

**УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА.**

**ОБОБЩЁННЫЕ КООРДИНАТЫ,  
СКОРОСТИ И СИЛЫ.**

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
Динамика*

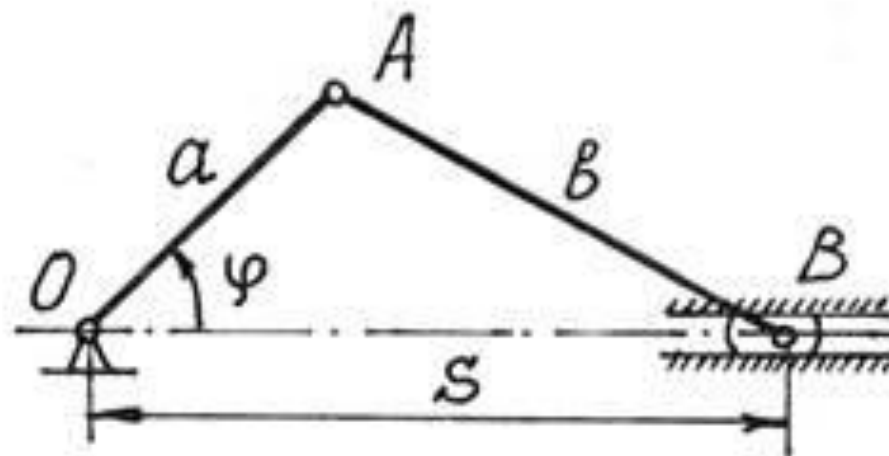
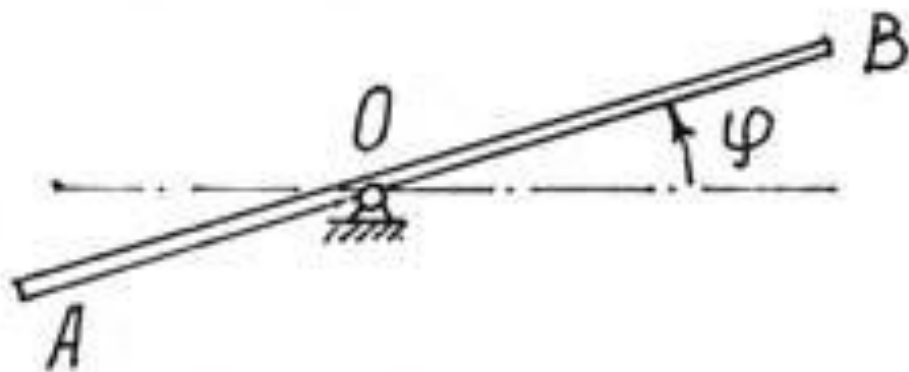
ЛЕКЦИЯ 12

# Цель введения обобщенных координат, скоростей и сил

- Определять положение любой точки механической системы
- Научиться описывать движение механической системы с несколькими степенями свободы

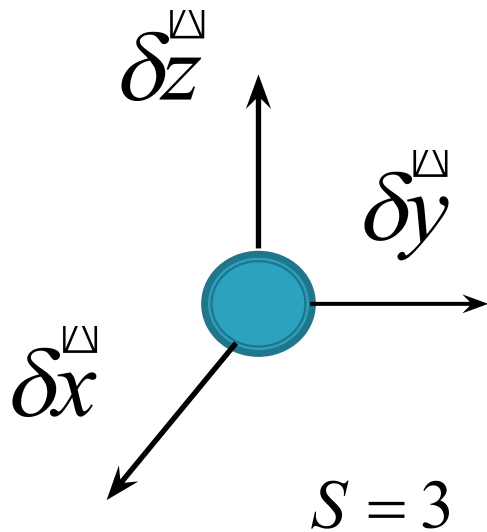
# ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

**Обобщенные координаты** – это независимые между собой параметры любой размерности, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве.



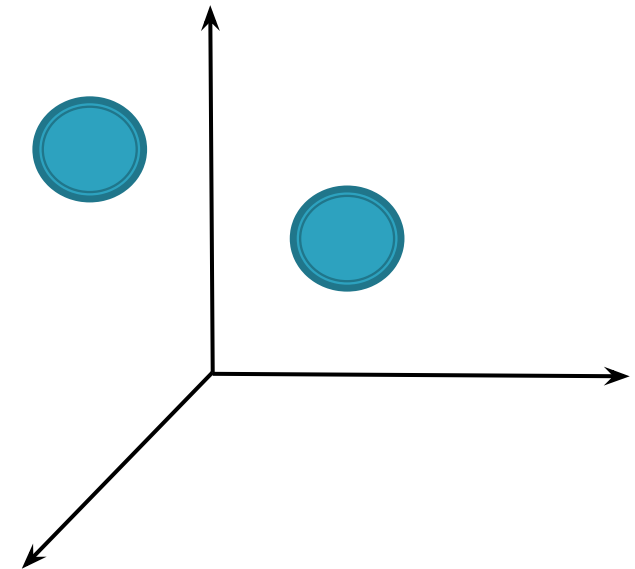
# ПОНЯТИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Число независимых между собой возможных перемещений МС называется числом степеней свободы системы.



У механической системы с голономными связями число обобщенных координат совпадает с числом её степеней свободы

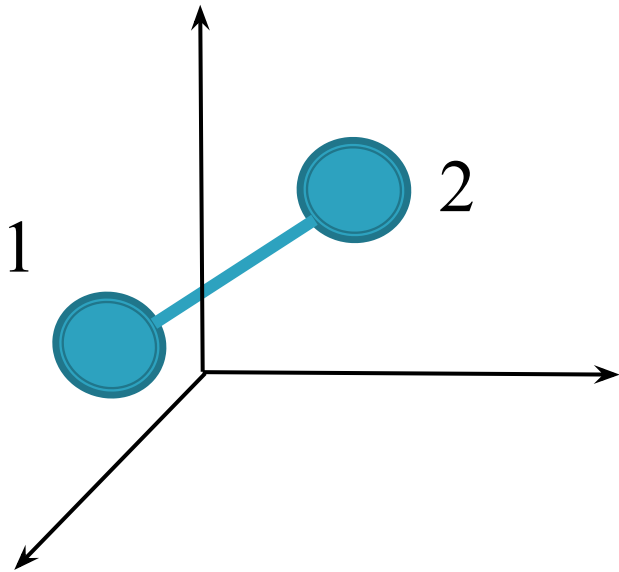
$$S = 6$$



# КОЛИЧЕСТВО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Если бы система была свободной, то все  $3N$  декартовых координат ее точек были бы независимыми.

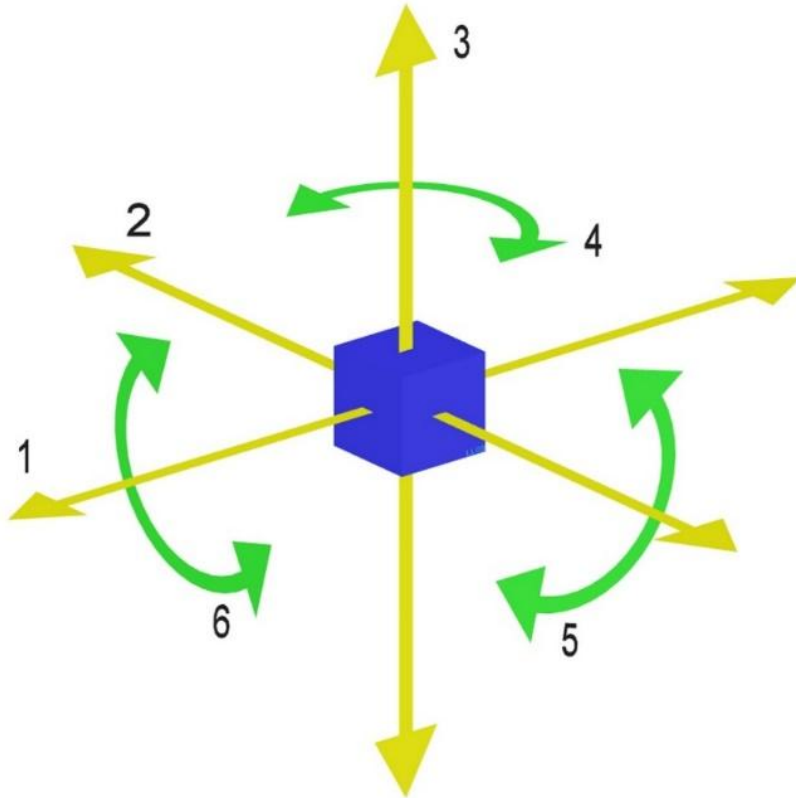
В несвободной механической системе  $3N$  декартовых координат ее точек должны удовлетворять  $m$  уравнениям связей, поэтому независимыми среди них будут только  $S = 3N - m$  координат.



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = L^2$$

$$m = 1 \Rightarrow s = 5$$

# КОЛИЧЕСТВО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ



У свободного твёрдого тела 6 степеней свободы:  
3 поступательных вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК МС

Обобщенные координаты будем обозначать буквой -  $q$

Тогда радиус-векторы всех точек системы можно определить как функцию обобщенных координат

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad k=1, 2, 3, \dots, n$$

# ОБОБЩЁННЫЕ СКОРОСТИ

При движении системы её обобщённые координаты будут меняться со временем по закону

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), q_s = f_s(t)$$

- кинематическое уравнение движения в обобщённых координатах.

Производные от обобщённых координат по времени называются **обобщёнными скоростями**

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

*Размерность обобщённой скорости зависит от размерности соответствующей обобщённой координаты.*



# ОБОБЩЁННЫЕ СИЛЫ

Рассмотрим МС, состоящую из  $n$  материальных точек, на которые действуют силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$

Пусть система имеет  $S$  степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2 \dots q_s$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата  $q_1$  получает приращение  $\delta q_1$  а *остальные координаты не изменяются.*

Тогда каждый из радиус-векторов  $\vec{r}_k$  точек системы получит элементарное приращение  $(\delta \vec{r}_k)_1$

# ОБОБЩЁННЫЕ СИЛЫ

Поскольку изменяется только координата  $q_1$ , то  $(\delta r_k^\Delta)_1$  вычисляется как *частный дифференциал*

$$(\delta r_k^\Delta)_1 = \frac{\partial r_k^\Delta}{\partial q_1} \delta q_1$$

Тогда вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении.

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= F_1^\Delta (\delta r_1^\Delta)_1 + F_2^\Delta (\delta r_2^\Delta)_1 + \dots + F_n^\Delta (\delta r_n^\Delta)_1 = \\ &= F_1^\Delta \frac{\partial r_1^\Delta}{\partial q_1} \delta q_1 + F_2^\Delta \frac{\partial r_2^\Delta}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + F_n^\Delta \frac{\partial r_n^\Delta}{\partial q_1} \delta q_1; \end{aligned}$$

# ОБОБЩЁННЫЕ СИЛЫ

$$\begin{aligned}\delta A_1 &= \overset{\boxtimes}{F}_1 (\overset{\boxtimes}{\delta r}_1)_1 + \overset{\boxtimes}{F}_2 (\overset{\boxtimes}{\delta r}_2)_1 + \dots + \overset{\boxtimes}{F}_n (\overset{\boxtimes}{\delta r}_n)_1 = \\ &= \overset{\boxtimes}{F}_1 \frac{\partial \overset{\boxtimes}{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \overset{\boxtimes}{F}_2 \frac{\partial \overset{\boxtimes}{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \overset{\boxtimes}{F}_n \frac{\partial \overset{\boxtimes}{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1;\end{aligned}$$

$$\delta A_1 = \left( \sum \overset{\boxtimes}{F}_k \frac{\partial \overset{\boxtimes}{r}_k}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = Q_1 \delta q_1,$$

$Q_1$  - обобщённая сила, соответствующая координате  $q_1$

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно *меняются все обобщенные координаты*, то сумма элементарных работ приложенных сил на этом перемещении равна:

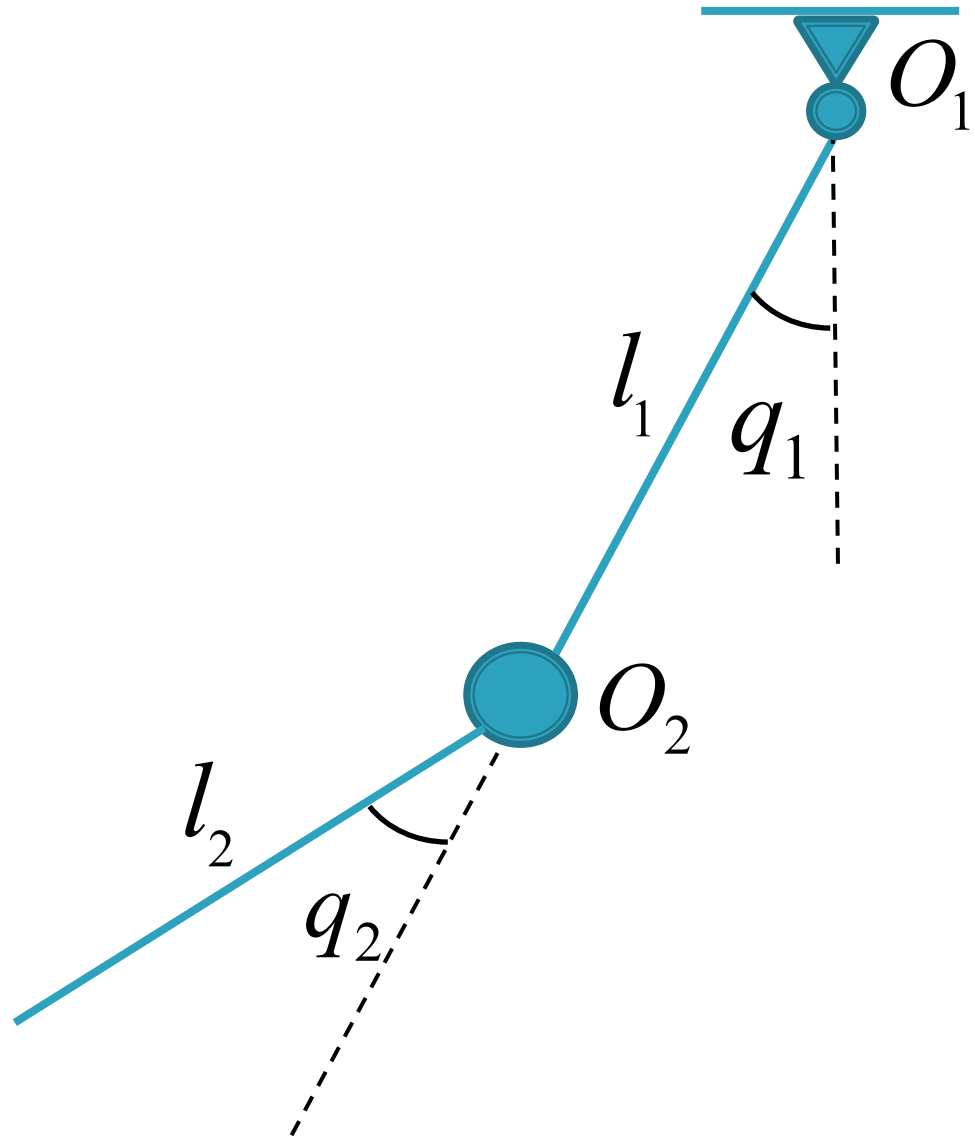
$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n$$

**Обобщённые силы** – это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщённых координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

*Размерность обобщённой силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщённой координаты.*

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}$$

# ПРИМЕР (ДВОЙНОЙ МАЯТНИК)

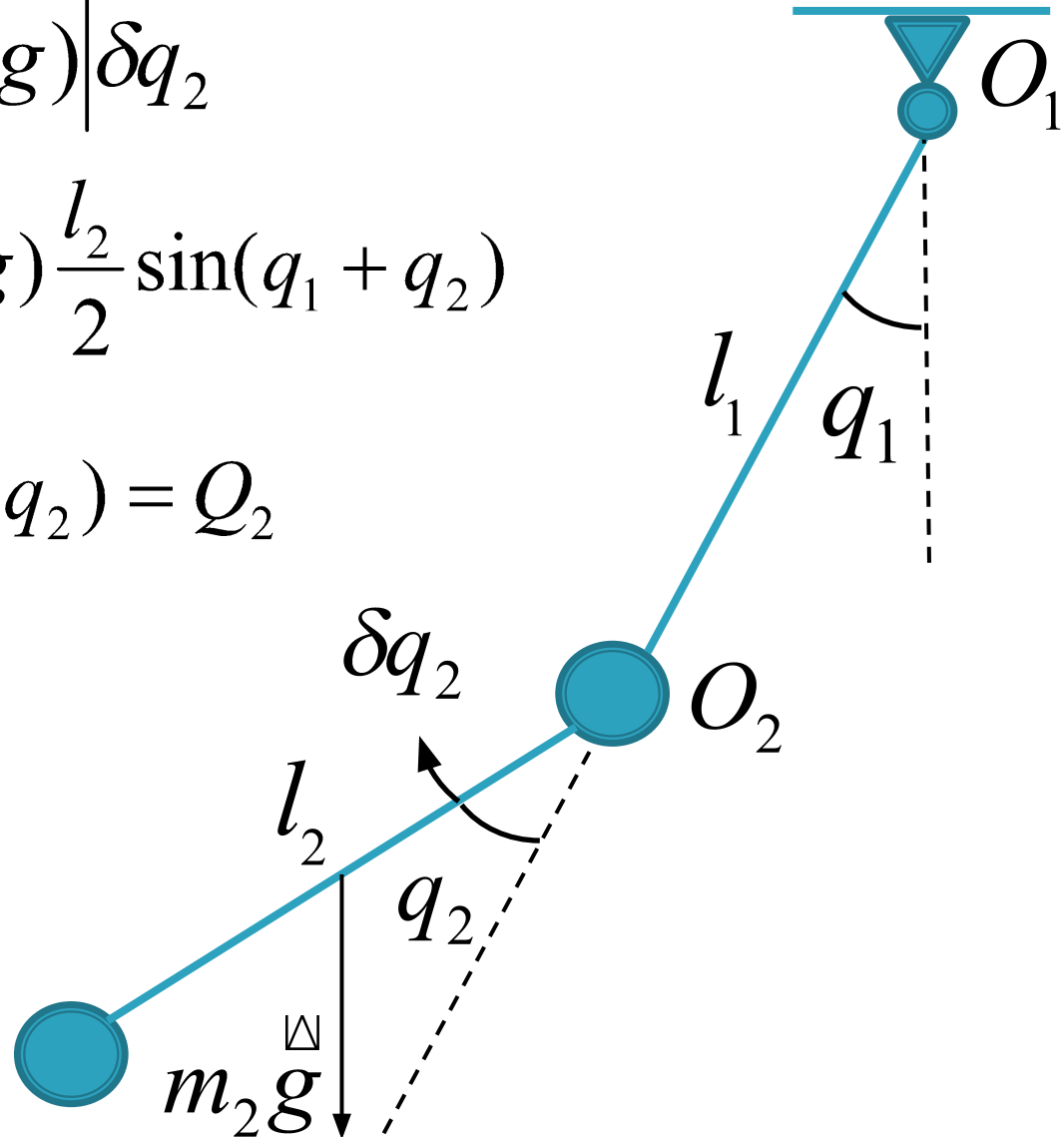


# ПРИМЕР (ДВОЙНОЙ МАЯТНИК)

$$\delta A_2 = -|M_{O_2}(m_2g)|\delta q_2$$

$$|M_{O_2}(m_2g)| = (m_2g)\frac{l_2}{2}\sin(q_1 + q_2)$$

$$-(m_2g)\frac{l_2}{2}\sin(q_1 + q_2) = Q_2$$



$$\delta A_1 = -\left| M_{O_1}(m_1 g) + M_{O_1}(m_2 g) \right| \delta q_1$$

$$\left| M_{O_1}(m_1 g) \right| = m_1 g \frac{l_1}{2} \sin q_1$$

$$\left| M_{O_1}(m_2 g) \right| = m_2 g \left( l_1 \sin q_1 + \frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \right)$$

$$-\left| M_{O_1}(m_1 g) + M_{O_1}(m_2 g) \right| = Q_1$$

