

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В НОРМИРОВАНИИ ТРУДА

**Разработчик: к.т.н., доцент кафедры
экономики и управления на предприятии
транспорта Демидов Дмитрий
Валентинович (Уральский государственный
лесотехнический университет)**

Сущность метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов исходит из того, что **сумма квадратов отклонений** каждого из наблюдаемых значений от соответствующих значений, исчисленных по эмпирической формуле, при данных числовых значениях коэффициентов **должна быть наименьшей** по сравнению с любыми другими их значениями.

В качестве критерия оценки той или иной функции определяется **средняя абсолютная погрешность**

$$\Delta = \frac{\sum |\Delta_i|}{n} \rightarrow \min,$$

где n - количество элементов ряда; Δ_i - погрешность вычисления

$$\Delta_i = \bar{y}_i - y_i$$

Типовые графики и соответствующие им системы уравнений для нахождения параметров методом наименьших квадратов

| № п/п | Типовая формула и вид графика | Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика | Примеры зависимостей | Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов |
|----------|---|---|---|---|
| 1 | $y = a x$ - график линейной функции | Исследуемые затраты прямо пропорциональны значениям фактора | Зависимость нормы времени самоходной машины от расстояния перевозки | <p style="text-align: center;">Уравнение</p> $a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i;$ $a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$ |
| 2 | $y = a x + b$ - график линейной функции | Одна часть исследуемых затрат прямо пропорциональна значениям фактора x , а другая часть от него не зависит | | <p style="text-align: center;">Система уравнений</p> $\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$ $a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$ $b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$ |

| № п/п | Типовая формула и вид графика | Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика | Примеры зависимостей | Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов |
|----------|--|---|---|--|
| 3 | $y = \frac{a}{x}$ - график гиперболической функции | Исследуемые затраты обратно пропорциональны значениям фактора x | Зависимость нормы времени от нормы выработки и наоборот | Уравнение $a \sum \frac{1}{x_i^2} = \sum \frac{y_i}{x_i};$ $a = \frac{\sum \frac{y_i}{x_i}}{\sum \frac{1}{x_i^2}}$ |
| 4 | $y = \frac{a}{x} + b$ - график гиперболической функции | Одна часть исследуемых затрат обратно пропорциональна значениям фактора x , а другая от него не зависит | Зависимость выработки самоходной машины от расстояния перемещения | Система уравнений $\begin{cases} a \sum \frac{1}{x_i^2} + b \sum \frac{1}{x_i} = \sum \frac{y_i}{x_i} \\ a \sum \frac{1}{x_i} + bn = \sum y_i \end{cases}$ $a = \frac{n \sum \frac{y_i}{x_i} - \sum \frac{1}{x_i} \sum y_i}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2};$ $b = \frac{\sum \frac{1}{x_i^2} \sum y_i - \sum \frac{1}{x_i} \sum \frac{y_i}{x_i}}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2}$ |

| № п/п | Типовая формула и вид графика | Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика | Примеры зависимостей | Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов |
|-------|---|---|---|---|
| 5 | $y = b x^a$ - график степенной функции | Одна часть исследуемых затрат с увеличением значения фактора x возрастает интенсивно, а другая часть от него не зависит | Зависимость выработки самоходной машины от расстояния перемещения | Система уравнений $\begin{cases} a \sum \lg^2 x_i + \lg b \sum \lg x_i = \sum \lg x_i \lg y_i \\ a \sum \lg x_i + n \lg b = \sum \lg y_i \end{cases}$ |
| 6 | $y = b e^{ax}$ - график натуральной функции | | | Система уравнений $\begin{cases} a \sum x_i^2 + \ln b \sum x_i = \sum x_i \ln y_i \\ a \sum x_i + n \ln b = \sum \ln y_i \end{cases}$ |
| 7 | $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ - график параболы функции | | Зависимость выработки экскаватора от объема ковша | Система уравнений $\begin{cases} a_1 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i + a_3 n = \sum y_i \end{cases}$ |

Пример 1. Нахождение параметров методом наименьших квадратов (степенная функция)

В качестве исходных данных для исследования принимаем расчетные значения выработки y_i (м³ в смену) самоходных скреперов с объемом ковша 8 м³ в зависимости от расстояния перемещения грунта x_i (м).

