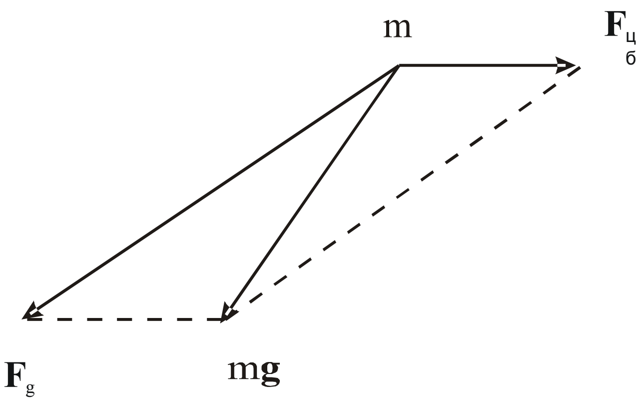
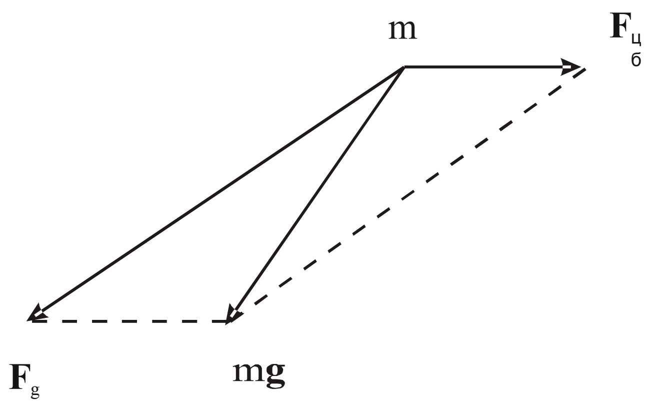
Вес тела и сила тяжести



Весом тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие гравитационного притяжения.

В условиях Земли – вследствие притяжения к Земле. Вес тела не надо путать с **силой тяжести** $P = mg$, где g - одинаковое для всех тел вблизи вращающейся **(т.е. во вращающейся системе отсчета)** поверхности Земли ускорение, называемое ускорением свободного падения. **P** хотя и обусловлена притяжением тел к Земле но **результат двух сил и не равна силе гравитационного притяжения тела F_g из-за действия $F_{цб}$.**

Различие силы тяжести и веса

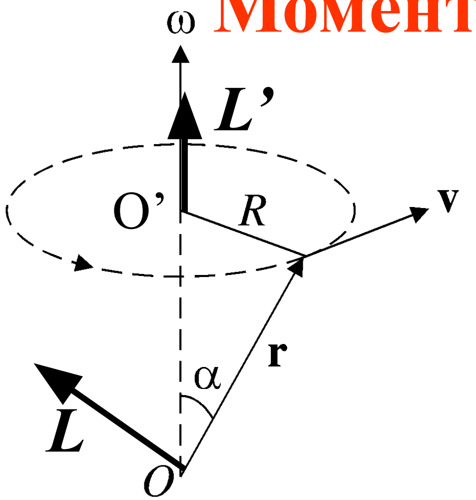


На любое тело, находящееся на поверхности Земли (кроме полюса) действует центробежная сила инерции **$F_{цб}$** , что и приводит к некоторому различию силы тяжести **P** и силы гравитационного притяжения **F_g** как по величине, так и по направлению. Те во вращающейся системе отсчета складываем два вектора

$$\boldsymbol{P=mg=F_g+F_{цб}} \quad |F_{цб}|=m\omega_з^2R_з\cos\phi$$

Результирующая сила направлена не к центру Земли. Максимальное различие получается **на экваторе** и составляет 0,3% от силы **P**. На экваторе на тело массой 1 кг действует **$F_{цб}$**=0.0337Н=1/291 mgh. Т.е. в ряде случаев ей можно пренебречь. Угол между направлениями векторов **P** и **F_g** также очень мал и его max значение равно 0,0018 рад (на широте 45 градусов).

Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ *L*** <u>относительно точки О</u>: $\boldsymbol{L} = \left[\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{v}\right]$ и направления векторов ***L*** и ***ω*** не совпадают если точка О не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка О’ в центре окружности то по направления векторов ***L’*** и ***ω*** совпадают.

$$L' = Rmv\sin 90^0 = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2\omega = I\omega$$

Скалярная величина $I = mR^2$ **называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения**.

Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса МТ, двигающейся по окружности:

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{mR}^2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{I}\boldsymbol{\omega}$$

Производная по времени равна:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathrm{I}\boldsymbol{\beta}$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **МТ** получаем:

$$\mathrm{I}\boldsymbol{\beta} = \sum_i \boldsymbol{N}_{\text{iвнеш}}$$

Абсолютно твердое тело

Под твердым телом будем подразумевать абсолютно твердое тело, в котором расстояния между любыми двумя точками неизменны. Твердое тело можно представить как совокупность большого количества очень малых масс Δm_i , которые можно считать МТ. Теорема о движении центра масс твердого тела: **центр масс твердого тела** движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, и к которой приложены все внешние силы, действующие на тело. **Т.е. раньше мы говорили о МТ и о систем МТ и ее центре масс теперь еще и об абсолютно твердом теле.**

Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать: $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{N}_{внеш}$

Пусть момент импульса *i*-й частицы, r_i — радиус окружности, по которой движется **МТ** Δm_i относительно оси вращения тела. Направление $\boldsymbol{L}_i$ относительно оси вращения всех точек тела одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{\omega} \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2 = I\boldsymbol{\omega}$$

Величина $I = \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2$ называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов **L** и **ω** совпадают только в случае симметричного тела.

