



Теория электрической связи (часть II)

Профессор, д.ф.-м.н. А.Г. Флакман

Кафедра бионики и статистической радиофизики ННГУ

Литература

1. Прокис Д. Цифровая связь. Пер. с англ. – М: Радио и связь, 2000. 800с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
3. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Монография. – Нижний Новгород: ННГУ, 2011. – 368 с.
4. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в системах мобильной радиосвязи (Электронное методическое пособие). – Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. 107 стр.
5. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Современные методы пространственной обработки сигналов в радиосистемах с антенными решетками. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Р.Е. Алексеева, 2008. - 171 с.
6. В.Т. Ермолаев, А.А. Мальцев, А.Г. Флакман, О.В. Болховская, А.В. Ключев. Мобильная связь: вопросы теории и типовые задачи. Учебное пособие. / Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. 234 с.



Лекция 1. Введение

Число пользователей мобильной связи (в млн.)

| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 140 (1996 г.) | 205 (1997 г.) | 290 (1998 г.) |
| 380 (1999 г.) | 500 (2000 г.) | 680 (2001 г.) |

Страны с наибольшим удельным числом пользователей (на конец 20 века)

1. Финляндия. 2. Швеция. 3. Норвегия. 4. Дания

- Первый стандарт беспроводного доступа в Интернет (стандарт 802.11 Wi-Fi (Wireless Fidelity)) на передачу данных со скоростью до 2 Мбит/с в диапазоне 2,4 ГГц ратифицирован в 1997 году
- Стандарт 802.11b на передачу данных со скоростью до 11 Мбит/с в диапазоне 2,4 ГГц ратифицирован в 1999 году
- Стандарт 802.11a ратифицирован в 1999 году и регламентирует скорость передачи данных до 54 Мбит/с в частотном диапазоне 5 ГГц



Основные концепции построения сотовых сетей

Особенности сотовой архитектуры:

- передатчики небольшой мощности
- небольшие зоны покрытия сотами
- повторное использование частот
- дробление сот для уменьшения мощности
- управление передачей вызова (handoff)

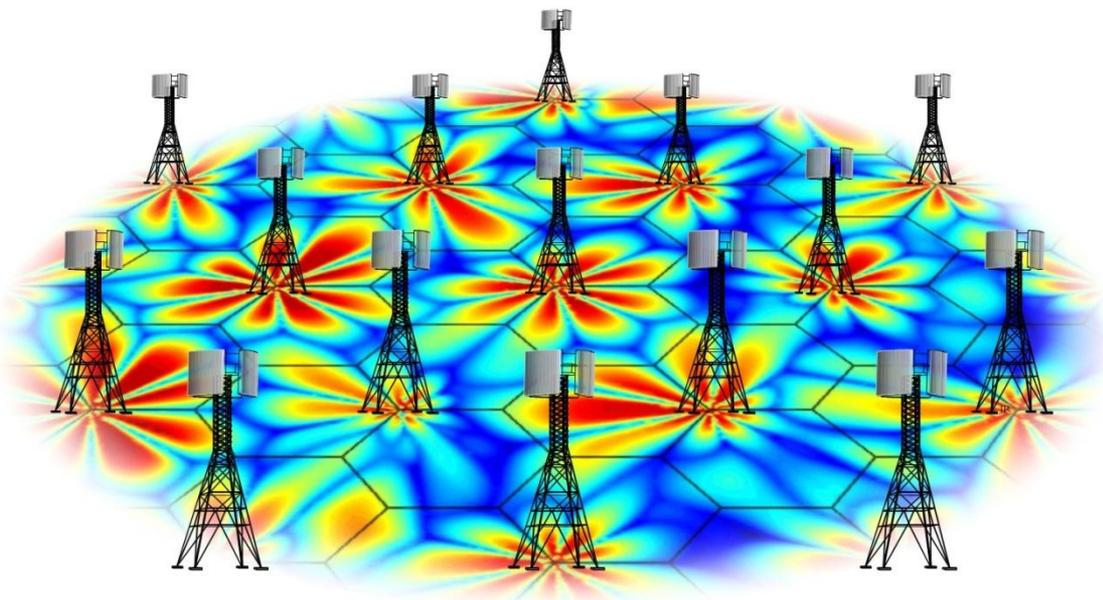
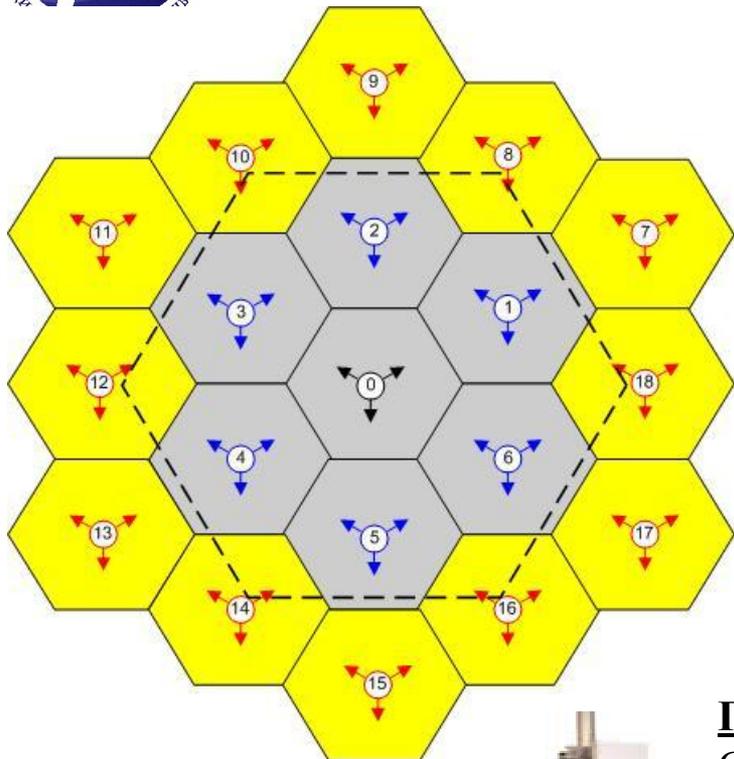
Макросота ~ 35 км

Сота ~ 3-5 км

Микросота ~ 0.8-1 км

Пикосота ~ 0.2 км

Гексагональная структура сотовой сети



Пример используемой антенны (2100 МГц)

Столбец излучателей (10 излучателей)

Поляризация – двойная, линейная с наклоном +45 и -45 град.

Высота столбца - 697 мм

Ширина столбца - 167 мм

Глубина столбца - 58 мм

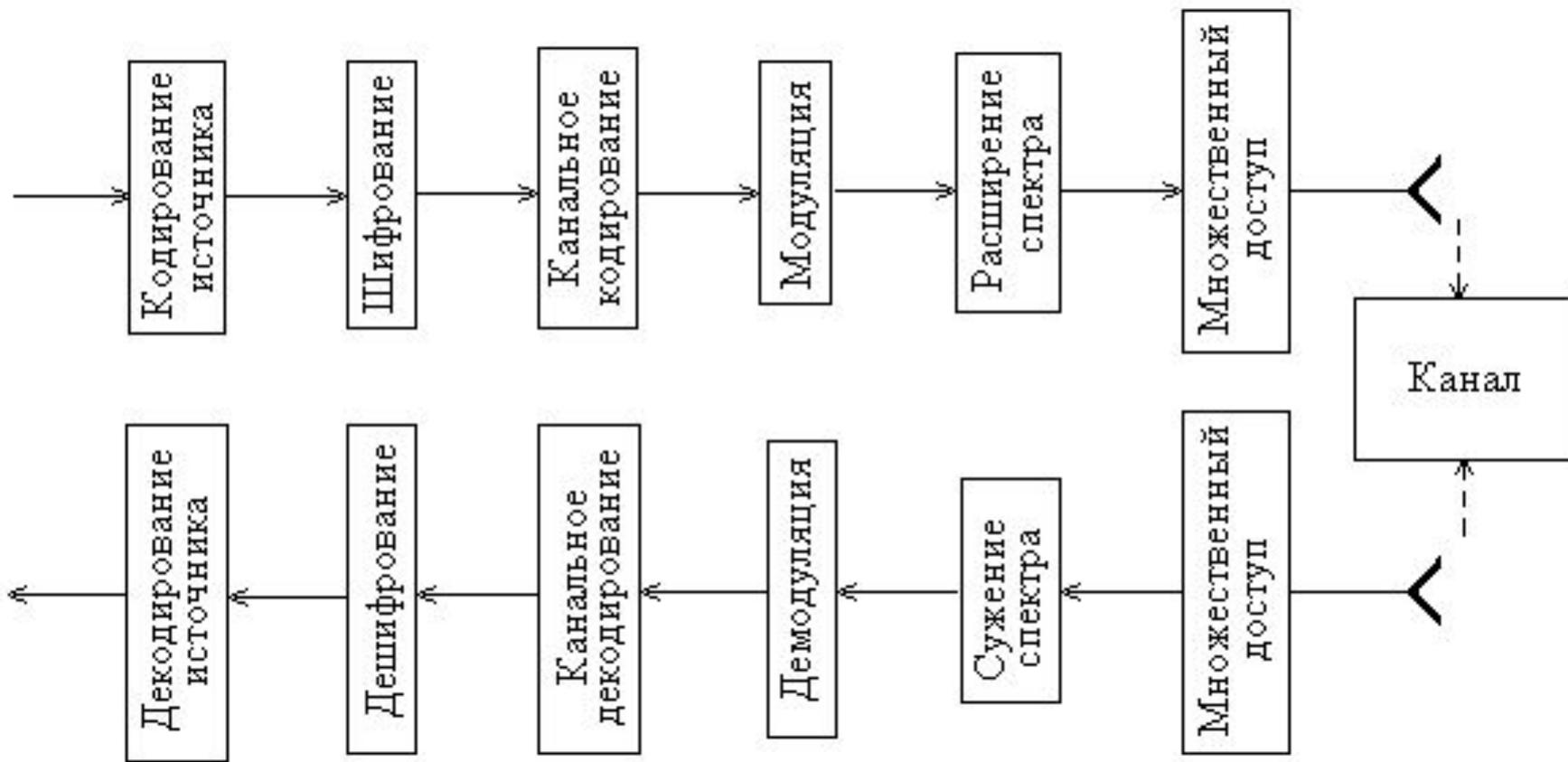
Ширина луча (по уровню половинной мощности):

горизонтальная плоскость - 65 град.

Вертикальная плоскость - 13 град.