Расчетная таблица для нахождения параметров степенной функции методом наименьших квадратов

| i | x_i | y_i | $\lg x_i$ | $\lg y_i$ | $\lg^2 x_i$ | $\lg x_i \lg y_i$ | $\overline{y_i}$ | $ x_i $ |
|----------|-------|-------|-----------|-----------|-------------|-------------------|------------------|---------|
| 1 | 0,3 | 282 | - 0,5229 | 2,4502 | 0,2734 | - 1,2812 | 315,52 | 33,52 |
| 2 | 0,5 | 232 | - 0,3010 | 2,3655 | 0,0906 | - 0,7120 | 226,10 | 5,90 |
| 3 | 1,0 | 161 | 0 | 2,2068 | 0 | 0 | 143,85 | 17,15 |
| 4 | 2,0 | 99 | 0,3010 | 1,9956 | 0,0906 | 0,6007 | 91,52 | 7,48 |
| 5 | 3,0 | 72 | 0,4771 | 1,8573 | 0,2276 | 0,8861 | 70,25 | 1,75 |
| 6 | 4,0 | 56 | 0,6021 | 1,7482 | 0,3625 | 1,0526 | 58,23 | 2,23 |
| 7 | 5,0 | 46 | 0,6990 | 1,6628 | 0,4886 | 1,1623 | 50,34 | 4,34 |
| Σ | 15,8 | 948 | 1,2553 | 14,2864 | 1,5333 | 1,7085 | 955,81 | 72,37 |

Полученное уравнение функции имеет вид $y = 143,847 x^{-0,6524}$, а средняя абсолютная погрешность $\Delta = 10,34$.

Пример 2. Нахождение параметров методом наименьших квадратов в табличном процессоре Excel

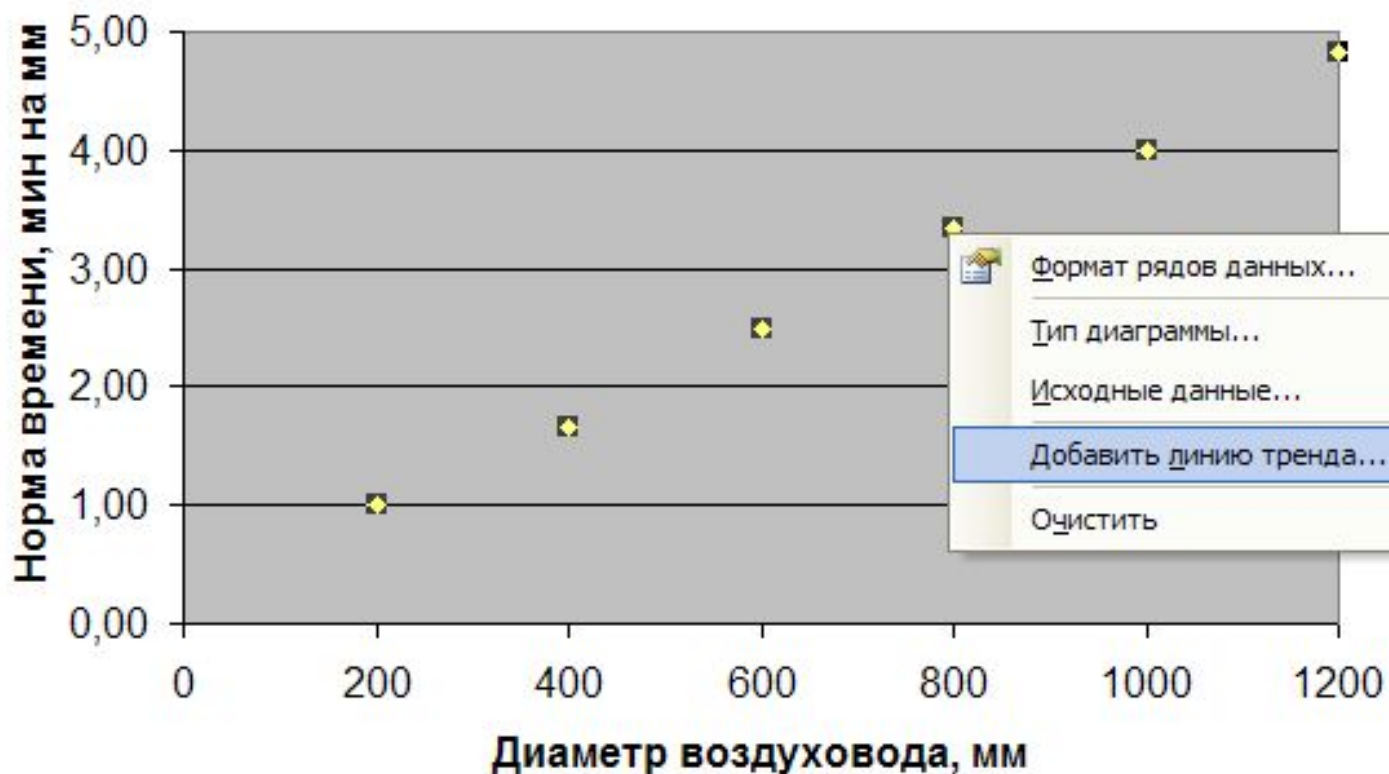


В качестве примера определяем норму времени y_i (мин) от диаметра x_i (мм) изготовления спирально-навивных воздуховодов на станке **Tube Forming Machine type 1602 (Швейцария)** при ширине штрипсы 137 мм и длине воздуховодов 3 м.

| Зависимость нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|
| х, мм | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1200 |
| у, мин | 1,00 | 1,67 | 2,50 | 3,33 | 4,00 | 4,83 |

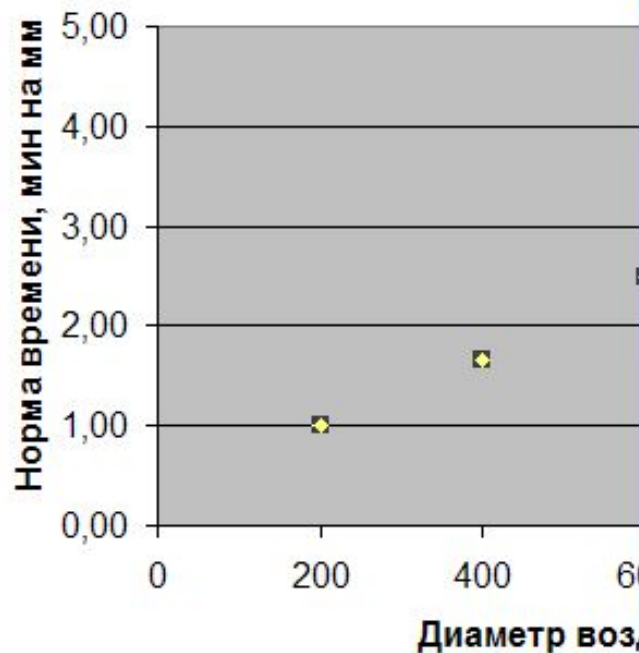
Добавление линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы



Выбор линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздухопроводов от диаметра трубы



Линия тренда

Тип | Параметры

Построение линии тренда (аппроксимация и сглаживание)

Линейная

Логарифмическая

Полиномиальная

Степенная

Экспоненциальная

Линейная фильтрация

Степень: 2

Точки: 2

Построен на ряде:

Ряд 1

OK Отмена

Формат линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы

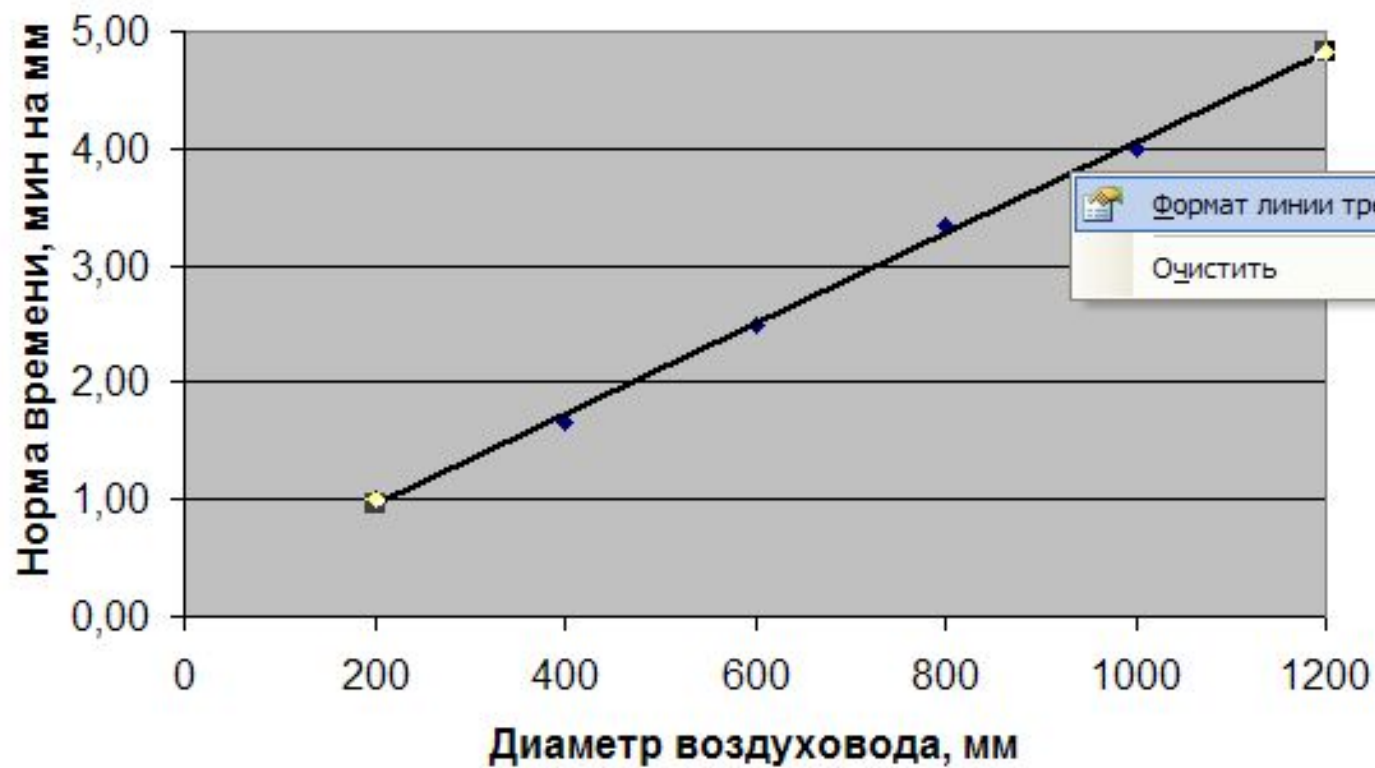
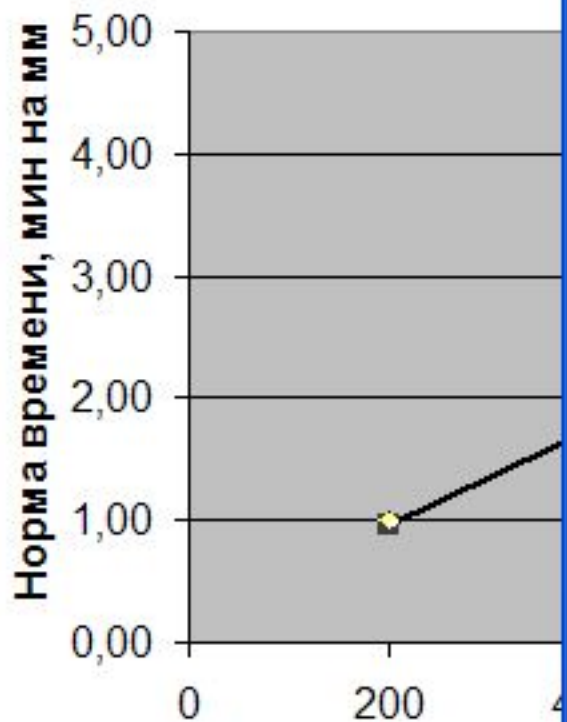


График зависимости
спирально-навив



Формат линии тренда

Вид | Тип | Параметры

Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой

автоматическое: Линейный (Ряд 1)

другое:

Прогноз

вперед на: 0 единиц

назад на: 0 единиц

пересечение кривой с осью Y в точке: 0

показывать уравнение на диаграмме

поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)

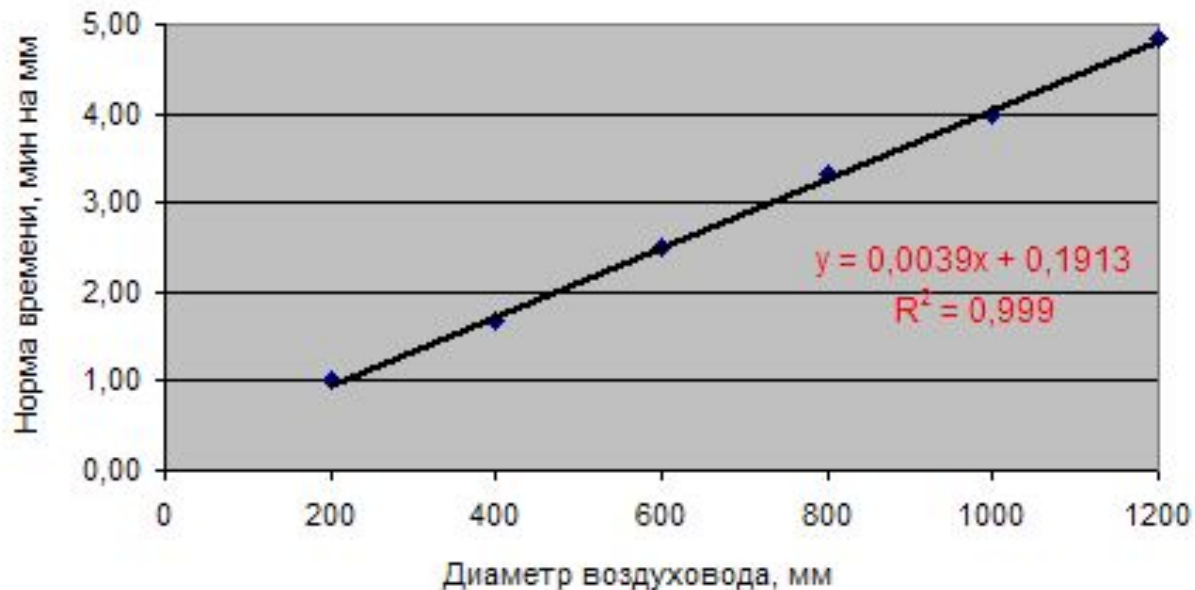
OK

Отмена

Окончательный вид графика и уравнения регрессии

| Зависимость нормы времени изготовления спирально-навивных воздухопроводов от диаметра трубы | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|
| x, мм | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1200 |
| y, мин | 1,00 | 1,67 | 2,50 | 3,33 | 4,00 | 4,83 |
| y, мин | 0,97 | 1,75 | 2,53 | 3,31 | 4,09 | 4,87 |

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздухопроводов от диаметра трубы



Пример 3. Применение метода наименьших квадратов в табличном процессоре Excel при определении состава звена ведущих машин

Расчет 3. Определение потребности автомобилей-самосвалов при автомобильной возке грунта из сосредоточенного резерва

Для автомобильной возки грунта вводим условие для нахождения предельного количества автосамосвалов для одного работающего экскаватора, обозначая через L расстояние транспортирования грунта (концентрация не должна превышать 5 машин на км технологических путей)

$$N_s = \frac{H_{\text{экс}}^2}{H_{\text{авт}}^2} \leq 5L,$$

где $H_{\text{экс}}^a$ и $H_{\text{экс}}^3$ - нормы выработки соответственно экскаватора и автосамосвала в смену, куб.м.

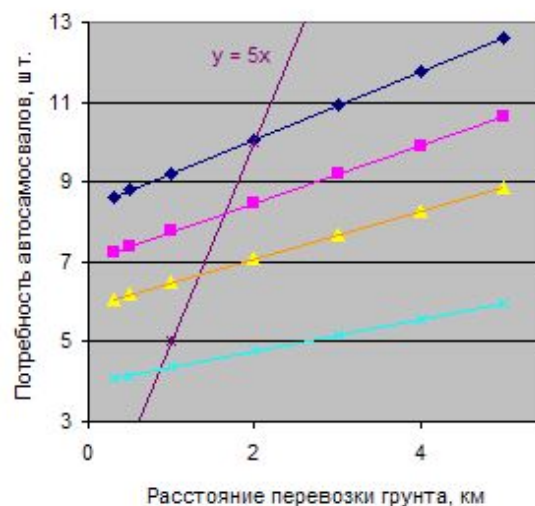
Предельное количество автосамосвалов на один экскаватор при расстоянии перевозки грунта L (км)

| | | | | | | |
|-----|-----|---|----|----|----|----|
| 0,3 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1,5 | 2,5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

3.1. Определение количества автомобилей самосвалов

(грунт плотностью 1,6 т/куб.м, 1 категория трудности разработки)

| Объем ковша, куб.м | Расчетное количество автосамосвалов на экскаватор в зависимости от расстояния перевозки грунта (км) | | | | | | |
|--------------------|---|------|------|-------|-------|-------|-------|
| | 0,3 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1,60 | 8,62 | 8,79 | 9,21 | 10,06 | 10,91 | 11,76 | 12,61 |
| 1,25 | 7,26 | 7,40 | 7,76 | 8,48 | 9,19 | 9,91 | 10,62 |
| 1,00 | 6,06 | 6,18 | 6,48 | 7,08 | 7,68 | 8,28 | 8,87 |
| 0,65 | 4,07 | 4,15 | 4,36 | 4,76 | 5,16 | 5,56 | 5,96 |



$$y = 0,85x + 8,364 \quad y = 0,5979x + 5,8835$$

$$y = 0,7159x + 7,0442 \quad y = 0,4018x + 3,9533$$

- ◆ Вместимость ковша 1,6 куб.м
- Вместимость ковша 1,25 куб.м
- ▲ Вместимость ковша 1,0 куб.м
- × Вместимость ковша 0,65 куб.м
- * Предельная концентрация машин по дальности перевозки грунта