

# Основы теории проверки статистических гипотез.

Доцент Аймаханова А.Ш.

# План лекции:

1. Статистические гипотезы в медико-биологических исследованиях.
2. Параметрические критерии различий.
3. Непараметрические критерии.
4. Критерии согласия.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется **проверкой гипотез**.

**Задачи статистической проверки гипотез:**

- Относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза  $H_0$ .
- Из этой генеральной совокупности извлекается выборка.
- Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу  $H_0$  или принять ее.

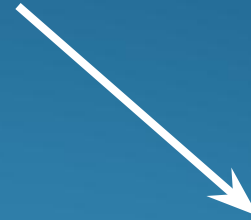
**Статистическая гипотеза** - это предположение о виде распределения или о величинах неизвестных параметров генеральной совокупности, которая может быть проверена на основании выборочных показателей.

**Примеры статистических гипотез:**

Генеральная совокупность распределена по нормальному закону Гаусса.

Дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

# Статистические ГИПОТЕЗЫ



Параметрические

Непараметрические

**Нулевой гипотезой  $H_0$**  называется основная гипотеза, которая проверяется.

**Альтернативной гипотезой  $H_1$** , называется гипотеза, конкурирующая с нулевой, то есть противоречащая ей.

**Простой** называют гипотезу, содержащую только одно предположение.  $a = a_0$

**Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

**Статистическим критерием проверки гипотезы  $H_0$**  называется правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу  $H_0$ .

# Основной принцип проверки гипотез

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , из которых формируют функцию выборки  $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , называемой *статистикой критерия*.

$$T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

критическая область  $S$  область  $\bar{S}$  принятия гипотезы

# Возможные ошибки при проверке гипотез

Первого рода

Второго рода

Гипотеза $H_0$	Отвергается	Принимается
Верна	Ошибка 1-го рода	Нет ошибки
Неверна	Нет ошибки	Ошибка 2-го рода



**Уровнем значимости критерия ( $\alpha$ )** называется вероятность допустить ошибку 1-го рода.

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через  $\beta$ .

**Мощностью критерия** называется вероятность недопущения ошибки 2-го рода ( $1 - \beta$ ).

$\alpha = P(\text{отвергнуть } H_0 / H_0 \text{ верна})$  или  $\alpha = P(H_1 / H_0)$

$\beta = P(\text{принять } H_0 / H_0 \text{ неверна})$  или  $\beta = P(H_0 / H_1)$

$1 - \beta = P(\text{принять } H_1 / H_1 \text{ верна})$

**Чем больше мощность критерия, тем вероятнее допустить ошибку 2-го рода.**

Разумное соотношение между  $\alpha$  и  $\beta$  находят, исходя из тяжести последствий каждой из ошибок.

# Методика проверки гипотез:

1. Формирование нулевой  $H_0$  и альтернативной  $H_1$  гипотез исходя из выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
2. Подбор статистики критерия  $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$
3. По статистике критерия  $T_n$  и уровню значимости  $\alpha$  определяют критическую точку  $t_{кр}$ , то есть границу, отделяющую область  $\bar{S}$  от  $S$ .
4. Для полученной реализации выборки  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  подсчитывают значение критерия, то есть  $T_{набл} = T(X_1, X_2, \dots, X_n) = t$
5. Если  $t \in S$  (например,  $t > t_{кр}$  для правосторонней области  $S$ ), то нулевую гипотезу  $H_0$  отвергают; если же  $t \in \bar{S}$  ( $t < t_{кр}$ ), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу  $H_0$ .

# *t*-критерий Стьюдента:

Общий вид:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2}}$$

# Случай независимых выборок.

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

$$n_1 = n_2 = n$$

$$df = n - 1$$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2(n_1 - 1) + \sigma_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} * \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}}$$

$$n_1 \neq n_2$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

## Случай зависимых выборок.

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d} \quad \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_{1i} - x_{2i})}{n}$$

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

$$df = n - 1$$

$$\bar{S}_d = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

# Вывод:

- Критерий Стьюдента может быть использован для проверки гипотезы о различии средних только для двух групп.
- Критерий Стьюдента применяется в случае малых выборок, что характерно для медико-биологических экспериментов.
- Если схема эксперимента предполагает большее число групп, воспользуйтесь дисперсионным анализом.
- Если критерий Стьюдента был использован для проверки различий между несколькими группами, то истинный уровень значимости можно получить, умножив уровень значимости, на число возможных сравнений.

## *F- критерий Фишера:*

$$F_{\text{эмн}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

$$df_1 = n_1 - 1, \quad df_2 = n_2 - 1$$

Критерии различия называют **непараметрическими**, если он не базируется на предположении о типе распределения генеральной совокупности и не использует параметры этой совокупности.

**Применение непараметрических методов целесообразно:**

- на этапе разведочного анализа;
- при малом числе наблюдений (до 30);
- когда нет уверенности в соответствии данных закону нормального распределения.



## *Непараметрические критерии представлены основными группами:*

- критерии различия между группами независимых выборок;
- критерии различия между группами зависимых выборок.

# Различия между независимыми группами

- U критерий Манна-Уитни
- двухвыборочный критерий Колмогорова – Смирнова.

# Различия между зависимыми группами

- $z$  – критерий знаков
- $T$  – критерий Уилкоксона парных сравнений

# *Критерии согласия:*

*Критерием согласия* называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

- ✓ Пирсона (Хи-квадрат),
- ✓ Колмогорова,
- ✓ Фишера,
- ✓ Смирнова.

# Критерий согласия $\chi^2$ (хи-квадрат) Пирсона.

$H_0$ : «между эмпирическим распределением и теоретической моделью нет никакого различия».

$\Delta_1$	$\Delta_2$	...	$\Delta_k$
$np_1$	$np_2$	...	$np_m$

Если эмпирические частоты ( $ni$ ) сильно отличаются от теоретических ( $np_i$ ), то проверяемую гипотезу  $H_0$  следует отвергнуть; в противном случае-принять.

# Критерий согласия $\chi^2$ (хи-квадрат) Пирсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

**$n$** -объем выборки

**$k$** -число интервалов разбиения выборки

**$n_i$** -число значений выборки, попавших в  $i$ -й интервал

**$np_i$**  - теоретическая частота попадания значений случайной величины  $X$  в  $i$ -й интервал.

# Критерий согласия $\chi^2$ (хи-квадрат) Пирсона.

или

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

**O**-фактически наблюдаемое число

**E**- теоретически ожидаемое число

## Поправка Йейтса

$$\chi^2 = \sum \frac{(|O - E| - \frac{1}{2})^2}{E}$$

Для распределения признаков, которые принимают всего 2 значения.



# Правило применения критерия $\chi^2$ .

\*По формуле вычисляют -  $\chi_{набл}^2$  выборочное значение статистики критерия.

\*выбрав уровень значимости  $\alpha$  критерия, по таблице  $\chi^2$  -распределения находим критическую точку  $\chi_{\alpha,df}^2$

\*Если  $\chi_{набл}^2 \leq \chi_{\alpha,df}^2$ , то гипотеза  $H_0$  не противоречит опытным данным;

если  $\chi_{набл}^2 > \chi_{\alpha,df}^2$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается.

**Необходимым условием применения критерия Пирсона** является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений

# ЛИТЕРАТУРА:

- Медик В.А., Токмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии. М.: Медицина, 2000.
- Лукьянова Е.А. Медицинская статистика.- М.: Изд. РУДН, 2002.
- Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика.- Высшая школа, 1973.
- И.В. Павлушков и др. Основы высшей математики и математической статистики. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов) М., «ГЭОТАР - МЕД»; 2003

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ.