

# Проект по теме «Формула Пика»

Авторы:

Карпухин Д. 9-Д

Косьянков Н. 9-Д

# Георг Пик

**Георг Александр Пик** (10 августа 1859 — 13 июля 1942) — австрийский математик, родился в еврейской семье.

Мать — Йозефа Шляйзингер.  
Отец — Адольф Йозеф Пик.



# Образование и работы

- Его обучал отец, возглавлявший частный институт
- В 16 лет он окончил школу и поступил в Венский университет
- В 20 лет получил право преподавать физику и математику
- 16 апреля 1880 года защитил докторскую диссертацию «О классе абелевых интегралов»
- Им написано более 50 работ. Широкую известность получила открытая им в 1899 году теорема Пика для расчёта площади многоугольника. В Германии эта теорема включена в школьные учебники

# Преподавательская деятельность

- В Немецком университете в Праге в 1888 году Пик получил место экстраординарного профессора математики, затем в 1892-м стал ординарным профессором. В 1900—1901 годах занимал пост декана философского факультета.
- В 1910 году Георг Пик был в комитете, созданном Немецким университетом Праги для рассмотрения вопроса о принятии Альберта Эйнштейна профессором в университет.



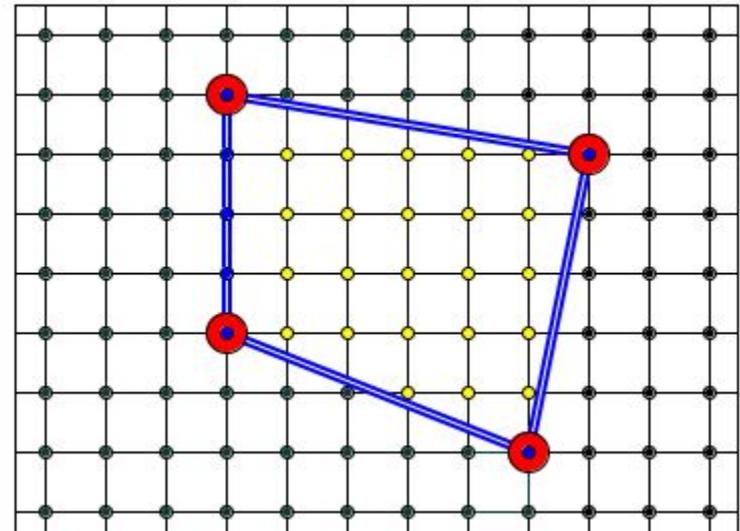
# Формула Пика

Теорема Пика:

Пусть  $L$  - число целочисленных точек внутри многоугольника,  $B$  - количество целочисленных точек на его границе,  $S$  — его площадь. Тогда справедлива формула Пика:

$$S = L + B/2 - 1$$

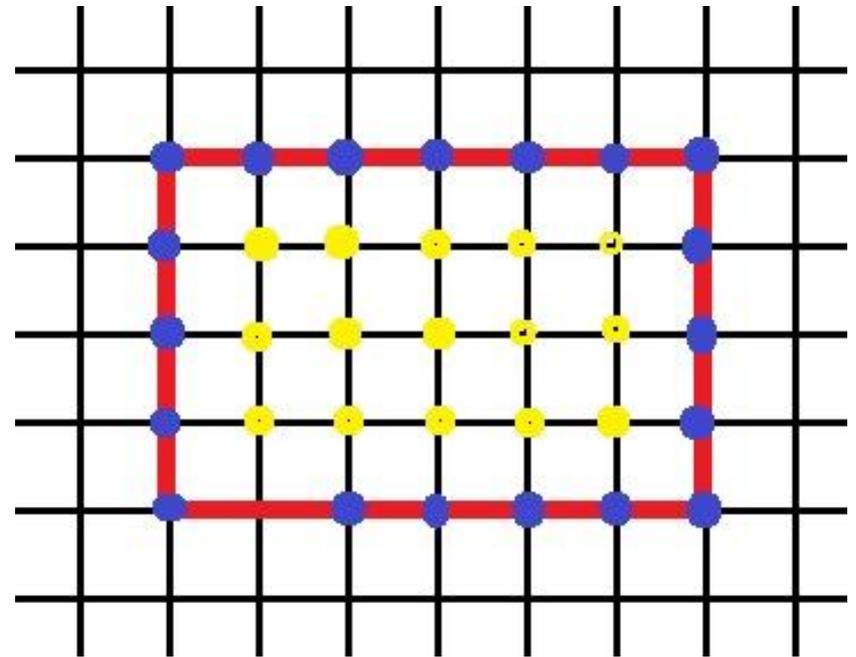
Для многоугольника на рисунке  $L=23$  (желтые точки),  $B=7$  (синие точки), значит  $S=23+3,5-1=25,5$  клеток



# Доказательство

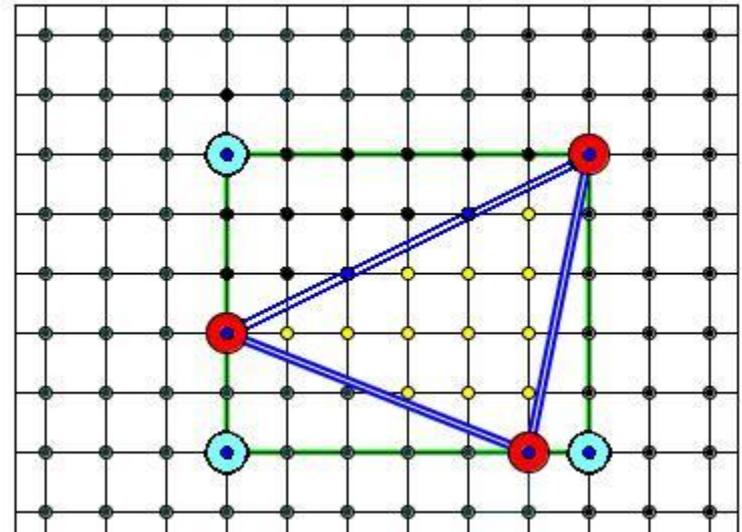
- Рассмотрим прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях решетки. Пусть длины его сторон равны  $X$  и  $Y$ . Имеем в этом случае:

- $L=(X-1)(Y-1)$
- $B=2X+2Y$
- $S=XY-X-Y+1+X+Y-1=XY$



# Доказательство

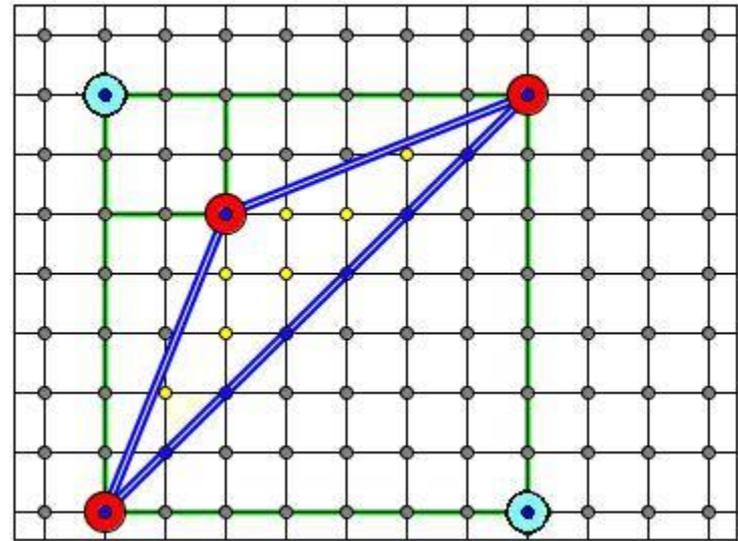
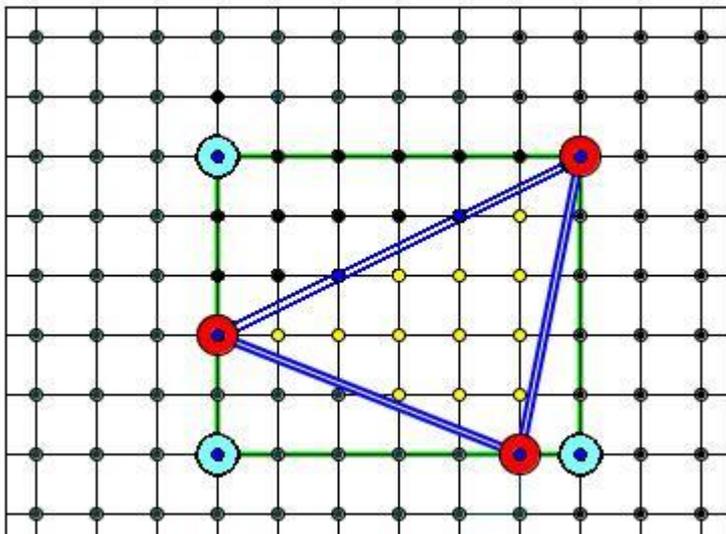
- Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами, || осям координат
- Такой треугольник получается при разрезании прямоугольника по диагонали
- Пусть на диагонали лежит  $C$  точек.
- $L = ((X-1)(Y-1) - C + 2) / 2$
- $B = X + Y + C - 1$
- $S = 0,5XY - 0,5X - 0,5Y + 0,5 - 0,5C + 1 + 0,5X + 0,5Y + 0,5C - 0,5 - 1$
- $S = 0,5XY - 0,5X - 0,5Y + 0,5 - 0,5C + 1 + 0,5X + 0,5Y + 0,5C - 0,5 - 1$
- $S = 0,5XY$



# Доказательство

Произвольный треугольник можно получить, отрезав от прямоугольника прямоугольные треугольники и, возможно, прямоугольник.

Поскольку и для прямоугольника, и для треугольника формула Пика верна, мы получаем, что она будет справедлива и для произвольного треугольника.



# Доказательство для МНОГОУГОЛЬНИКА

Пусть многоугольник  $M$  и треугольник  $T$  имеют общую сторону. Предположим, что для  $M$  формула Пика справедлива, докажем, что она будет верна и для многоугольника, полученного из  $M$  добавлением  $T$ . Так как  $M$  и  $T$  имеют общую сторону, то все целочисленные точки, лежащие на этой стороне, кроме двух вершин, становятся внутренними точками нового многоугольника. Вершины же будут граничными точками. Обозначим число общих точек через  $c$  и получим

$L_{MT} = L_M + L_T + (c - 2)$  — число внутренних целочисленных точек нового многоугольника,

$V_{MT} = V_M + V_T - 2(c - 2) - 2$  — число граничных точек нового многоугольника.

Из этих равенств получаем

$$L_M + L_P = L_{MT} - (c - 2), V_M + V_P = V_{MT} + 2(c - 2) + 2 .$$

# Доказательство для многоугольника

Так как мы предположили, что теорема  
верна для  $M$  и для  $T$  по отдельности, то

$$S_{MT} = S_M + S_T = (L_M + B_M/2 - 1) + (L_T + B_T/2 - 1) =$$

$$= (L_M + L_T) + (B_M + B_T)/2 - 2 =$$

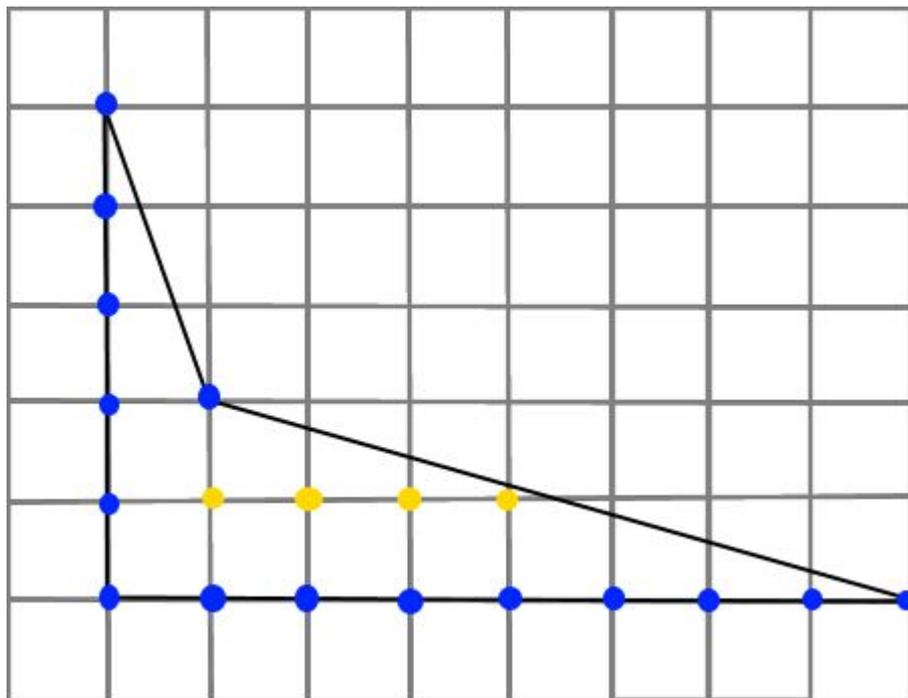
$$= L_{MT} - (c - 2) + (B_{MT} + 2(c - 2) + 2)/2 - 2 =$$

$$= L_{MT} + B_{MT}/2 - 1 .$$

Тем самым, формула Пика доказана.

# Применение

(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



Желтые точки – точки внутри фигуры

(4)

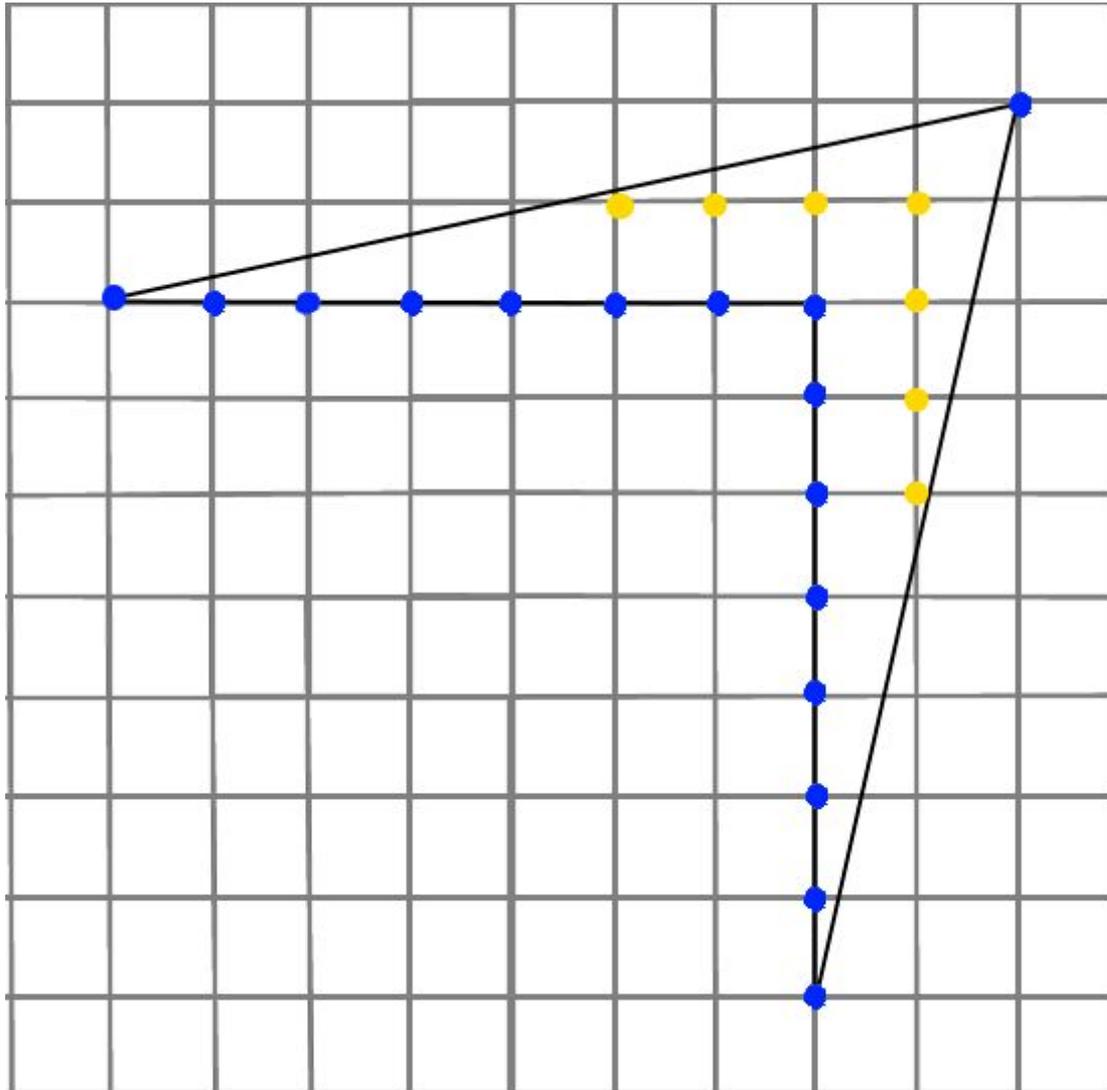
Синие точки – точки на границах

(15)

$$4 + 15/2 - 1 = 4 + 7,5 - 1 = 10,5$$

# Применение

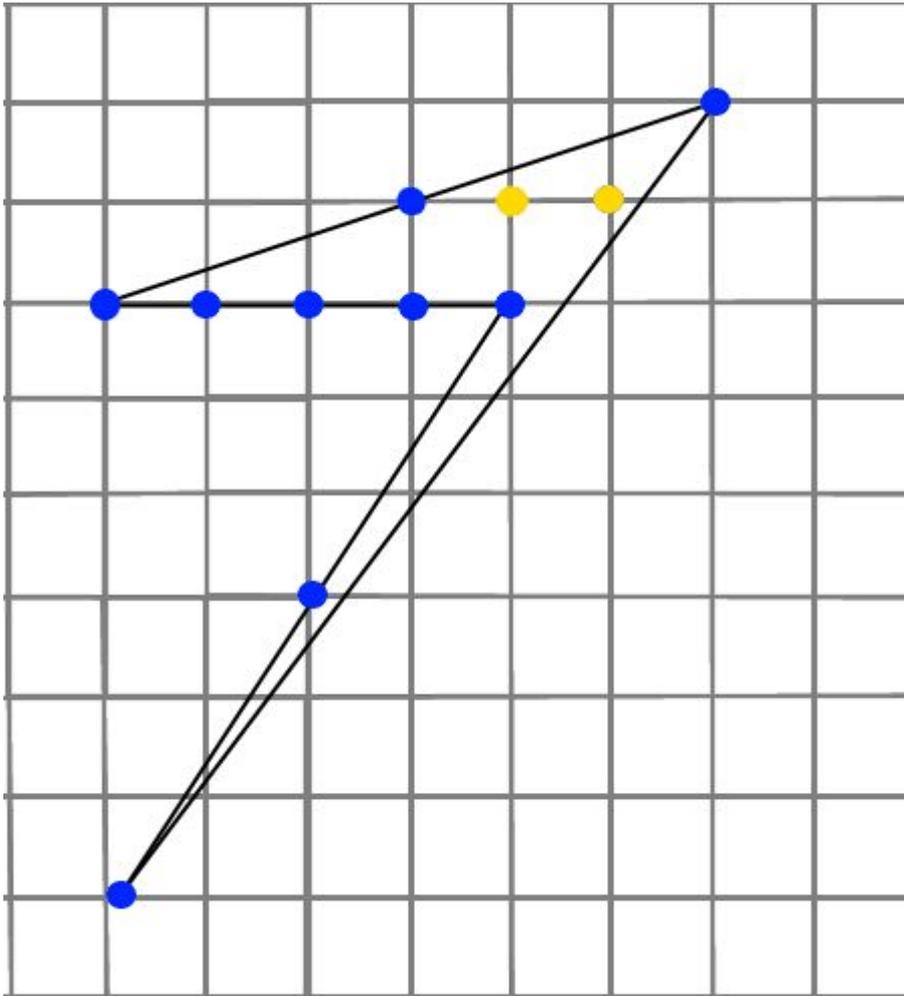
(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



Желтые точки – точки  
внутри  
фигуры(7)  
Синие точки – точки на границах  
(16)  
 $7 + 16/2 - 1 = 7 + 8 - 1 = 14$

# Применение

(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



Желтые точки – точки  
внутри

фигуры(2)

Синие точки – точки на границах

(9)

$$2 + \frac{9}{2} - 1 = 2 + 4,5 - 1 = 5,5$$