n , из которых формируют функцию выборки $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, называемой *статистикой критерия*.

$$T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

критическая область S область \bar{S} принятия гипотезы

Возможные ошибки при проверке гипотез

Первого рода

Второго рода

Гипотеза H_0	Отвергается	Принимается
Верна	Ошибка 1-го рода	Нет ошибки
Неверна	Нет ошибки	Ошибка 2-го рода

Уровнем значимости критерия (α) называется вероятность допустить ошибку 1-го рода.

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через β .

Мощностью критерия называется вероятность недопущения ошибки 2-го рода ($1 - \beta$).

$\alpha = P(\text{отвергнуть } H_0 / H_0 \text{ верна})$ или $\alpha = P(H_1 / H_0)$

$\beta = P(\text{принять } H_0 / H_0 \text{ неверна})$ или $\beta = P(H_0 / H_1)$

$1 - \beta = P(\text{принять } H_1 / H_1 \text{ верна})$

Чем больше мощность критерия, тем вероятнее допустить ошибку 2-го рода.

Разумное соотношение между α и β находят, исходя из тяжести последствий каждой из ошибок.

Методика проверки гипотез:

1. Формирование нулевой H_0 и альтернативной H_1 гипотез исходя из выборки X_1, X_2, \dots, X_n .
2. Подбор статистики критерия $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$
3. По статистике критерия T_n и уровню значимости α определяют критическую точку $t_{кр}$, то есть границу, отделяющую область \bar{S} от S .
4. Для полученной реализации выборки $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ подсчитывают значение критерия, то есть $T_{набл} = T(X_1, X_2, \dots, X_n) = t$
5. Если $t \in S$ (например, $t > t_{кр}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_0 отвергают; если же $t \in \bar{S}$ ($t < t_{кр}$), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу H_0 .

t-критерий Стьюдента:

Общий вид:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2}}$$

Случай независимых выборок.

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

$$n_1 = n_2 = n$$

$$df = n - 1$$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2(n_1 - 1) + \sigma_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} * \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}}$$

$$n_1 \neq n_2$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

Случай зависимых выборок.

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d} \quad \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_{1i} - x_{2i})}{n}$$

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

$$df = n - 1$$

$$\bar{S}_d = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

Вывод:

- Критерий Стьюдента может быть использован для проверки гипотезы о различии средних только для двух групп.
- Критерий Стьюдента применяется в случае малых выборок, что характерно для медико-биологических экспериментов.
- Если схема эксперимента предполагает большее число групп, воспользуйтесь дисперсионным анализом.
- Если критерий Стьюдента был использован для проверки различий между несколькими группами, то истинный уровень значимости можно получить, умножив уровень значимости, на число возможных сравнений.

F- критерий Фишера:

$$F_{\text{эмн}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

$$df_1 = n_1 - 1, \quad df_2 = n_2 - 1$$

Критерии различия называют **непараметрическими**, если он не базируется на предположении о типе распределения генеральной совокупности и не использует параметры этой совокупности.

Применение непараметрических методов целесообразно:

- на этапе разведочного анализа;
- при малом числе наблюдений (до 30);
- когда нет уверенности в соответствии данных закону нормального распределения.

Непараметрические критерии представлены основными группами:

- критерии различия между группами независимых выборок;
- критерии различия между группами зависимых выборок.

Различия между независимыми группами

- U критерий Манна-Уитни
- двухвыборочный критерий Колмогорова – Смирнова.

Различия между зависимыми группами

- z – критерий знаков
- T – критерий Уилкоксона парных сравнений

Критерии согласия:

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

- ✓ Пирсона (Хи-квадрат),
- ✓ Колмогорова,
- ✓ Фишера,
- ✓ Смирнова.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

H_0 : «между эмпирическим распределением и теоретической моделью нет никакого различия».

Δ_1	Δ_2	...	Δ_k
np_1	np_2	...	np_m

Если эмпирические частоты (ni) сильно отличаются от теоретических (np_i), то проверяемую гипотезу H_0 следует отвергнуть; в противном случае-принять.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n -объем выборки

k -число интервалов разбиения выборки

n_i -число значений выборки, попавших в i -й интервал

np_i - теоретическая частота попадания значений случайной величины X в i -й интервал.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

или

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

O-фактически наблюдаемое число

E- теоретически ожидаемое число

Поправка Йейтса

$$\chi^2 = \sum \frac{(|O - E| - \frac{1}{2})^2}{E}$$

Для распределения признаков, которые принимают всего 2 значения.

Правило применения критерия χ^2 .

*По формуле вычисляют - $\chi_{набл}^2$ выборочное значение статистики критерия.

*выбрав уровень значимости α критерия, по таблице χ^2 -распределения находим критическую точку $\chi_{\alpha,df}^2$

*Если $\chi_{набл}^2 \leq \chi_{\alpha,df}^2$, то гипотеза H_0 не противоречит опытным данным;

если $\chi_{набл}^2 > \chi_{\alpha,df}^2$, то гипотеза H_0 отвергается.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений

ЛИТЕРАТУРА:

- Медик В.А., Токмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии. М.: Медицина, 2000.
- Лукьянова Е.А. Медицинская статистика.- М.: Изд. РУДН, 2002.
- Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика.- Высшая школа, 1973.
- И.В. Павлушков и др. Основы высшей математики и математической статистики. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов) М., «ГЭОТАР - МЕД»; 2003

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ.