


Модели оптимального планирования добычи минерально-сырьевых ресурсов

Доцент, к.э.н. Забайкин Ю.В.

Модель оптимального выбора проектов освоения месторождений

При добыче углеводородов по каждому месторождению возможно использование нескольких технологических вариантов разработки, основанных на анализе геолого-геофизических характеристик месторождения и геолого-гидродинамических характеристик пластовых систем. К такого рода технологическим вариантам, в частности, относятся:

- вариант разработки с применением заводнения;
- применение роторно-циклического заводнения;
- применение паротепловых обработок скважин;
- применение на объектах разработки чередующейся закачки в объеме 5% в сочетании с паротепловыми обработками скважин;
- применение на всех объектах разработки роторно-циклического заводнения в сочетании с паротепловыми обработками скважин;
- применение на основных объектах поэтапного уплотнения сетки скважин, на юрской залежи – чередующейся закачки в объеме 5% в сочетании с паротепловыми обработками скважин.



Экономико-математическая модель, позволяющая провести оптимизацию выбора вариантов проектов освоения месторождений углеводородов, может быть представлена следующим образом. В качестве критерия оптимальности можно использовать, например, максимизацию суммарной годовой прибыли от извлечения углеводородов по всем месторождениям:

$$f(U) = \sum_i \sum_j C_{ij} U_{ij} \rightarrow \max,$$

где C_{ij} – годовая прибыль от освоения месторождения i по варианту j ; U_{ij} – искомая переменная, принимающая значение 1, если на i -е месторождение назначается вариант освоения j , и 0 в противном случае.

Ограничение по суммарному объему инвестиций, направленных на освоение месторождений:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} U_{ij} \leq B,$$

где a_{ij} – затраты, необходимые для освоения месторождения i по варианту j , B – инвестиции, выделяемые для освоения месторождений углеводородов.



При освоении любого i -го месторождения должен быть выбран единственный j -ый вариант проекта его освоения:

$$\sum_j U_{ij} = 1$$

Искомые переменные являются булевыми, т.е. принимают значение 1 или 0:

$$U_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$$


Полученная задача относится к задачам дискретного программирования с булевыми переменными. Для решения данной задачи можно воспользоваться методом Баллаша или методом случайного поиска. При линейной максимизируемой функции, линейных ограничениях и всех положительных коэффициентах наиболее целесообразно применять метод Фора и Мальгранжа.



Метод Фора и Мальгранжа

Метод Фора и Мальгранжа можно разделить на 2 этапа: поиск исходного плана и его улучшение. На первом этапе отыскивается начальный план, а на втором происходит итеративный перебор планов с целью поиска лучшего варианта. Перед проведением расчетов искомые неизвестные следует упорядочить в соответствии с убыванием коэффициентов целевой функции. Первоначальный план формируется следующим образом: начиная с первой искомой переменной проводится попытка присвоения 1; если при этом нарушается ограничение, то переменной присваивается значение 0. После последовательного просмотра всех переменных начальный план сформирован. На втором этапе реализуется итеративный процесс перебора эффективных вариантов плана. Очередной план получается из предыдущего следующим образом.






Шаг 1. Отыскивается «младшая единица» в сформированном плане: крайняя правая единица, после которой есть хотя бы один ноль. Если «младшая единица» найдена, то осуществляется переход к шагу 2; в противном случае — переход к шагу 5.

Шаг 2. В новом плане на месте «младшей единицы» ставится 0.

Шаг 3. Все значения переменных левее «младшей единицы» переносятся без изменения в формируемый вариант плана.

Шаг 4. Значения переменных в формируемом плане правее «младшей единицы» определяются путем последовательного перебора и присвоения значения 1, если позволяют ограничения, или 0 — в противном случае. Переход к шагу 1.

Шаг 5. Для полученных вариантов планов рассчитывается значение функции, т.е. величины суммарной прибыли. В качестве оптимального варианта принимается тот, у которого величина суммарной прибыли.



Принципиально иная модель может быть предложена для поиска **оптимального распределения капитальных вложений** в разрезе месторождений минерального сырья.

Возможность инвестиционного маневрирования в процессе выбора месторождений (полиметаллических, редкометаллических и железорудных месторождений) повышает для разработчиков степень «свободы» при выборе различных вариантов реализации инвестиционной программы освоения месторождений минерального сырья. Все возможные альтернативы состава разрабатываемых месторождений, структуры и последовательности развертывания программы предварительно исследуются с целью обоснования эффективности добычи минерально-сырьевых ресурсов. При этом принимаются во внимание организационно-технологические взаимосвязи объектов, возможные темпы развития строительной индустрии, а также другие технологические ограничения. Хотя рассматриваемые месторождения исключительно эффективны, одновременное их освоение практически невозможно по ряду объективных причин, прежде всего из-за ограниченности объема инвестиций. Поэтому нужен последовательный отбор самых выгодных, наиболее перспективных месторождений. Таким образом, задача рационального ввода в действие новых месторождений сводится к отысканию оптимального объема годовой добычи сырья из данной совокупности месторождений для каждого варианта инвестирования развития добычи минерального сырья V^l ($l = 1, 2, \dots, m$), при котором достигается максимальный экономический эффект в пределах заданной величины капиталовложений. Под экономическим эффектом здесь понимается прирост прибыли от эксплуатации месторождений за вычетом объема капиталовложений с учетом нормативного коэффициента эффективности.

Сформулированная задача может быть записана в виде следующих уравнений целевой функции и ограничений:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n \left(P_j - \frac{Z_j r}{100\%} \right) X_j = \sum_{j=1}^n \left[(C_j - S_j) - \frac{Z_j r}{100\%} \right] X_j \rightarrow \max;$$
$$\sum_{j=1}^n Z_j X_j \leq B^I;$$
$$0 \leq X_j \leq Q_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

где j — номер месторождения рассматриваемой группы ($j = 1, 2, \dots, n$); P_j — сумма прибыли на 1 т руды, тыс. руб.; Z_j — удельные капиталовложения на добычу и обогащение 1 т руды, тыс. руб.; C_j — рыночная стоимость (цена) 1 т руды, тыс. руб.; S_j — текущие затраты на добычу и обогащение 1 т руды, тыс. руб.; r — коэффициент дисконтирования, %; X_j — искомый объем добычи и обогащения руды, т; B^I — общий объем капиталовложений по I-му варианту освоения, руб.; Q_j — извлекаемые запасы, т.

Данная задача относится к задачам линейного программирования и может быть решена, например, базисным симплекс - методом (прил. 3).

ПРИМЕР

Рассмотрим группу из трех месторождений ($j = 1, 2, 3$). По каждому из месторождений рассчитаны значения $(C_j - S_j) - \frac{Z_j r}{100\%}$ ($j = 1, 2, 3$) которые равны для этих месторождений 100, 120 и 200 долл/т соответственно. Тогда целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$100X_1 + 120X_2 + 200X_3 \rightarrow \max$$

Для освоения месторождений выделяются финансовые средства (первое ограничение); дополнительные ресурсы на освоение первого и второго месторождений (второе ограничение) и особый ресурс на освоение второго ограничения (третье ограничение). Количественные значения затрат и выделенных объемов ресурсов приведены ниже:

$$60X_1 + 10X_2 + 30X_3 \leq 600;$$

$$40X_1 + 20X_2 \leq 300;$$

$$10X_2 \leq 200.$$



Естественные ограничения на неотрицательность переменных:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0.$$

Для решения данной задачи линейного программирования следует воспользоваться симплекс-методом, алгоритм которого приведен в прил.3.

Приведем решение данной задачи в соответствии с шагами данного алгоритма.

Шаг 1. Прежде всего, следует ввести дополнительные переменные для перевода ограничений из неравенств в равенства:

$$100X_1 + 120X_2 + 200X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \rightarrow \max$$

$$60X_1 + 10X_2 + 30X_3 + X_4 \leq 600;$$

$$40X_1 + 20X_2 + X_5 \leq 300;$$

$$10X_2 + X_6 \leq 200;$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0.$$

Шаг 2. Построение исходной симплекс – таблицы (табл. 9.5).

Таблица 9.5. Исходная симплекс-таблица

Базис	F	Основные переменные			Дополнительные переменные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
	0	-100	-120	-200	0	0	0
X_4	600	60	10	30	1	0	0
X_5	300	40	20	0	0	1	0
X_6	200	0	10	0	0	0	1

Шаг 3. Проверка: все ли признаки оптимальности $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)? Нет, есть признаки оптимальности меньше нуля (-100, -120, -200). Переход к шагу 4.

Шаг 4. Выбор разрешающего столбца и выбор вводимой в базис переменной по условию $S_3 = \min \{-100, -120, -200\} = -200$. Разрешающий столбец $r = 3$. Следует ввести основную переменную X_3 в базис.

Шаг 5. Проверка: все ли $a_{3j} \leq 0$ ($j = 1, 2, 3$)? Нет, есть переменная $a_{13} = 30$. Переход к шагу 6.

Шаг 6. Выбор разрешающей строки и выбор выводимой из базиса переменной:

$$D_1 = \min_{j=1,2,3} \left\{ \frac{600}{30}, \infty, \infty \right\}.$$

Разрешающая строка $s = 1$. Разрешающий элемент $a_{31} = 30$.

Шаг 7. Пересчет элементов симплекс-таблицы (табл.9.6).

Таблица 9.6. Первая итерация симплекс-метода

Базис	F	Основные переменные			Дополнительные переменные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
	4000	300	-160/3	0	20/3	0	0
X_3	20	2	1/3	1	1/30	0	0
X_5	300	40	20	0	0	1	0
X_6	200	0	10	0	0	0	1

Приведем примеры расчета некоторых элементов симплекс-таблицы.

Пересчет элементов таблицы в первой строке производится путем деления на значение разрешающего элемента: $20 = 600/300$; $2 = 60/30$; $1/3 = 10/30$; $1 = 30/30$...

Пересчет признаков оптимальности: $300 = (-100) - (-200*60/30)$; $160/3 = (-120) - (-200*10/30)$...

Значение целевой функции $4000 = 0 - (-200*600/30)$.

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка: все ли признаки оптимальности $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)? Нет, есть признаки оптимальности меньше нуля (-160/3). Переход к шагу 4.

Шаг 4. Выбор разрешающего столбца и выбор вводимой в базис переменной по условию $C_2 = \min \{-160/3\} = -160/3$. Разрешающий столбец $r = 2$. Следует ввести основную переменную X_2 в базис.

Шаг 6. Выбор разрешающей строки и выбор выводимой из базиса переменной:

$$D_2 = \min_{j=1,2,3} \left\{ \frac{20}{1/3}, \frac{300}{20}, \frac{200}{10} \right\} = 51.$$

Разрешающая строка $s = 2$.

Разрешающий элемент $a_{22} = 20$.


Шаг 7. Пересчет элементов симплекс-таблицы (табл. 9.7).

Таблица 9.7. Вторая итерация симплекс-метода

Базис	F	Основные переменные			Дополнительные переменные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
	4800	1220/3	0	0	20/3	0	4800
X_3	15	4/3	0	1	1/30	0	15
X_5	15	2	1	0	0	1	15
X_6	200	20	0	0	0	0	200

Шаг 3. Проверка: все ли признаки оптимальности $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)? Да, следовательно, решение найдено и искомый вариант добычи и обогащения руды в разрезе месторождений следующий, тыс. т/год: $X_1^* = 0$; $X_2^* = 15$; $X_3^* = 15$.

Оптимальное значение целевой функции, т.е. максимальная прибыль, составит 4800 тыс.долл.



Многовариантные расчеты при варьировании общего объема капиталовложений V^1 по рассматриваемым вариантам ($1 = 1, 2, \dots, m$) позволяют выделить множество оптимальных вариантов, которые должны быть проанализированы и среди них должен быть выбран лучший исходя из наиболее целесообразного инвестирования. Этот анализ не поддается формализации и проводится путем экспертных оценок.

Модель оптимизации мощности осваиваемых месторождений с учетом нелинейности капитальных и текущих затрат

Модель позволяет провести укрупненные расчеты при разработке инвестиционных планов. Модель основывается на эмпирических зависимостях, разработанных д-ром физ.-мат. наук, профессором Ю. М. Ампиловым и д-ром экон. наук, профессором А. А. Гертом и приведенных в параграфе 3.1:

- 1) удельных эксплуатационных затрат Z , руб/т, на добычу от годовой производительности предприятия по руде или обогатительной фабрики A , млн т/год: $Z = \Psi(A)$;
- 2) капитальных вложений K , млн руб., от годовой производительности предприятия по руде или обогатительной фабрики A , млн т/год: $K = \varphi(A)$.

Если модель включает в себя критерий минимизации капитальных затрат, то она будет записана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n K_j = \sum_{j=1}^n \varphi_j(A_j) \rightarrow \min;$$
$$\sum_{j=1}^n A_j \geq D,$$

где D — требуемая суммарная мощность предприятий.

Если же критерий должен включать в себя суммарные затраты, то для суммирования текущих и капитальных затрат целесообразно скорректировать капитальные затраты на желаемый срок окупаемости T^* . Тогда можно определить объем капитальных затрат,

приходящихся на один год: $\frac{\sum_{j=1}^n K_j}{T^*}$. В этом случае критерий оптимальности задачи целесообразно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n Z_j + \frac{\sum_{j=1}^n K_j}{T^*} = \sum_{j=1}^n \psi_j(A_j) + \frac{\sum_{j=1}^n \varphi_j(A_j)}{T^*} \rightarrow \min$$

при ограничении на удовлетворение требуемой суммарной мощности.

Обе эти модели являются моделями нелинейного программирования. Для отыскания оптимального решения целесообразно использовать один из ранее рассмотренных методов нелинейного программирования — метод суммирования градиента, метод проекции градиента и т. д. (прил. 4).

ПРИМЕР

Сформировать оптимальный набор технологий освоения месторождений исходя из данных, приведенных в табл. 9.8 и 9.9, если объем финансовых средств 850 млн долл.

Таблица 9.8. Ожидаемая годовая прибыль от применения разных технологий на нефтяных месторождениях, млн долл.

Технология добычи нефти	А	В	С
Вариант разработки с применением заводнения	20	30	25
Применение паротепловых обработок скважин	35	32	40

Таблица 9.9. Затраты на реализацию технологий добычи нефти в разрезе месторождений, млн долл.

Технология добычи нефти	А	В	С
Вариант разработки с применением заводнения	220	290	280
Применение паротепловых обработок скважин	300	320	400

Для решения задачи введем переменные $U_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ где i – месторождения ($i = 1, 2, 3$); j – технологии ($j = 1, 2$). Используя введенные искомые переменные, можно записать числовой вид модели выбора оптимального варианта технологий освоения месторождений. Критерий — максимизация суммарной годовой прибыли:

$$220U_{11} + 290U_{21} + 280U_{31} + 300U_{12} + 320U_{22} + 400U_{32} \leq 850.$$

Ограничение на использование при разработке первого месторождения не более одной технологии:

$$U_{11} + U_{12} \leq 1.$$

Ограничение на использование при разработке второго месторождения не более одной технологии:

$$U_{21} + U_{22} \leq 1.$$


Ограничение на использование при разработке третьего месторождения не более одной технологии:

$$U_{31} + U_{32} \leq 1.$$


Для формирования оптимального набора технологий освоения месторождений воспользуемся методом Фора и Мальгранжа. Сформируем таблицу для расчетов (табл. 9.10), расположив искомые переменные по убыванию коэффициентов целевой функции (прибыли).

Таблица 9.10. Определение оптимального набора технологий освоения месторождений нефти методом Фора и Мальгранжа

Итерация	U_{32}	U_{12}	U_{22}	U_{21}	U_{31}	U_{11}	Суммарные затраты, млн. долл.	Суммарная годовая прибыль, млн. долл.
1	1	1*	0	0	0	0	700	75
2	1	0	1*	0	0	0	720	72
3	1	0	0	1*	0	0	690	70
4	1*	0	0	0	0	1	620	60
5	0	1	1*	0	0	0	620	67
6	0	1	0	1*	0	0	590	65
7	0	1	0	0	1*	0	580	60
8	0	1*	0	0	0	0	300	35
9	0	0	1*	0	1	1	820	77
10	0	0	0	1	1	1	790	75




На первой итерации вариант выбора технологий осуществляется следующим образом. Начиная с первой по порядку переменной проверяем выполнение ограничений. Переменная U_{32} соответствует применению второй технологии на третьем месторождении, затраты равны 400 млн долл. Поскольку затраты меньше выделенных финансовых средств (850 млн долл.), то присваиваем этой переменной единицу ($U_{32} = 1$), что означает принятие второй технологии для добычи нефти на третьем месторождении. Следующая по порядку переменная U_{12} , которая соответствует применению второй технологии на первом месторождении, затраты равны 300 млн долл. Суммарные затраты на реализацию выбранных технологий равны $400 + 300 = 700$ млн долл. Эти затраты также не превышают выделенных финансовых средств ($700 < 850$), поэтому $U_{12} = 1$. Далее по порядку следует переменная U_{22} , которая соответствует второй технологии на втором месторождении, затраты равны 320 млн долл. Суммарные затраты $400 + 300 + 320 = 1020$ млн долл, превышают размер выделенных финансовых средств, поэтому отказываемся от использования этой технологии, т.е. $U_{22} = 0$. Попытка воспользоваться первой технологией на втором месторождении (переменная U_{21} , затраты 290 млн долл.) приводит также к превышению суммарных затрат размера, выделенных финансовых средств ($400 + 300 + 290 = 990$ млн долл.). Поэтому данной переменной также присваиваем значение ноль ($U_{21} = 0$). Следующая переменная U_{31} соответствует применению первой технологии на третьем месторождении, однако, поскольку $U_{32} = 1$, то в данном варианте плана для третьего месторождения уже назначена вторая технология.



Ограничения модели запрещают выбор для месторождения более одной технологии, поэтому принимаем $U_{31} = 0$. Аналогичные рассуждения проводим для следующей переменной, которая также принимает значение ноль ($U_{11} = 0$). В результате получен первый вариант плана, в котором $U_{32} = 1$ и $U_{12} = 1$, а остальные переменные равны нулю, т.е. в данном варианте плана предполагается освоение третьего и второго месторождений нефти с применением первой технологии. Первое месторождение не осваивается. Суммарные затраты на реализацию этого варианта составляют $400 + 300 = 700$ млн долл., а суммарная годовая прибыль равна $40 + 35 = 75$ млн долл.

В сформированном плане отыскивается младшая единица (крайняя правая единица, после которой есть хотя бы один ноль). Эта единица соответствует переменной U_{12} , отмечаем в табл. 9.10 ее символом «*».

Поскольку младшая единица найдена, формируем новый вариант плана освоения месторождений. На итерации 2 на месте младшей единицы ставим ноль ($U_{12} = 0$), все переменные, находящиеся левее младшей единицы, сохраняют свои значения ($U_{32} = 1$), а переменные правее младшей единицы определяются так, как это было описано выше.



Рассмотрим переменную U_{22} , затраты на освоение второго месторождения с применением второй технологии равны 320 млн долл. Суммарные затраты равны $400 + 320 = 720$ млн долл., что меньше выделенных средств, поэтому выбираем данный вариант освоения второго месторождения, т.е. $U_{22} = 1$. Проводя подобные рассуждения, получаем новый вариант плана, суммарные затраты на который равны 720 млн долл., а годовая прибыль составляет 72 млн долл.

Аналогичные расчеты проводятся вплоть до десятой итерации, когда оказывается невозможным отыскать младшую единицу. Перебор вариантов освоения месторождений завершен. Переходим к выбору оптимального плана освоения месторождений. Для этого находим максимальное значение суммарной годовой прибыли (последний столбец табл. 9.10), оно равно 77 млн долл, и находится на девятой итерации. При этом ненулевые значения принимают переменные U_{22} , U_{31} , U_{11} , которые составляют оптимальный план. Второе месторождение осваивается с применением второй технологии, третье — с применением первой технологии, первое — с применением первой технологии. Суммарные затраты на такой вариант освоения месторождений равны 820 млн долл.