Уравнением моментов

Заменив в выражении для кинетической энергии $T = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}$ массу на момент инерции I, а скорость $\boldsymbol{v}$ на угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ получим кинетическую энергию вращающегося вокруг неподвижной оси тела или просто подставив v=ωR:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Подставим момент импульса тела $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum \boldsymbol{N}_{\text{внеш}}$$

Это закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

Скамья Жуковского T=*const*

Фигуристка на льду и Торнадо: Что общего?

Сохранение кинетической энергии?

Приблизительно !

Торнадо – увеличивается масса того, что поднято с Земли - увеличивается момент инерции и увеличивается кинетическая энергия. Как зависит I от радиуса торандо ?

Узнаем чуть позже $\sim R^2$

Куда расходуется кинетическая энергия? Вспомним

машины, цунами, лавины…..

Условия равновесия твердого тела

В общем случае для равновесия абсолютно твердого тела необходимо выполнение двух условий.

1. Сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{внеш} = 0$$

2. Сумма моментов внешних сил относительно любой точки должна быть равна нулю:

$$\sum_i \boldsymbol{N}_{внеш} = 0$$

Момент инерции в природе

Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 метров в секунду пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять моментом импульса так чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

Механика поступательного и вращательно движения относительно неподвижной оси

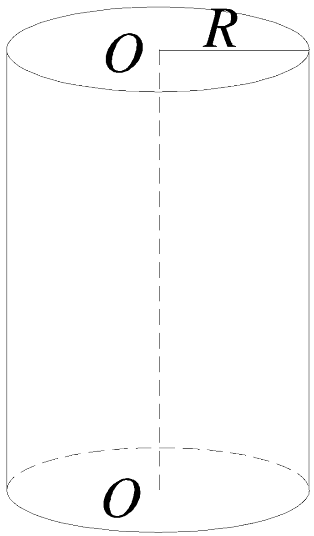
Все выражения для **МТ** и для твердого тела внешне очень похожи. 2-го закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_i \qquad \frac{dL}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum_i \boldsymbol{N}_{i\text{внеш}}$$

Аналогами также являются:

координата	x	- угол ϕ,
линейной скорости	$\boldsymbol{v}$	- угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$,
линейного ускорения	$\boldsymbol{a}$	- угловое ускорение $\boldsymbol{\beta}$,
массы	m	- момент инерции I,
силы	$\boldsymbol{F}$	- момент силы $\boldsymbol{N}$,
импульса	$\boldsymbol{p}$	- момент импульса $\boldsymbol{L}$,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\boldsymbol{\omega}^2/2$,
работа	$dA=F_s ds$	- работа $dA=N_\omega d\phi$
мощность	$P=F_v v$	- $P=N_\omega \boldsymbol{\omega}$

Момент инерции полого цилиндра



Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии *OO*.

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = mR^2$$

где m — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно естественно зависит так как чем больше высота тем больше площадь и масса). Точно также выглядит и выражение для момента инерции **обруча.**

Момент инерции сложных тел

Для полного определения момента инерции более сложных тел выражение $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ следует уточнить, устремив элемент Δm_i к нулю и найдя соответствующий предел:

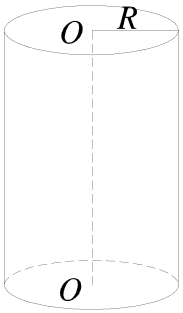
$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho\, r^2 dV$$

Интегрирование производится по всему объему тела V. Если плотность тела ρ постоянна, то ρ можно вынести из под знака интегрирования. **Но даже для яйца (желток, белок и скорлупа имеют разную плотность**)! **Земля?**

Момент инерции сплошного цилиндра и однородного шара



Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси симметрии OO можно найти разбив его на цилиндры радиуса r и толщиной dr. Так как объем одного слоя равен $dV=2\pi rhdr$ то

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV = \int r^2 \rho\, 2\pi\, r\, h\, dr = 2\pi\, \rho\, h \int r^3 dr =$$

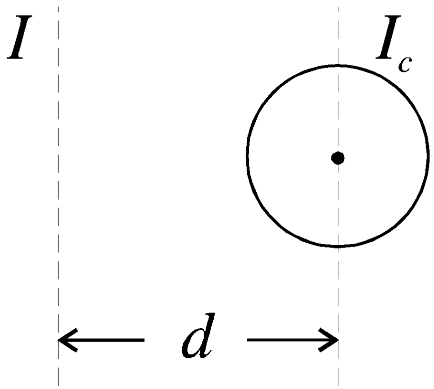
$$2\pi\, \rho\, h \frac{R^4}{4} = \rho\, (\pi R^2 h) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

ρ- плотность, dr и h –толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было mR^2. **Чем удаленнее масса от центра тем больше I.** При равных m и R у полого момент инерции I в 2 раза больше **Опыт с двумя скатывающимися цилиндрами.**

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Теорема Штейнера



Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера:**

момент инерции относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями d.

$$I = I_c + md^2$$

Вспомним опыт с гантелями на скамье Жуковского

Демонстрации на момент инерции

1. Гироскопы не путать с гороскопами
2. Волчки
3. Прошу принести на следующую лекцию два куриных яйца. Одно сырое другое сваренное вкрутую. Лучше кто живет в общежитии .