



Теория электрической связи (часть II)

Профессор, д.ф.-м.н. А.Г. Флакман

Кафедра бионики и статистической радиофизики ННГУ

Литература

1. Прокис Д. Цифровая связь. Пер. с англ. – М: Радио и связь, 2000. 800с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
3. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Монография. – Нижний Новгород: ННГУ, 2011. – 368 с.
4. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в системах мобильной радиосвязи (Электронное методическое пособие). – Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. 107 стр.
5. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Современные методы пространственной обработки сигналов в радиосистемах с антенными решетками. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Р.Е. Алексеева, 2008. - 171 с.
6. В.Т. Ермолаев, А.А. Мальцев, А.Г. Флакман, О.В. Болховская, А.В. Ключев. Мобильная связь: вопросы теории и типовые задачи. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. 234 с.



Лекция 1. Введение

Число пользователей мобильной связи (в млн.)

140 (1996 г.)	205 (1997 г.)	290 (1998 г.)
380 (1999 г.)	500 (2000 г.)	680 (2001 г.)

Страны с наибольшим удельным числом пользователей (на конец 20 века)

1. Финляндия. 2. Швеция. 3. Норвегия. 4. Дания

- Первый стандарт беспроводного доступа в Интернет (стандарт 802.11 Wi-Fi (Wireless Fidelity)) на передачу данных со скоростью до 2 Мбит/с в диапазоне 2,4 ГГц ратифицирован в 1997 году
- Стандарт 802.11b на передачу данных со скоростью до 11 Мбит/с в диапазоне 2,4 ГГц ратифицирован в 1999 году
- Стандарт 802.11a ратифицирован в 1999 году и регламентирует скорость передачи данных до 54 Мбит/с в частотном диапазоне 5 ГГц



Основные концепции построения сотовых сетей

Особенности сотовой архитектуры:

- передатчики небольшой мощности
- небольшие зоны покрытия сотами
- повторное использование частот
- дробление сот для уменьшения мощности
- управление передачей вызова (handoff)

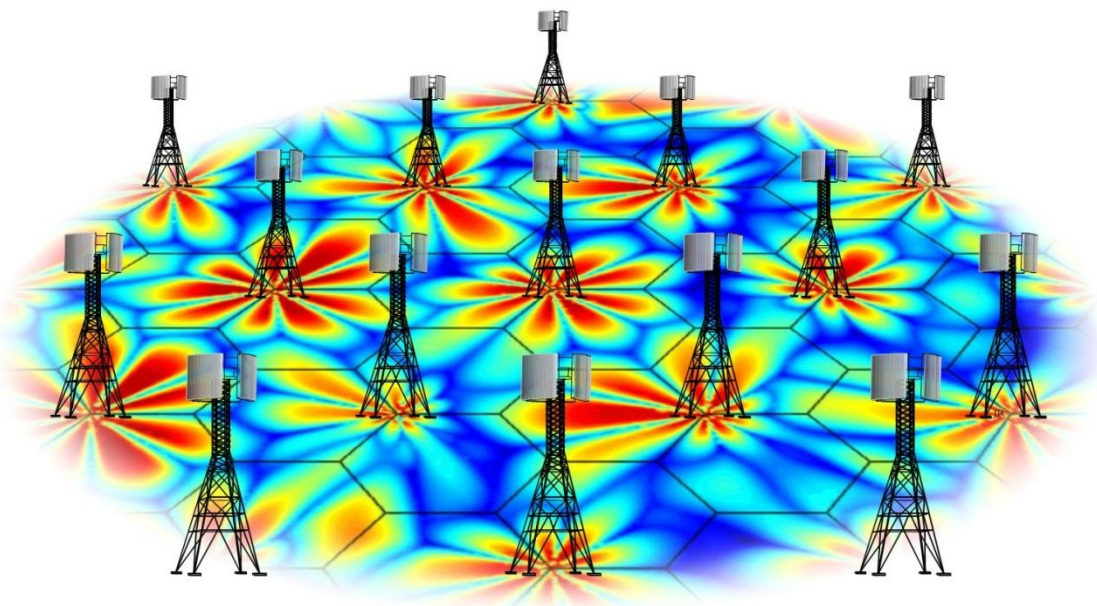
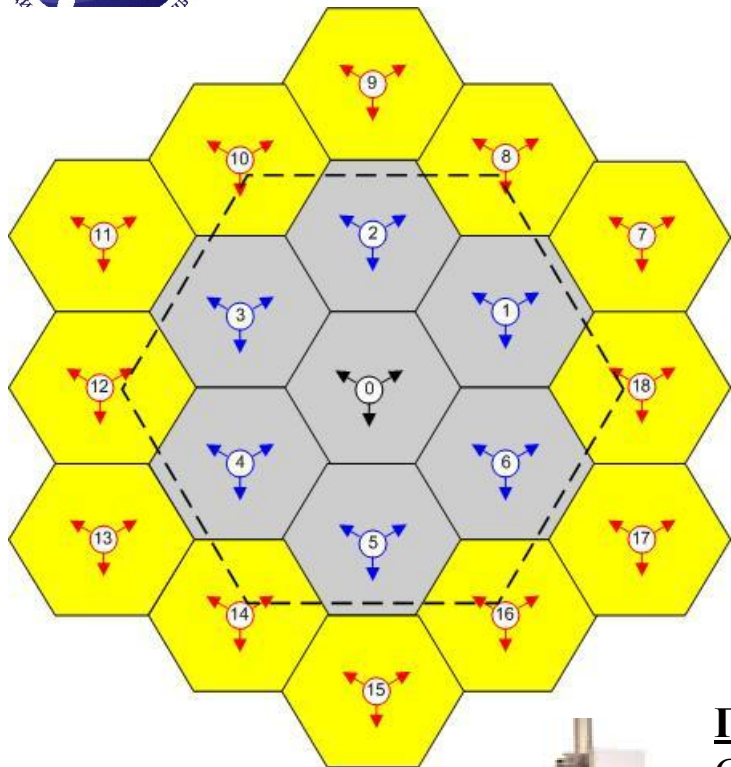
Макросота ~ 35 км

Сота ~ 3-5 км

Микросота ~ 0.8-1 км

Пикосота ~ 0.2 км

Гексагональная структура сотовой сети



Пример используемой антенны (2100 МГц)

Столбец излучателей (10 излучателей)

Поляризация – двойная, линейная с наклоном +45 и -45 град.

Высота столбца - 697 мм

Ширина столбца - 167 мм

Глубина столбца - 58 мм

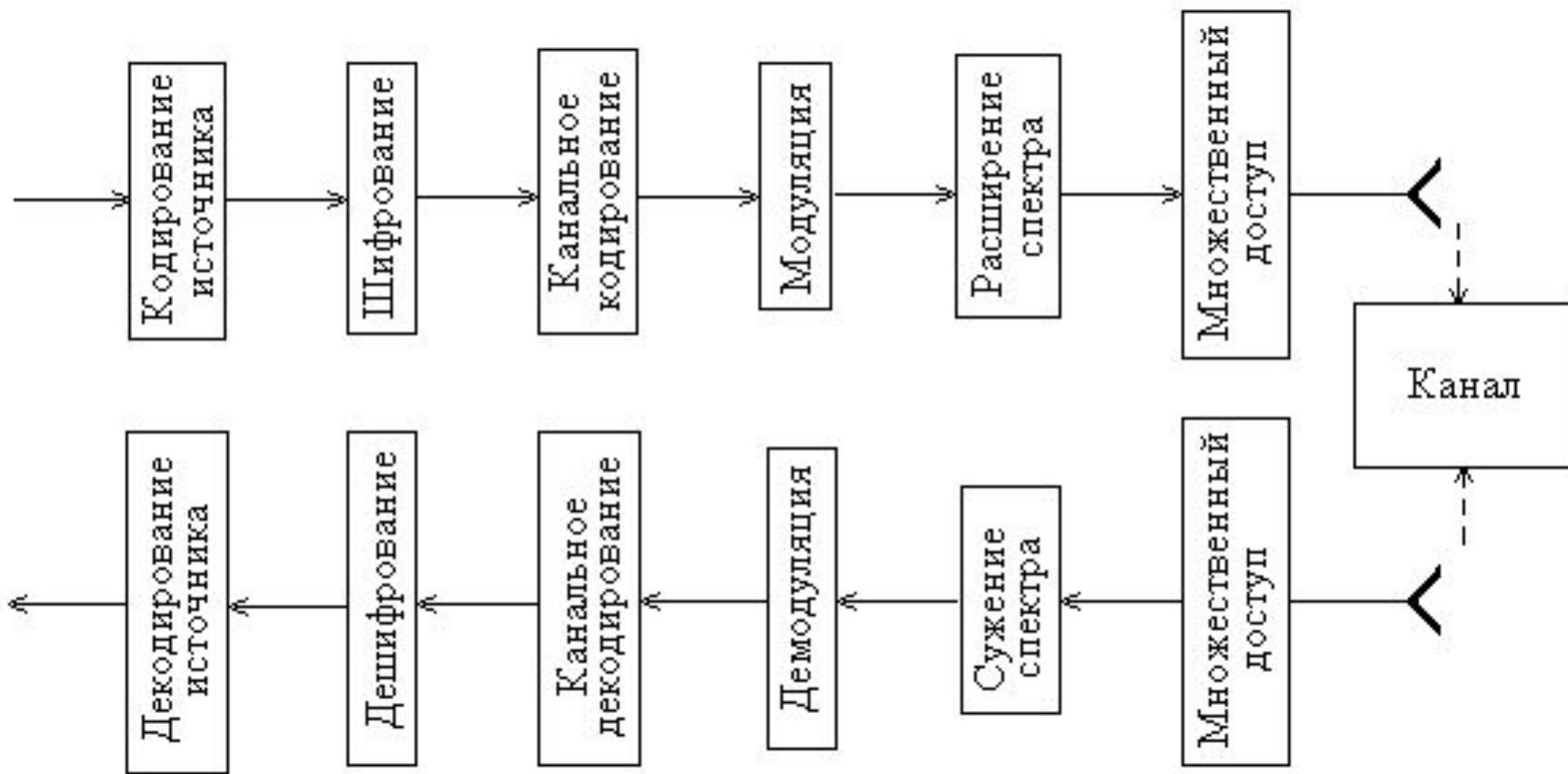
Ширина луча (по уровню половинной мощности):

горизонтальная плоскость - 65 град.

Вертикальная плоскость - 13 град.



Функциональная схема цифровой системы связи

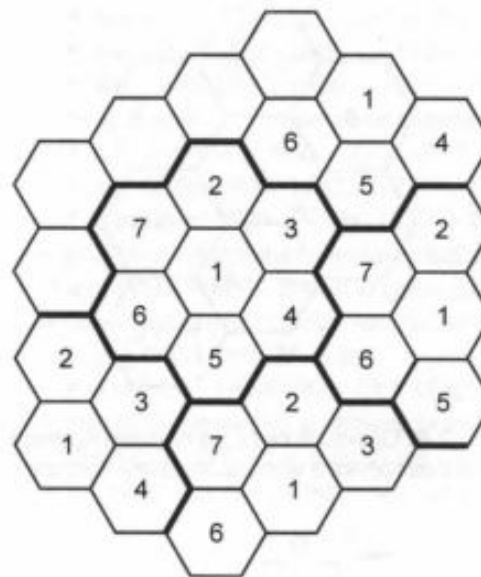


Повторное использование частот (frequency reuse)

Повторное использование частот заключается в том, что в соседних сотах используются разные полосы частот, которые повторяются через несколько сот.

Кластер (cluster) – группа сот с различным набором частот.

Используется три частоты f_1, f_2, \dots, f_3 (3-элементный кластер)



Используется семь частот f_1, f_2, \dots, f_7 (7-элементный кластер)

Цифра внутри соты показывает используемую частоту

Расстояние между сотами с одинаковыми частотами увеличилось



Повторное использование частот

Расстояние между центрами сот с одинаковыми частотами, $D = R\sqrt{3N}$

R – радиус соты (радиус описанной окружности),

N – число сот в кластере.

$N=3, D=3R.$ $N=7, D=4,58R.$ $N=19, D=7,55R.$

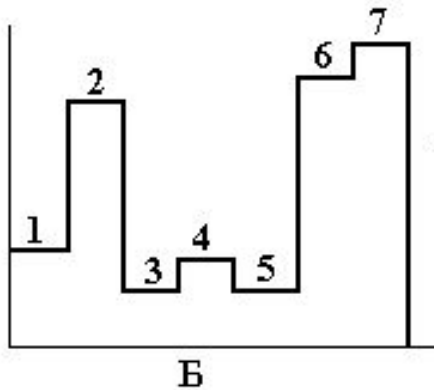
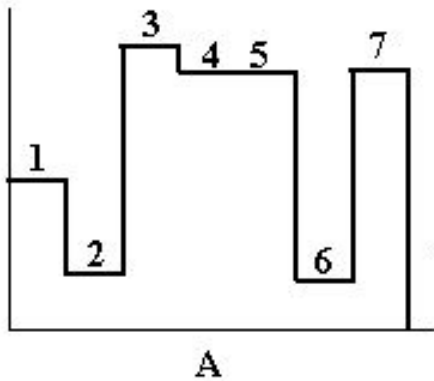
Отношение $D/R=q$ называется коэффициентом уменьшения соканальных помех или коэффициентом соканального повторения.

Обратная величина $C=1/N$ называется коэффициентом повторного использования частот

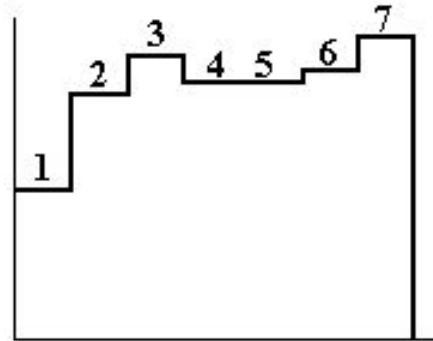
Расстояние между центрами сот с одинаковыми частотами $D = R\sqrt{\frac{3}{C}}$

Жесткая «Handoff»-процедура

Жесткий handoff - обслуживание лучшей базовой станцией (БС)



Пример двух БС (А и Б)



Жесткий handoff приводит к кратковременной передаче пользователя от одной БС к другой, то есть возможны перерывы в сеансе связи

Сигналы, принимаемые базовыми станциями А и Б

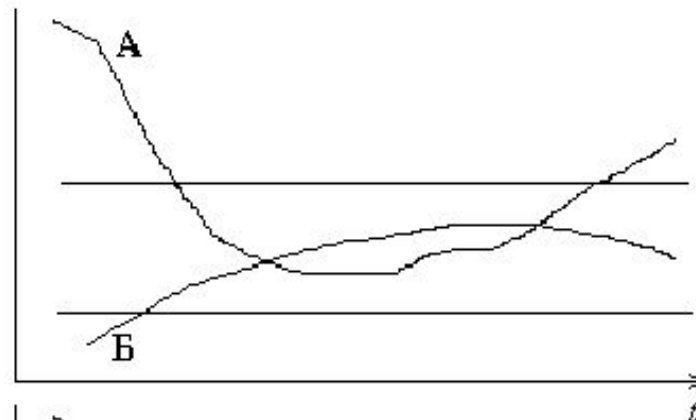
Результирующий сигнал формируется путем коммутации и «склеивания» сигналов от разных базовых станций

Мягкая «Handoff»-процедура

Мягкий handoff - обслуживание лучшей базовой станцией (БС)

Пример двух БС

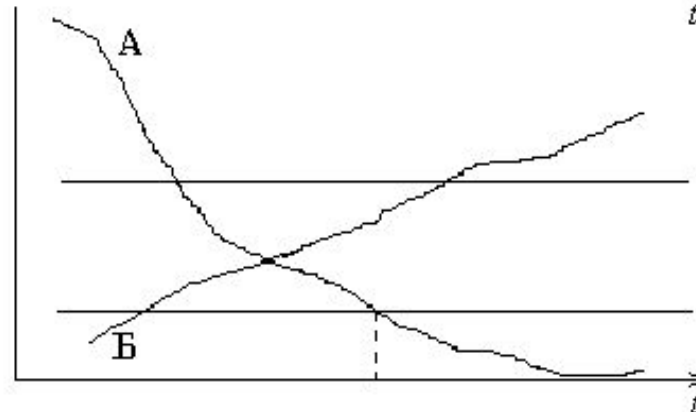
Нет Handoff



Пороговое ОСШ
(выбор кандидатных
БС)

Пороговое ОСШ
(замена
обслуживающей БС)

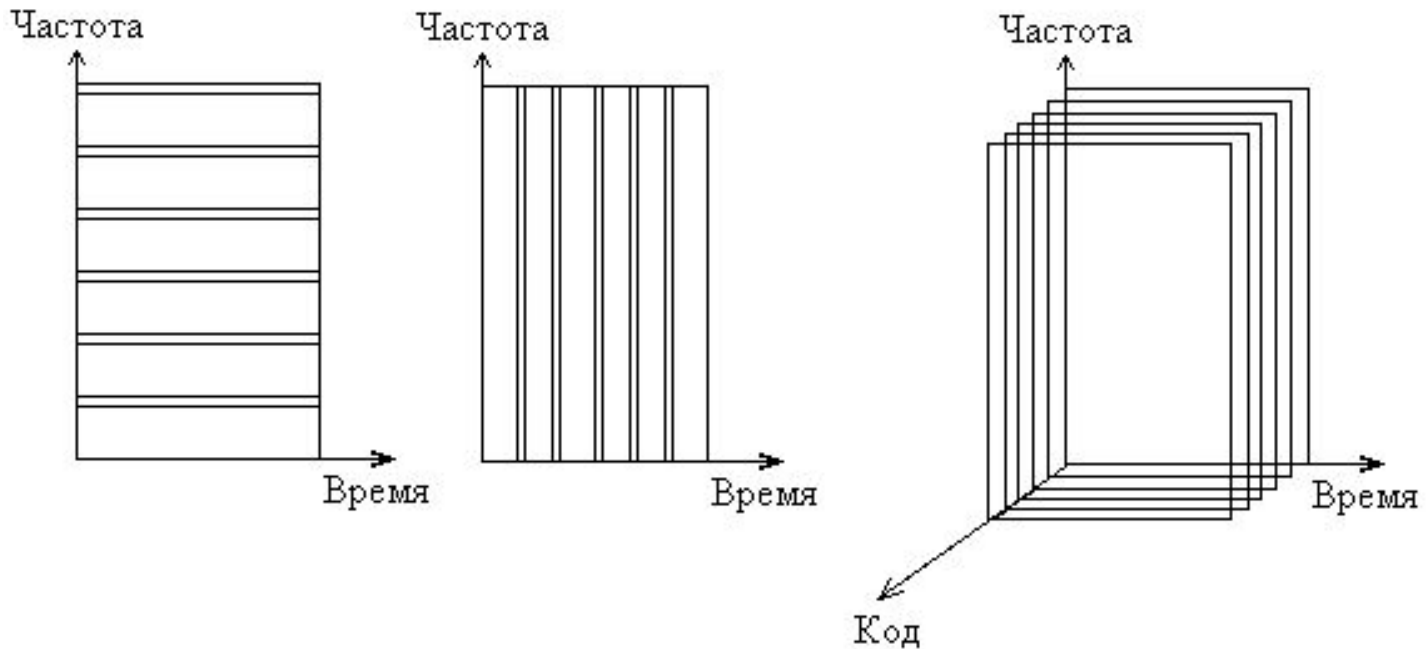
Handoff



Мягкий handoff уменьшает число передач пользователя от одной БС к другой, то есть число возможных перерывах в сеансе связи

Сигналы, принимаемые базовыми станциями А и Б

Основные принципы множественного доступа (разделения) пользователей



**Частотное
разделение - FDMA
(frequency division
multiple access)**

**Временное разделение
- TDMA (time division
multiple access)**

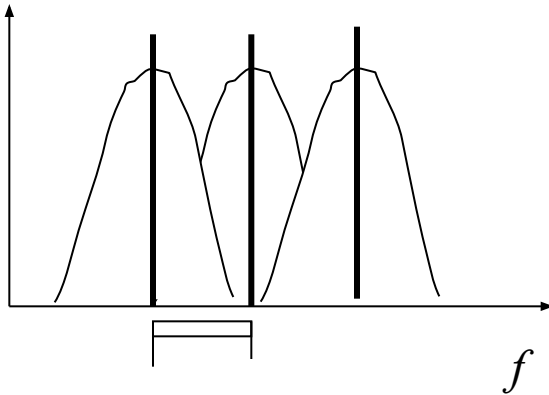
**Кодовое разделение
пользователей -
CDMA (code division
multiple access)**

Частотное разделение пользователей

Скорость передачи данных R бит/сек (один пользователь).

M – число пользователей (число отдельных полос).

Длительность импульсов увеличивается в M раз, то есть все M пользователей одновременно передают информацию, но с уменьшенной скоростью R/M бит/сек.



1. Взаимное влияние каналов должно быть минимально возможным;
2. Время ожидания пакета для всех пользователей одинаково;
3. При замираниях в канале некоторые частотные каналы могут быть сильно ослаблены.

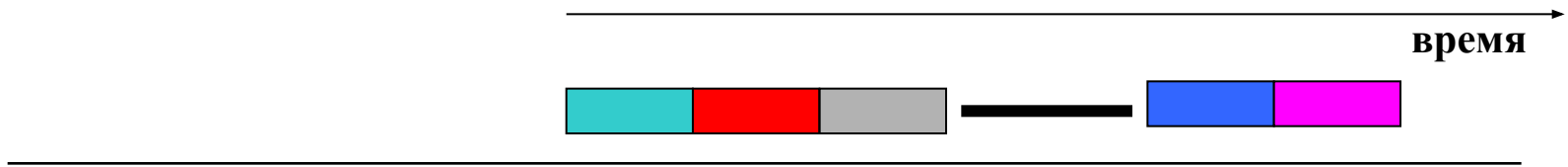
Разнос частотных каналов
(GSM стандарт - 200КГц)

M – число пользователей;
 b – число бит в пакете;
 T – время передачи пакета.

Скорость передачи $R_{FD} = M \frac{b}{T}$ бит / сек



Временное разделение пользователей



Скорость передачи данных R бит/сек (один пользователь).
 M – число пользователей (число временных интервалов).
Каждый пользователь использует всю полосу и передает информацию со скоростью R бит/сек (длительность импульсов не изменяется), но за время T/M .

Пакет передается за меньшее время

M – число пользователей;
 b – число бит в пакете;
 T – время передачи пакета.

Скорость передачи $R_{TD} = \frac{b}{T/M}$ бит /сек

$$R_{FD} = R_{TD}$$

Скорость передачи одинакова для частотного и временного разделения



Производительность частотного и временного разделения пользователей

Время задержки пакета состоит из среднего времени w ожидания пакета и из среднего времени τ передачи пакета

$$D = w + \tau$$

Частотное разделение - пакет передается без задержки в течение T секунд

$$w_{FD} = 0; \tau_{FD} = T$$

Временное разделение - пакет передается с задержкой в течение T/M секунд.
Время ожидания пакета для всех пользователей различно
Время задержки m -го пакета $(m-1)T/M$

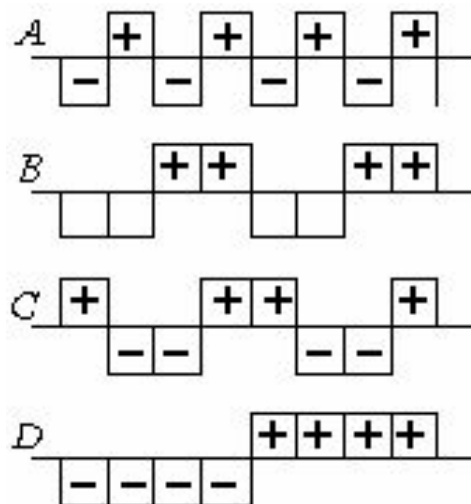
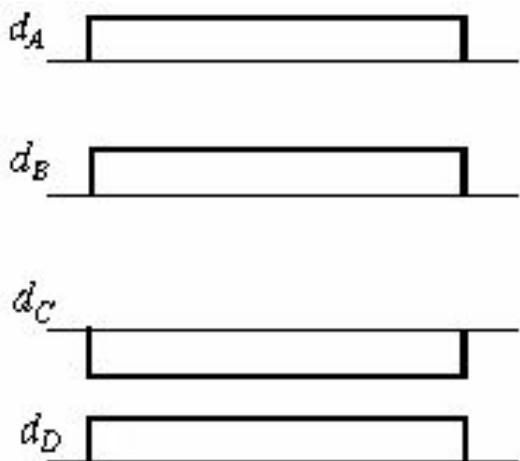
Среднее время ожидания m -го пакета $w_{TD} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (m-1) \frac{T}{M} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$

$$D_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \frac{T}{M} \quad D_{TD} = D_{FD} - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad D_{TD} = D_{FD} - \frac{b}{2R} (M-1)$$

Временное разделение является более производительным, если учитывать время задержки пакета

Понятие о кодовом разделении пользователей

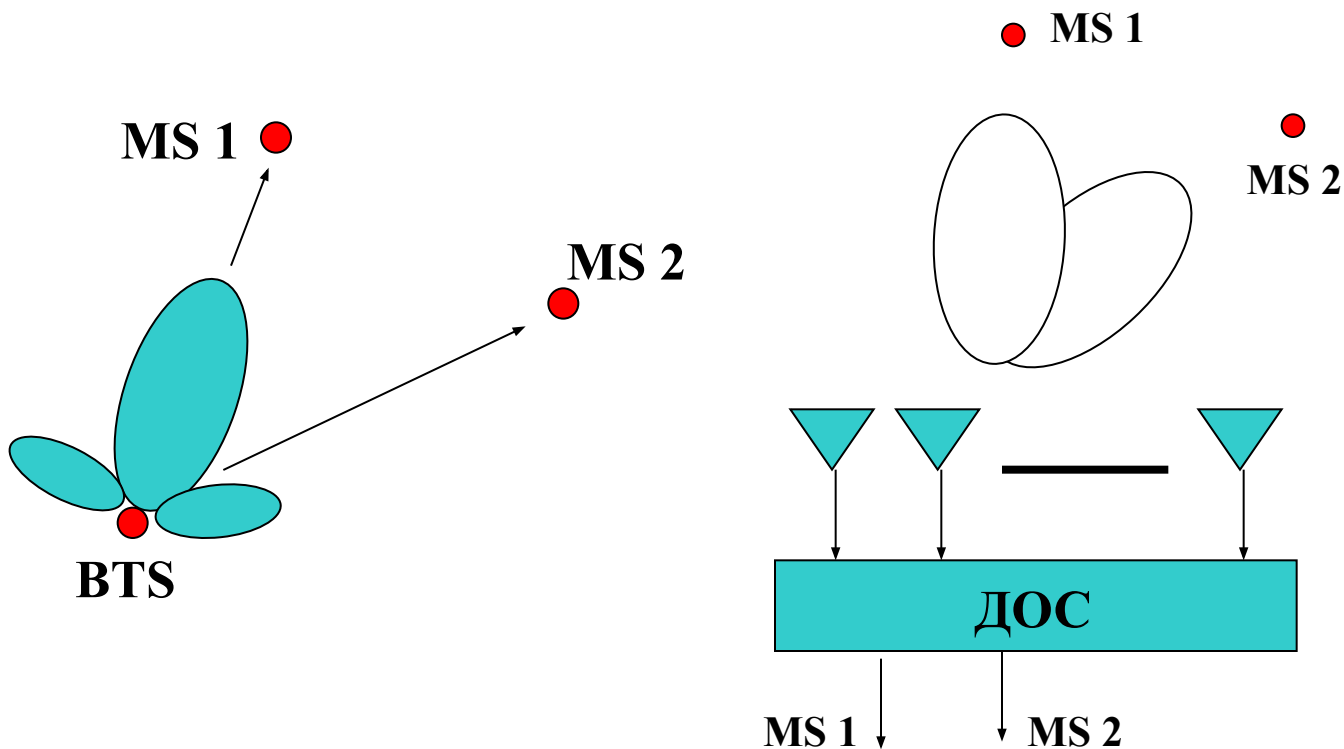
- Разделение пользователей осуществляется за счет модуляции символов кодовыми псевдослучайными последовательностями (КПШП).
- Каждому пользователю назначается своя КПШП.



Передаваемые импульсы
 $d_A=1, d_B=1, d_C=-1, d_D=1$
 (простой сигнал)

Модулированные
 импульсы
 (сигнал с расширенным
 спектром)

Понятие о пространственном разделении пользователей



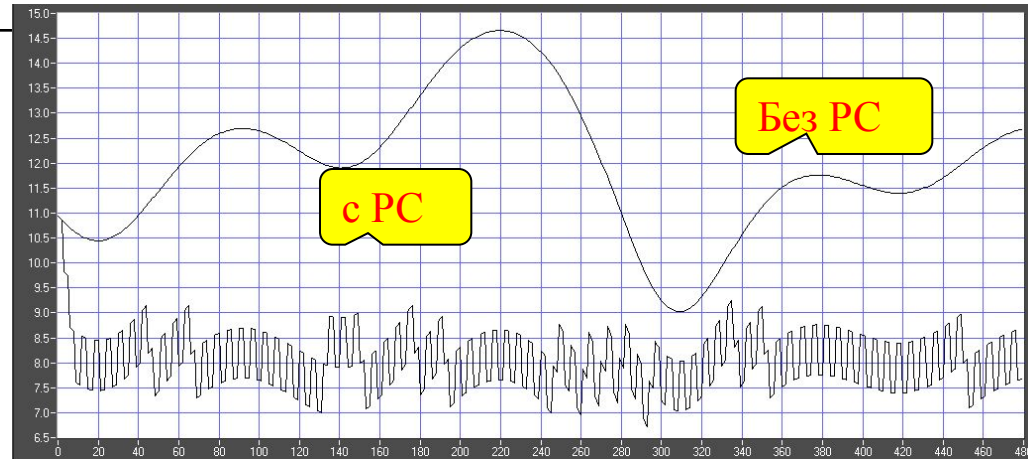
**Формирование
ортогональных лучей с
помощью антенной решетки**

Управление мощностью (power control - PC) на мобильной станции

Стандарт CDMA (IS-95)

- Фрейм (20 мсек) состоит из 288 символов.
- Эти символы делятся на 16 групп РС (18 символов в группе).
- Длительность группы 1.25 мсек.
- Частота управления мощностью - 800 Гц
- Шаг управления мощностью ± 1 дБ
- Управление мощностью основано на оценке ОСШП для каждой группы СИМВОЛОВ

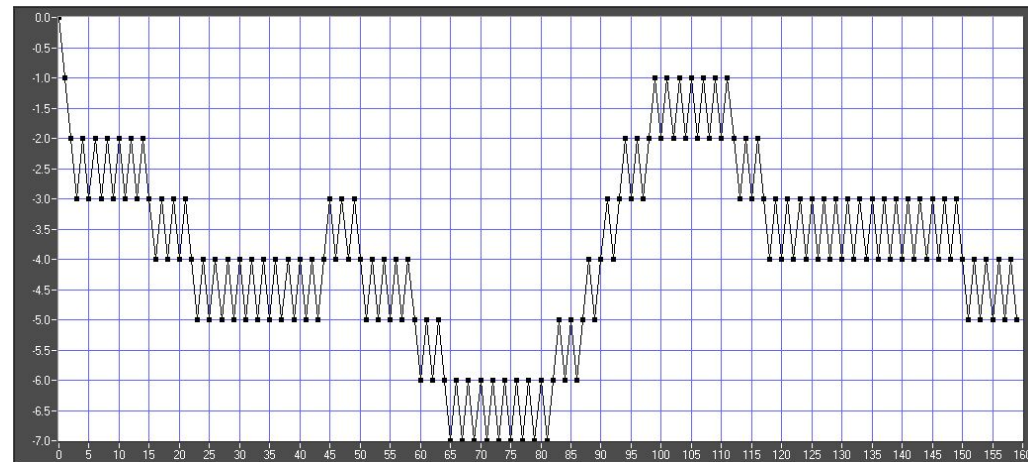
15 дБ



Замирания сигналов в канале связи

8 дБ

0 дБ



Мощность передатчика

-5 дБ

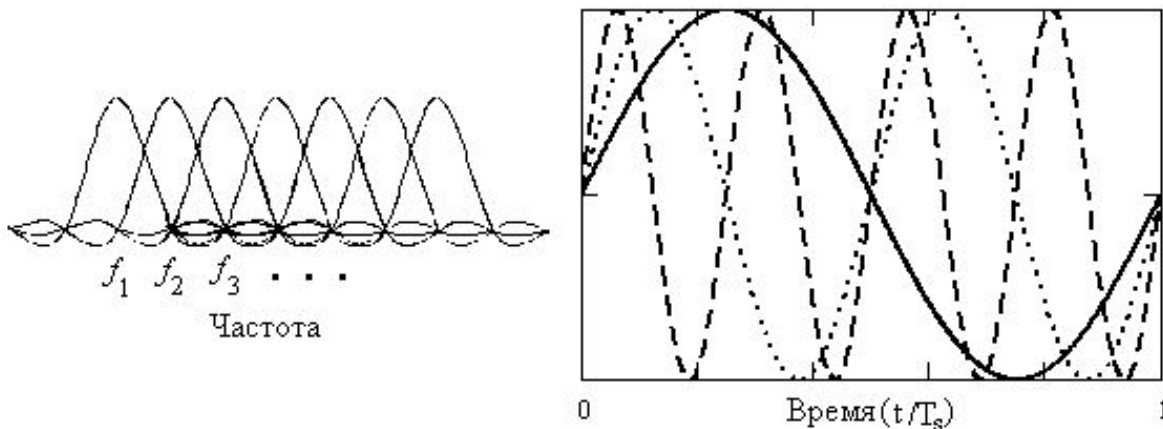
Лекция 2. OFDM-системы связи

1. Ортогональные многомерные сигналы с частотным сдвигом

$$s_m(t) = \text{Re} \left[\overline{s_{0m}(t) \exp(j2\pi f_c t)} \right] = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t] \quad 0 \leq t \leq T_s, m=1, 2, \dots, M.$$

$$s_{0m}(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \exp(j2\pi m \Delta f t)$$

$$\rho_{km} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T_s (m-k)\Delta f}{\pi T_s (m-k)\Delta f} e^{j\pi T_s (m-k)\Delta f} \quad |\rho_{km}| = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{T_s}$$



Δf – минимальный частотный разнос между поднесущими,

Спектры и временная зависимость синусоид с ортогональными частотами

2. Формирование OFDM-сигнала

d_k – информационный символ, передаваемый на k -й поднесущей,
 n – дискретное время, N_F – число точек БПФ.

Передаваемый узкополосный сигнал
 (n – дискретное время, N_F – размерность БПФ)

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp(-j2\pi f_k n \Delta t)$$

$$f_k = k\Delta f, \quad \Delta f = \frac{1}{T_s}, \quad N_F = \frac{T_s}{\Delta t}$$

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N_F}\right)$$

3. Прием OFDM-сигнала

Принятый низкочастотный сигнал $x(n) = \sum_{l=0} h(l)s(n-l) + z(n)$

$z(n)$ – гауссов собственный шум приемника с нулевым средним и дисперсией σ_0^2

Приемник выполняет прямое БПФ

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$



$$g_m = g_m^{(1)} + g_m^{(2)}$$

$$g_m^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{l=0}^{N_F-k} d_k h(l) \exp\left(\frac{j2\pi kl}{N_F}\right) \sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right) = \delta_{km} \quad g_m^{(1)} = \sqrt{N_F} H_m d_m$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{l=0}^{N_F} h(l) \exp\left(\frac{j2\pi ml}{N_F}\right)$$

H_m – коэффициент передачи многолучевого канала на m -й поднесущей

$$g_m^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} z(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$

$$\langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{n=1}^{N_F} \sum_{q=1}^{N_F} \langle z(n) z^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right) \exp\left(\frac{-j2\pi mq}{N_F}\right)$$

$$\langle z(n) z^*(q) \rangle = \sigma_0^2 \delta_{nq} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

$$\gamma_m = N_F \frac{\langle |H_m|^2 \rangle |d_m|^2}{\sigma_0^2} \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{l=0} \sum_{q=0} \langle h(l)h^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi m(l-q)}{N_F}\right)$$

$$\langle h(l)h^*(q) \rangle = P(l)\delta_{lq} \quad \sum_l P(l) = 1 \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \quad \gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\sigma_0^2}$$

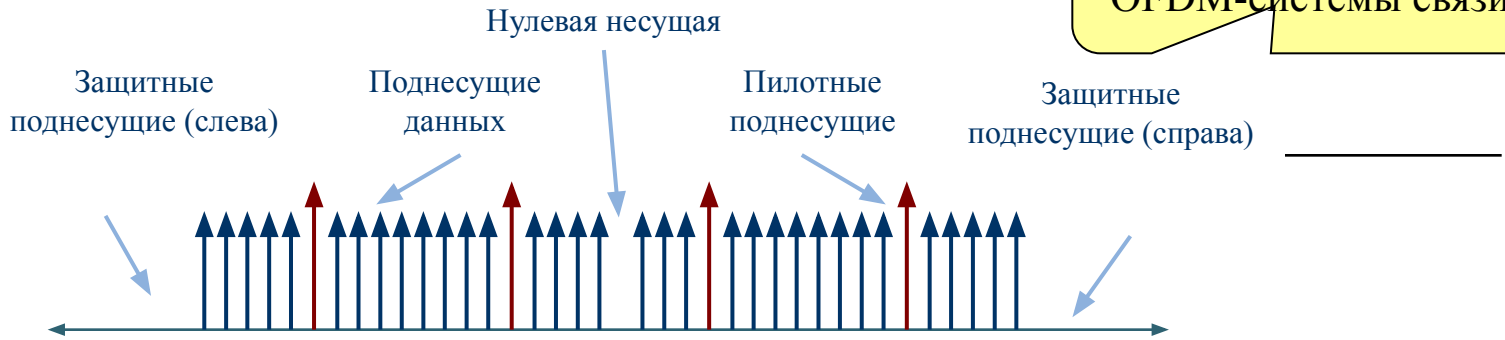
$$P_0 = \langle |s(n)|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle d_k d_m \rangle \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$

$$\langle d_k d_m \rangle = \langle |d_k|^2 \rangle \delta_{km}$$

$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle = \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\langle |d_m|^2 \rangle \sigma_0^2} \quad \langle \gamma_m \rangle = P_0 / \sigma_0^2$$

Частотная структура OFDM-системы связи



$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_{used}} \langle |d_m|^2 \rangle = \frac{N_{used}}{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\langle \gamma_m \rangle = \frac{N_F}{N_{used}} \frac{P_0}{\sigma_0^2}$$

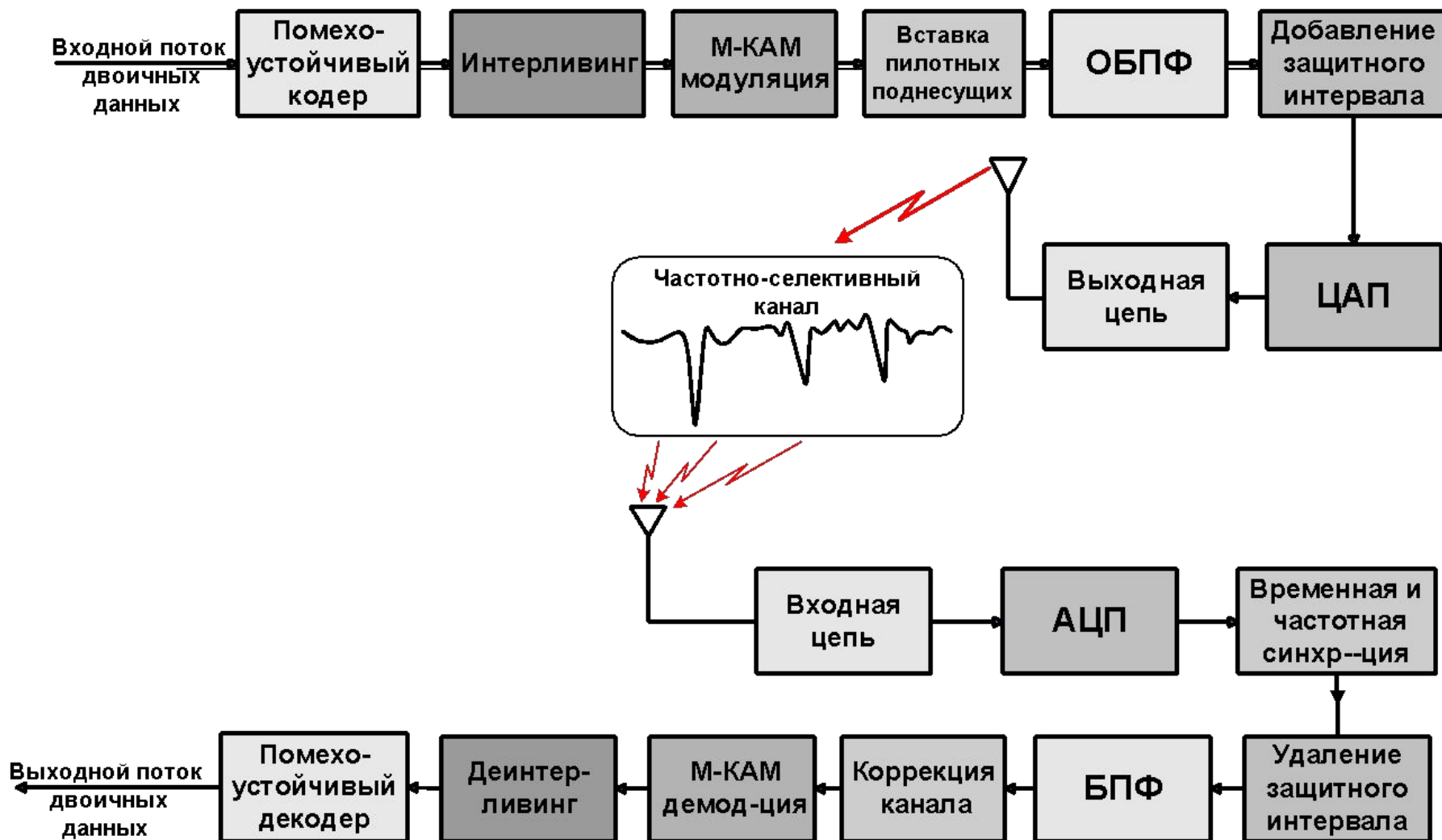
Информация из конца символа переносится в защитный интервал (циклический префикс).

Иначе возникнет помеха между поднесущими.

Длительность защитного интервала должна быть больше максимальной задержки в канале связи



4. Структурная схема OFDM-системы связи





Коррекция канала или эквализация

Вход эквалайзера – выход блока БПФ

$$g_m = \sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

Задача эквалайзера – восстановить спектр переданного сигнала, искаженного в частотно-селективном пространственном канале

Выход эквалайзера

$$\hat{d}_m = f_m \cdot g_m; \quad f_m = ?$$

f_m – коэффициент передачи эквалайзера на m -ой частоте

1. Простейший эквалайзер

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m} \quad \hat{d}_m = \frac{g_m}{\sqrt{N_F} H_m} = d_m + \frac{g_m^{(2)}}{\sqrt{N_F} H_m}$$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на m -й поднесущей $H_m \ll 1$), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте может неограниченно увеличиваться. Это плохо.

2. Эквализация по минимуму среднеквадратической ошибки

Функционал среднеквадратической ошибки $J = \langle | \hat{d}_m - d_m |^2 \rangle = \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$

$$\min_{f_m} J = \min_{f_m} \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$$

*



$$\frac{dJ}{df_m^*} = \frac{d}{df_m^*} \langle (f_m^* g_m^* - d_m^*)(f_m g_m - d_m) \rangle = \langle g_m^* (f_m g_m - d_m) \rangle = 0$$

Т.о. сигнал ошибки эквалайзера ортогонален входному сигналу

Коэффициент передачи эквалайзера на m -ой частоте $f_m = \frac{\langle g_m^* d_m \rangle}{\langle |g_m|^2 \rangle}$

$$f_m = \frac{\langle (\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)})^* d_m \rangle}{\langle |\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)}|^2 \rangle} = \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{N_F |H_m|^2 |d_m|^2 + \sigma_0^2}$$

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \gg \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m}$ - совпадение с простейшим эквалайзером

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \ll \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{\sigma_0^2}$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на m -й поднесущей $H_m \ll 1$), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте не может неограниченно увеличиваться. Это хорошо.



5. Пропускная способность OFDM-системы

Каждый кластер (фрейм) кодируется и декодируется независимо.

Каждый кластер (фрейм) характеризуется:

N_s – число поднесущих; N_t – число OFDM-символов; N_p – число пилотных поднесущих, k_b – уровень модуляции (битовая загрузка символа), R_c – скорость кода.

$$I_{cluster} = R_c k_b (N_s N_t - N_p) \quad (\text{бит})$$

$$I = I_{cluster} / N_t T_s = I_{cluster} \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

$$Th = (1 - PER) I = (1 - PER) R_c k_b (N_s N_t - N_p) \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

$$N_t = 1 \quad Th = (1 - PER) W_{data} R_c k_b$$

$$k_b = 1, R_c = 1, \text{ОСШ} \rightarrow \infty \Rightarrow PER \rightarrow 0, Th \rightarrow W_{data}$$

**ПС (ОСШ $\gg 1$) равна
ширине полосы,
используемой для
передачи данных**

6. Эффективная пропускная способность OFDM-системы

Рассмотрим передачу некодированной информации, а наличие кодера учтем, задавая максимально допустимое число ν ошибочно переданных бит в блоке, которое может исправить кодер.

Блок считается переданным верно при меньшем или равном ν числе ошибочных бит.

Вероятность, что в блоке из n бит имеется j ошибочно и $(n-j)$ правильно детектированных бит

$$P_n^{(j)} = C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

C_n^j - число сочетаний из n по j .

Вероятность правильной передачи блока

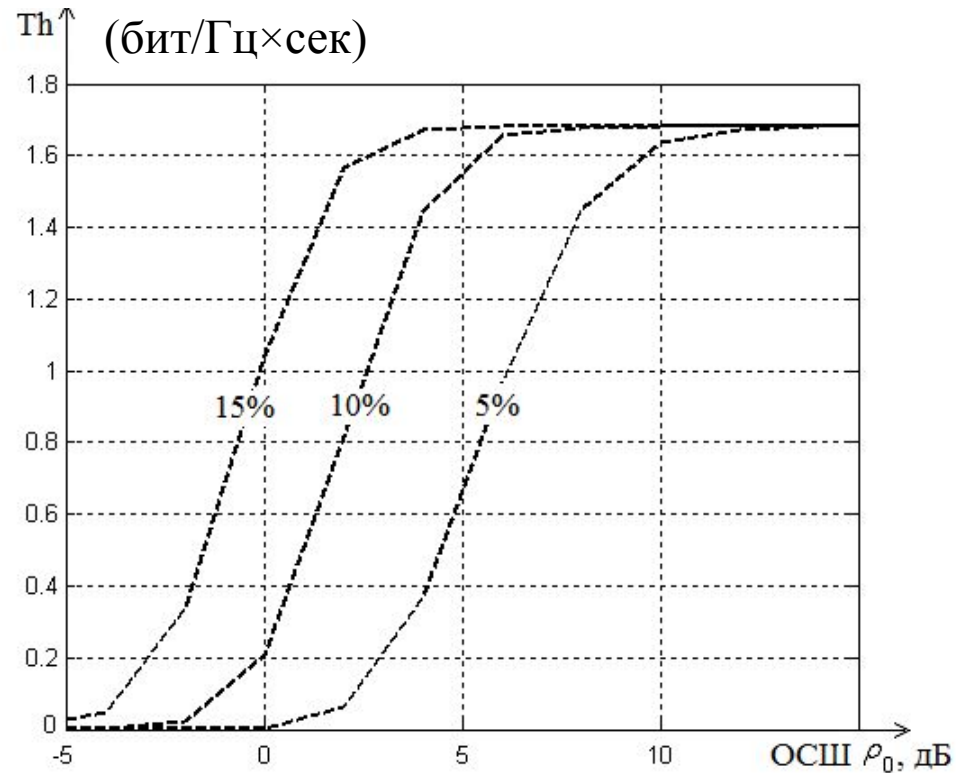
$$\sum_{j=0}^{\nu} C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

Вероятность блоковой ошибки

$$BLER = 1 - \sum_{j=0}^{\nu} C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

$$Th = (1 - BLER) \frac{k_b R_c (N_s N_t - N_p)}{N_s N_t}$$

(бит/Гц×сек)



Эффективная ПС при QPSK модуляции

$$R_c = 1, N_s = 5, N_t = 5$$

7. Некоторые сведения о преобразованиях Фурье

7.1. Дискретное преобразования Фурье (ДПФ)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad \text{- прямое ДПФ}$$

Докажем, что обратное ДПФ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Доказательство:

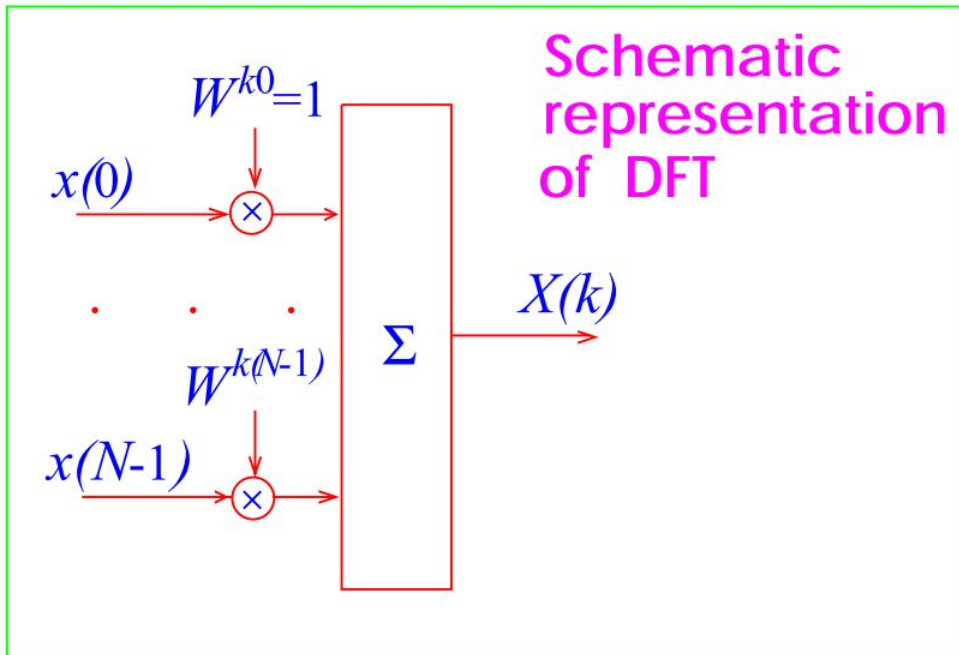
$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right\} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k(m-n)}{N}} \right\}}_{\delta(m-n)} = x(n) \end{aligned}$$

Обозначим $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Прямое и обратное ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}$$



7.2. Матричная формулировка ДПФ

Введем N -мерные векторы

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

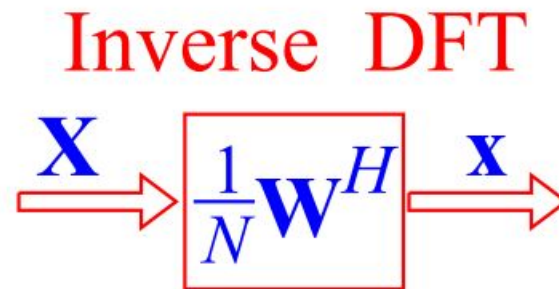
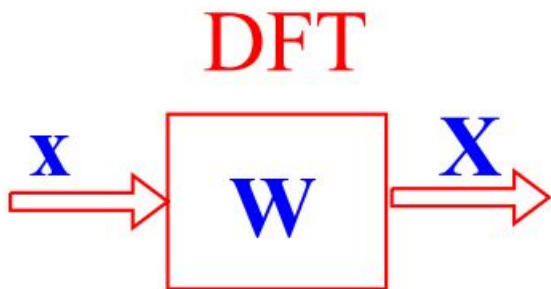
$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

Введем матрицу
размерности $N \times N$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Прямое и обратное ДПФ в матричной записи: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ $\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$





7.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Введем новые обозначения: $X_N(k) = X(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Выше мы использовали обозначения $X(k)$ и W без нижнего индекса N , показывающего длину последовательности.

Предположим, что длина преобразуемой последовательности – целая степень 2

$$N = 2^r, \quad r = \log_2 N$$

Идея БПФ:

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \leftarrow N\text{-point DFT}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n \text{ even} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{\substack{n \text{ odd} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} \\
&= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_N^{(2l+1)k} \\
&= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} \\
&= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_{N/2}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk} \quad \leftarrow \text{two } N/2\text{-point}
\end{aligned}$$

DFT's!!!

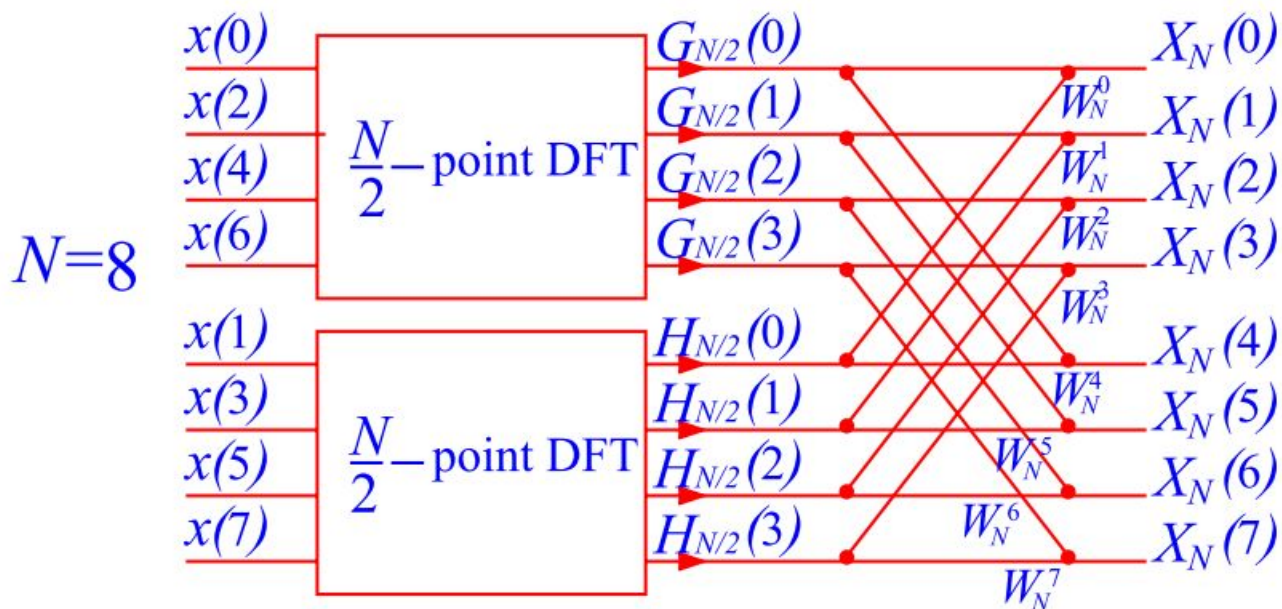


Или в краткой форме: $X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k)$

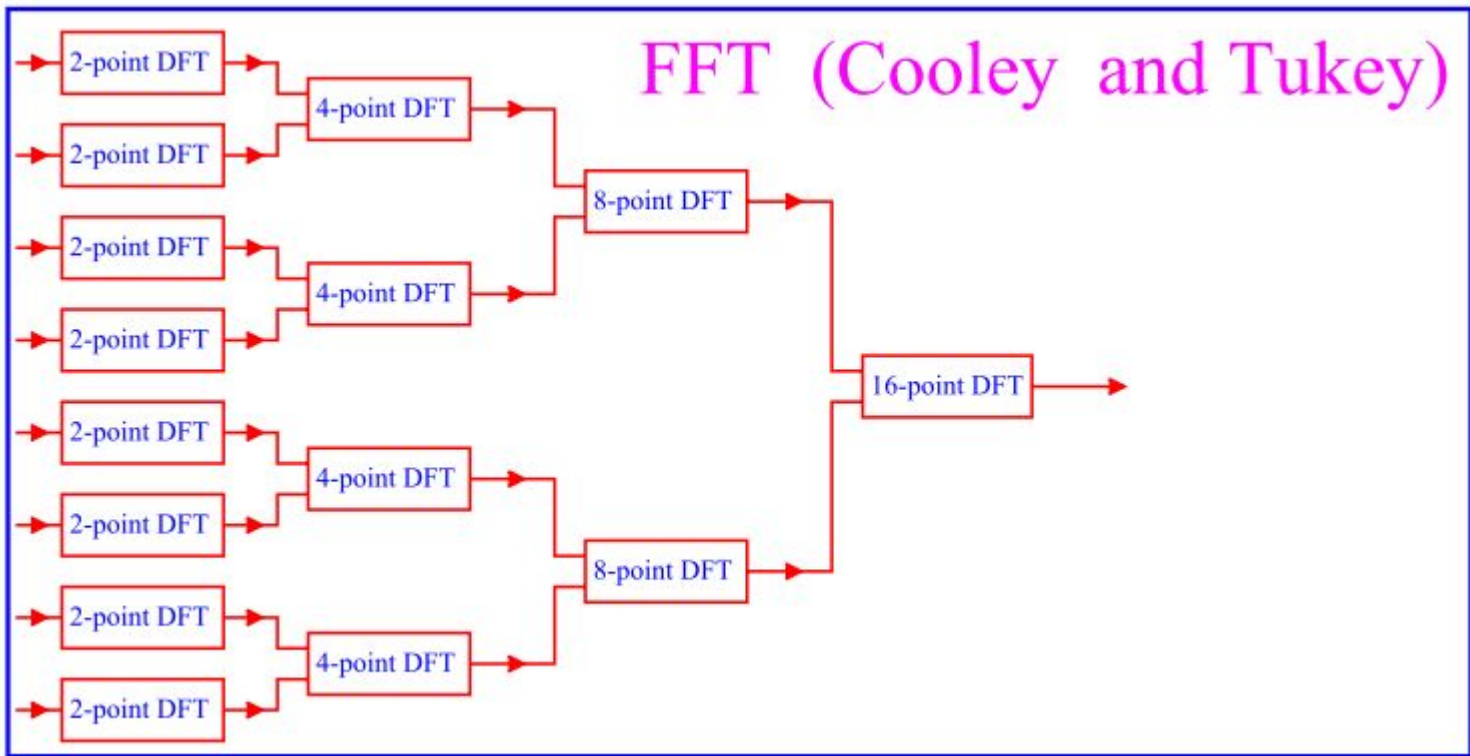
$G_{N/2}(k)$ и $H_{N/2}(k)$ – ДПФ размерности $N/2$, включающие четные и нечетные n , соответственно

$$G_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l)W_{N/2}^{lk}$$

$$H_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk}$$



1. N -точечное ДПФ с четным N может быть вычислено через два $N/2$ -точечных ДПФ.
2. Если $N/2$ четное, то каждое из этих $N/2$ -точечных ДПФ может быть вычислено через два $N/4$ -точечных ДПФ и так далее.
3. Так как $N=2^r$, то $N, N/2, N/4 \dots$ четные числа и процесс закончится 2-точечным ДПФ.



7.4. Вычислительная сложность дискретных преобразований Фурье

1. БПФ

Каждая стадия имеет N комплексных умножений и N комплексных сложений.

Всего имеется $\log_2 N$ стадий.

Полный объем вычислений

$$C_{FFT} = N \log_2 N$$

2. ДПФ

Полный объем вычислений $C_{DFT} = N^2$

3. Сравнение

Использование БПФ дает выигрыш в $\frac{N}{\log_2 N}$ раз

4. Пример.

$$N=2^{10} = 1024.$$

$$C_{DFT} = 2^{20} \approx 10^6. C_{FFT} = 10 \cdot 1024 \approx 10^4$$

Использование БПФ дает выигрыш в ≈ 100 раз.



Лекции 3-4. Преобразование аналоговой информации в цифровую форму

1. Дискретизация аналогового сигнала

$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ - спектр сигнала $x(t)$, где ω - круговая частота; $\delta(x)$ - дельта-функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Периодический сигнал с периодом T имеет линейчатый спектр

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

Сигнал представляется рядом Фурье $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$

Докажем, что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)$ периодическая последовательность δ -импульсов имеет линейчатый спектр в виде периодической последовательности δ -компонент

Последовательность импульсов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \text{ имеет период } \Delta t$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$X_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Delta t} t\right) dt = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\text{Спектр } X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)$$

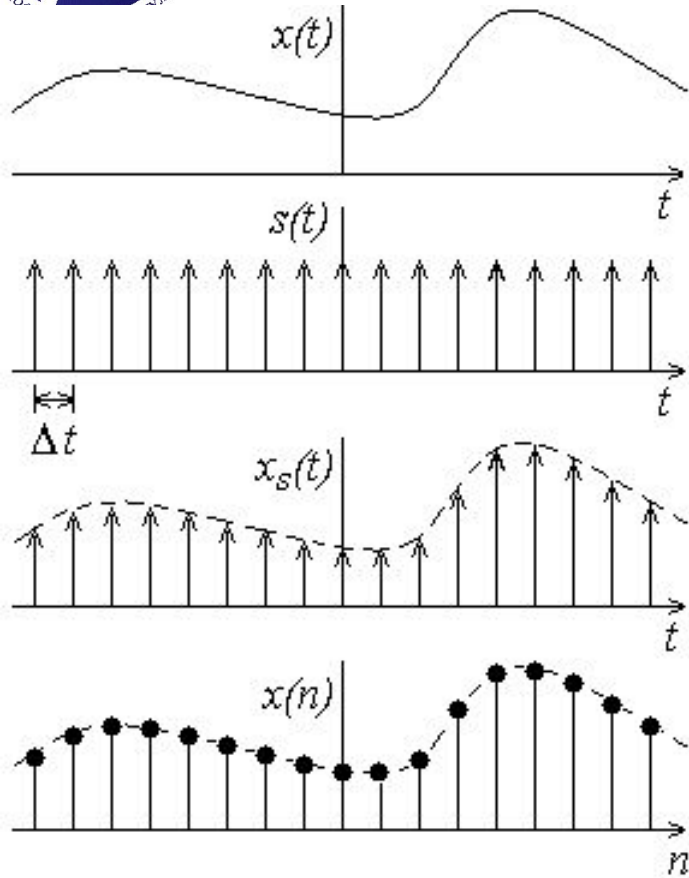
Доказали

Операция дискретизации.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$x_s(t) = x(t)s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad - \text{ дискретный (семплированный) сигнал}$$

$$\text{Так как } x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \text{ то } x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)$$



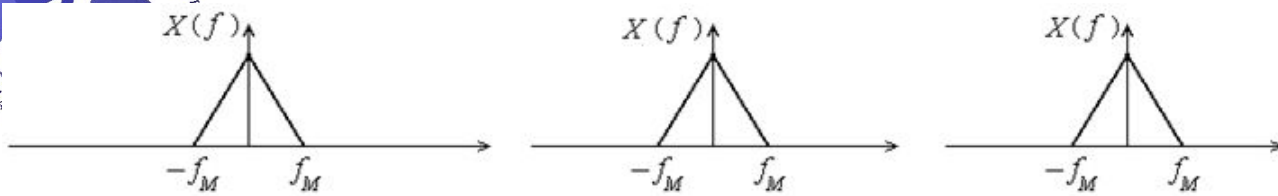
Процедура дискретизации
аналогового сигнала

$$\begin{aligned}
 X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) S(\omega - \nu) d\nu = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \left\{ \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t} - \nu\right) \right\} d\nu = \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

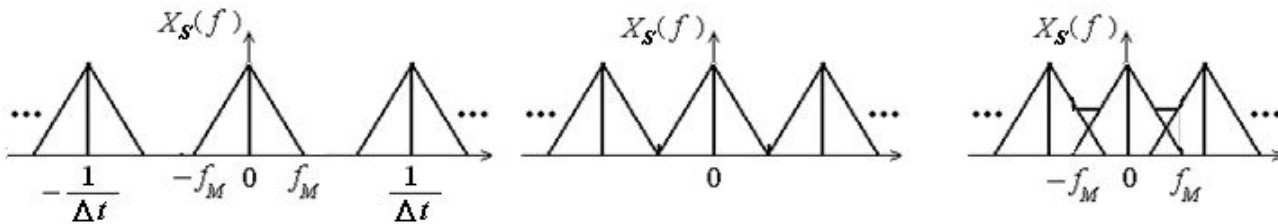
Спектр дискретного сигнала есть
размноженная версия спектра
исходного непрерывного сигнала

Частота Найквиста (частота дискретизации, скорость стробирования) $f_N = 1/\Delta t$

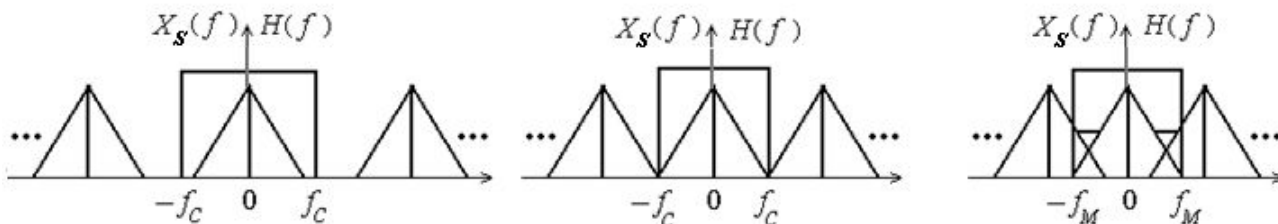
НИЖЕ



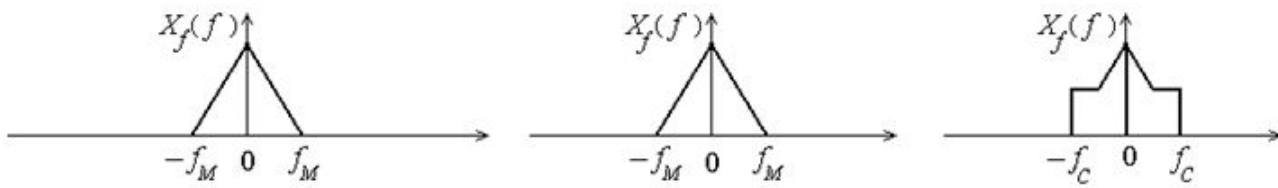
Спектр аналогового сигнала



Спектр дискретного сигнала



Передаточная функция восстанавливающего фильтра



Спектр восстановленного сигнала

$f_N > 2f_M$

$f_N = 2f_M$

$f_N < 2f_M$

Хорошее восстановление сигнала

Плохое восстановление сигнала

$$f_N \geq 2f_M \quad \text{or} \quad \Delta t \leq \frac{1}{2f_M}$$

Так необходимо делать на практике

2. Теорема Котельникова

Непрерывный сигнал с ограниченной полосой $[-f_M \div f_M]$ может быть восстановлен по его отсчетам (выборкам), взятым через интервал времени $\Delta t \leq 1/(2f_M)$ с помощью интерполяционной формулы

$$x_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \frac{\sin[\pi(t - n\Delta t)/\Delta t]}{\pi(t - n\Delta t)/\Delta t}$$

$\Delta t_{max} = 1/(2f_M)$ - максимальный интервал между временными отсчетами сигнала, определяемый шириной полосы

Доказательство. Сигнал можно восстановить в частотной области, используя идеальный низкочастотный фильтр

$$X_f(\omega) = X_s(\omega)H(\omega)$$

$$x_f(t) = \{x_s(t)\} \otimes \{h(t)\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t) \right\} \otimes \{h(t)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(\tau - n\Delta t)h(t - \tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)h(t - n\Delta t)$$

Идеальная передающая функция
(см. рисунок на слайде выше)

$$H(\omega) = \begin{cases} \Delta t, & -\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t \\ 0, & |\omega| > \pi/\Delta t. \end{cases}$$

Идеальная импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta t)}{(\pi t/\Delta t)}$$

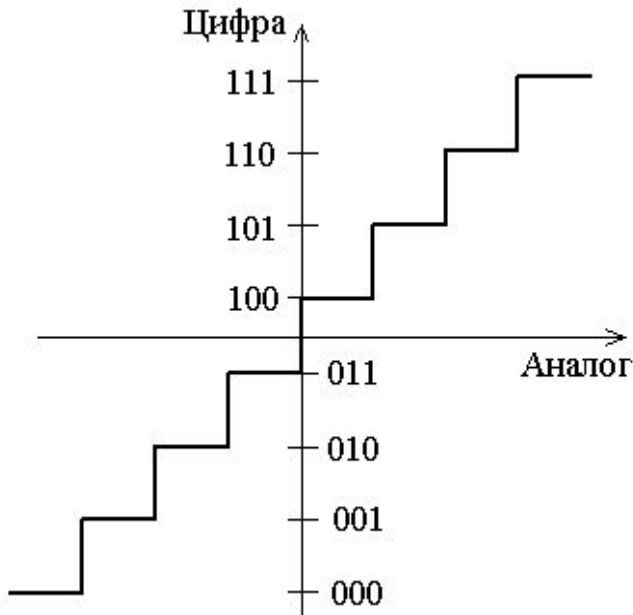
3. Квантование аналоговых сигналов

Равномерная импульсно-кодовая модуляция (ИКМ)

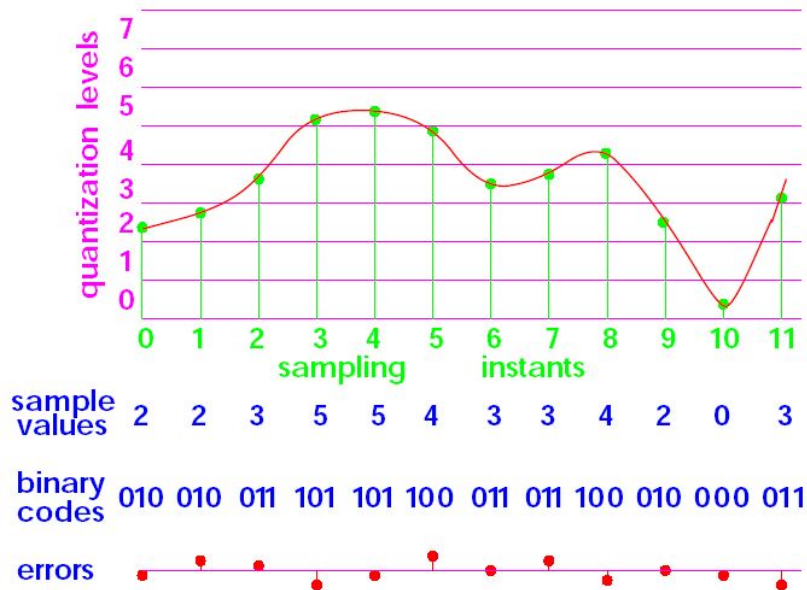
Каждый отчет квантуется в один из $N=2^b$ уровней, где b – число двоичных цифр (разрядов)
Динамический диапазон сигнала $[-E_{max} \div E_{max}]$.

Размер шага квантования

$$q = 2E_{max} / 2^b$$



Converting an analog signal into a binary code



Амплитудная характеристика
3-битового квантователя

Процесс квантования $\tilde{x} = x + e$

где e – ошибка квантования, трактуемая как аддитивный шум с равномерной плотностью вероятности

$$p(e) = 1/q$$

$$(-0.5q \leq e \leq 0.5q)$$

Мощность
ошибки квантования

$$\sigma_q^2 = \int_{-0.5q}^{0.5q} e^2 p(e) de = \int_{-0.5q}^{0.5q} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{1}{12} q^2 = \frac{(2E_{\max})^2}{12(2^{2b})}$$

Мощность входного сигнала x при равномерной плотности вероятности на интервале от $-E_{\max}$ до $+E_{\max}$

$$\sigma_x^2 = \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} x^2 p(x) dx = \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} x^2 \frac{1}{2E_{\max}} dx = \frac{(2E_{\max})^2}{12}$$

$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 2^{2b} \quad \text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 10 \lg(\text{ОСШ}) = 10 \lg(2^{2b}) = 20b \lg(2) = 6b$$

Пример: 8-разрядный ($b=8$) АЦП (256 уровней).
ОСШ = 48 дБ.

**ОСШ увеличивается
на 6 дБ на каждый
разряд АЦП**



При неравномерной плотности вероятности сигнала на интервале от $-E_{max}$ до $+E_{max}$

$$\text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 6b - C \quad (C > 0)$$

Пример. Сигнал x занимает часть динамического диапазона квантователя и имеет равномерную плотность вероятности на интервале $-E_{max}/a \leq x \leq E_{max}/a$ ($a > 1$)

Мощности сигнала
$$\sigma_x^2 = \int_{-E_{max}/a}^{E_{max}/a} x^2 p(x) dx = \frac{(2E_{max})^2}{12a^2}$$

$$\text{ОСШ} = 2^{2b} / a^2 \quad \text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 10 \lg(\text{ОСШ}) = 6b - 20 \lg a$$

Пример: $a=4$. Тогда $C=12$ дБ.

Неравномерная импульсно-кодовая модуляция



Устройство неравномерного квантования

Характеристика компрессора $y=C(x)$. Размер шага квантования $\Delta y = (dC/dx)\Delta x$

Дисперсия ошибки квантования (плотность вероятности $p(x)$ и характеристика компрессора $y=C(x)$ произвольные)

$$\sigma_q^2 = \frac{q^2}{12} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{|dC/dx|^2} dx$$

Дисперсия сигнала $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$

В природе более вероятны более слабые сигналы. Входной сигнал преобразуется в нелинейном устройстве (компрессор или сжиматель) и затем квантуется с помощью равномерной ИКМ. При восстановлении сигнала используется обратное преобразование, выполняемое с помощью экспандера (расширителя)



$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = \frac{\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} x^2 p(x) dx}{\frac{q^2}{12} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{(dC/dx)^2} dx}$$

ОСШ не должно зависеть от функции $p(x)$ —

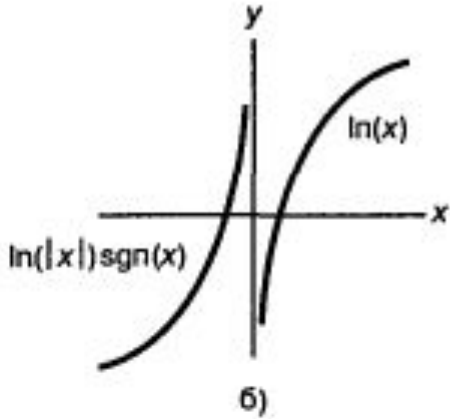
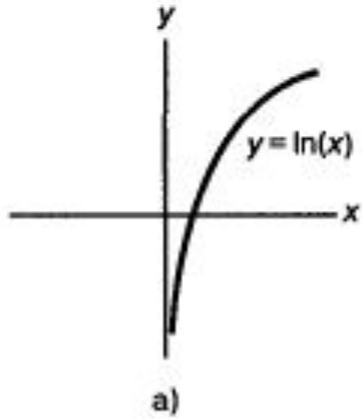
$$(dC/dx)^2 = (K/x)^2$$

$$x > 0. \quad dC/dx = K/x \quad C(x) = \int_0^x (K/z) dz = \ln x + \text{const}$$

Компрессор должен
быть логарифмическим

$$\text{Граничные условия} \quad \frac{y}{y_{\max}} = \frac{C(x)}{y_{\max}} = \ln \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)$$

$$x < 0. \quad \frac{y}{y_{\max}} = \ln \left(\frac{|x|}{x_{\max}} \right) \text{sgn}(x), \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & (x \geq 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$



Плавное соединение между логарифмической функцией и линейным отрезком, проходящим через начало координат

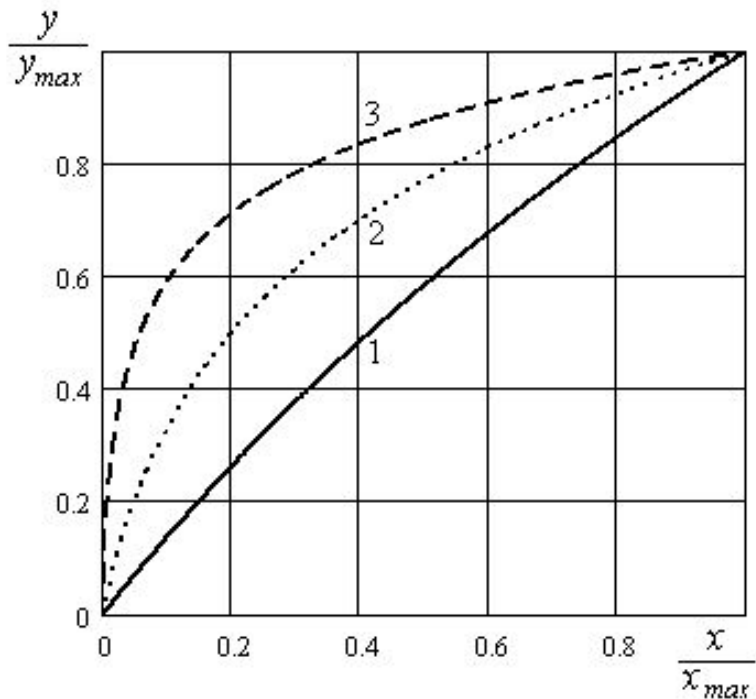
Функции логарифмического сжатия

μ -закон (Северная Америка)
 A -закон (Европа)

Амплитудная характеристика μ -компрессора

$$y = y_{\max} \frac{\ln[1 + \mu(|x|/x_{\max})]}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn} x$$

Амплитудная характеристика A -компрессора



$$y = \begin{cases} y_{\max} \frac{A(|x|/x_{\max})}{1 + \ln(A)} \operatorname{sgn} x, & 0 < |x|/x_{\max} < 1/A \\ y_{\max} \frac{1 + A(|x|/x_{\max})}{1 + \ln(A)} \operatorname{sgn} x, & 1/A < |x|/x_{\max} < 1. \end{cases}$$

В стандарте США и Канады при кодировании речи $\mu=255$ при 8-битовом АЦП.

$A=87.56$ - стандартное значение параметра A .

Амплитудная характеристика компрессора при $\mu=1, 15$ и 255 (кривые 1, 2, 3, соответственно)

Среднее ОСШ для μ -компрессора

$$\frac{dC}{dx} = y_{\max} \frac{1}{\ln(1+\mu)} \cdot \frac{(\mu/x_{\max})}{1+\mu(|x|/x_{\max})}$$

$$\mu(|x|/x_{\max}) \gg 1 \quad \frac{dC}{dx} \approx \frac{1}{|x|} \cdot \frac{y_{\max}}{\ln(\mu)}$$

$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = \frac{12}{q^2} \left(\frac{y_{\max}}{\ln(\mu)} \right)^2 = 3 \left(\frac{2y_{\max}}{q} \right)^2 \left(\frac{1}{\ln(\mu)} \right)^2$$

$$2y_{\max}/q = 2^b \quad \text{ОСШ} = 2^{2b} \frac{3}{[\ln(\mu)]^2}$$

$$\text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 6b - C \quad C = 4.8 - 20 \cdot \lg(\ln(\mu))$$

$$\mu=255 \quad C=10.1 \text{ дБ.}$$

ОСШ уменьшилось на 10.1 дБ.
Однако теперь ОСШ не зависит
от плотности вероятности
входного сигнала

4. Кодирование дискретных источников

X множество всевозможных дискретных сообщений x_1, x_2, \dots, x_n передается по каналу связи с вероятностями $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$.

Условие непрерывной передачи: $p(x_1)+p(x_2)+ \dots +p(x_n)=1$.

Энтропия источника (среднее количество информации при передаче одного символа сообщения)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i)$$

$H_{\max} = \log n$ - при равновероятных символах ($p(x_i)=1/n$),

Кодовые слова фиксированной длины (при равновероятных символах источника)

Каждому из n символов источника ставится в соответствие R бит.

Эффективность кодирования – H/R (H – энтропия)

- n равно целой степени основания 2: число бит на символ источника $R=\log_2(n)$, $H/R=1$

- n не равно целой степени основания 2: число бит на символ $R=\lceil \log_2(n) \rceil +1$, $H/R < 1$

Кодовые слова переменной длины (при не равновероятных символах источника)

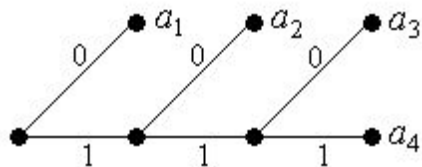
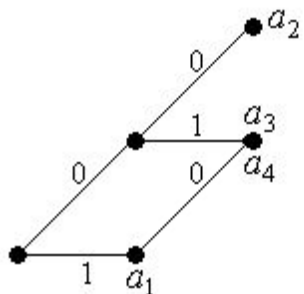
Должны выполняться два условия:

- требуется минимальное количество кодовых символов (бит) для передачи сообщения;
- отсутствуют потери передаваемой информации (однозначное декодирование)

Для выполнения второго условия используются префиксные (мгновенные) коды, в которых начало более длинного кодового слова не совпадает с более коротким кодом.

В этом случае исключается неоднозначность при декодировании.

Пример. Четыре символа источника имеют вероятности (см. табл.) и кодируются, как показано в табл.



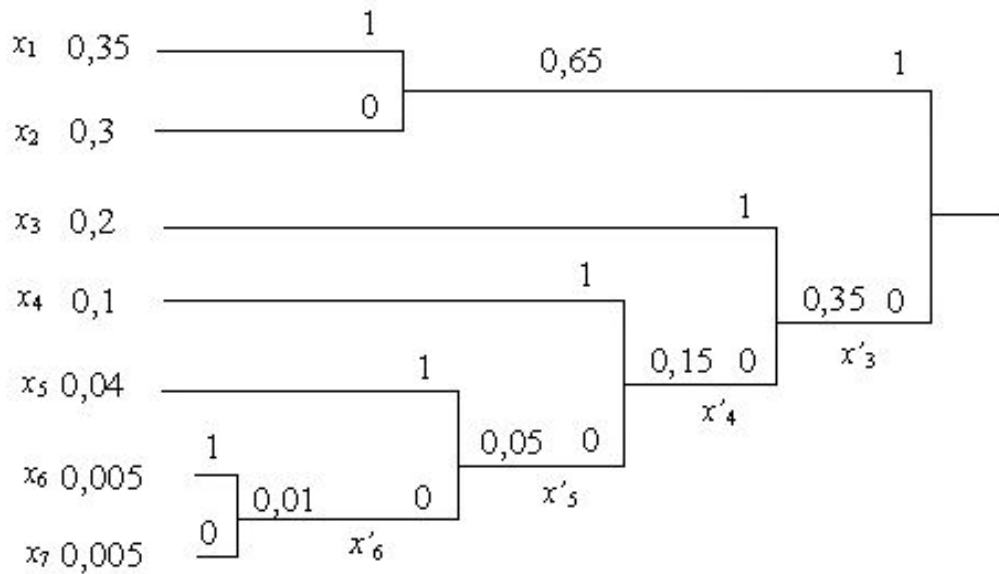
Символ	Вероятность	Код I	Код II
a_1	1/2	1	0
a_2	1/4	00	10
a_3	1/8	01	110
a_4	1/8	10	111

Принятая последовательность 001001 имеет два варианта декодирования (при коде I): $a_2 a_4 a_3$ или $a_2 a_1 a_2 a_1$

Код I (слева) не обеспечивает однозначное декодирование.
Код II (справа) обеспечивает однозначное декодирование



Код Хаффмена

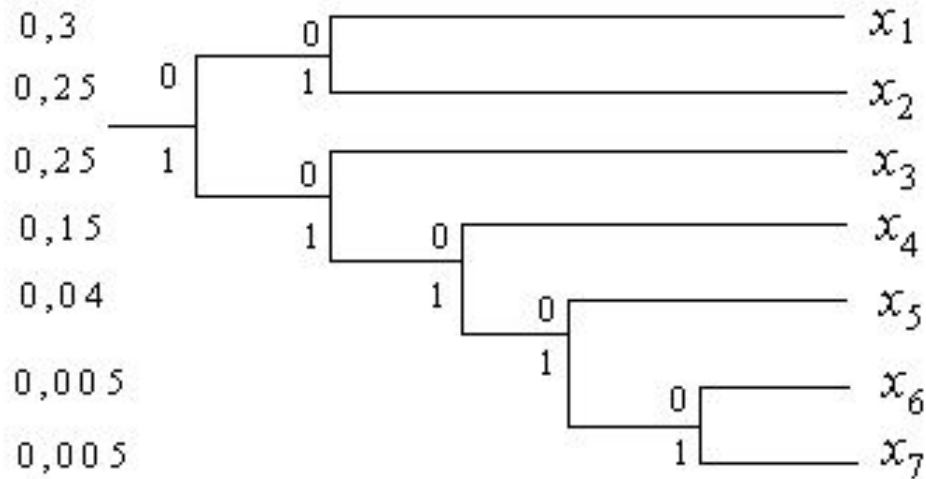


Энтропия источника $H(X)=2.11$.
 Средняя длина кодового слова $R=2.21$.
 Эффективность кодирования $H(X)/R=95.5\%$.

Длина кодовой посылки обратно пропорциональна его априорной вероятности

Символ сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Вероятность символа	0.35	0.3	0.2	0.1	0.04	0.005	0.005
Двоичный код символа	11	10	01	001	0001	00001	00000

Код Шеннона-Фэно



Длина кодовой посылки обратно пропорциональна его априорной вероятности

Символ сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Вероятность символа	0.3	0.25	0.25	0.15	0.04	0.005	0.005
Двоичный код символа	00	01	10	110	1110	11110	11111