Функциональная схема цифровой системы связи

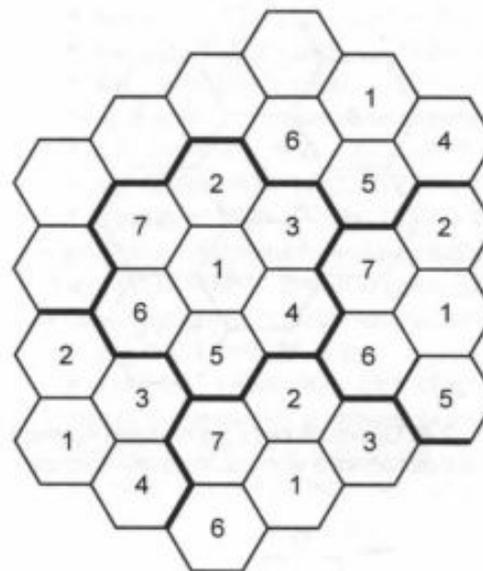
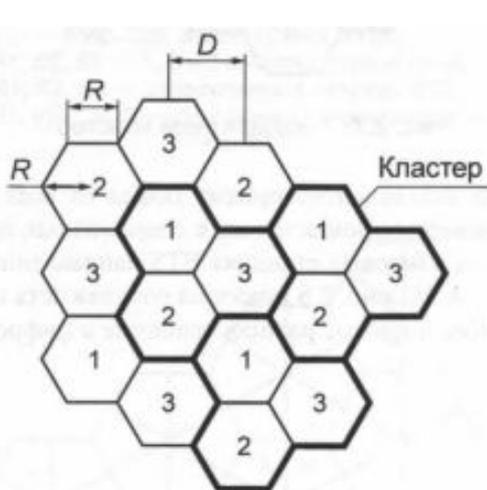


Повторное использование частот (frequency reuse)

Повторное использование частот заключается в том, что в соседних сотах используются разные полосы частот, которые повторяются через несколько сот.

Кластер (cluster) – группа сот с различным набором частот.

Используется три частоты f_1, f_2, \dots, f_3 (3-элементный кластер)



Используется семь частот f_1, f_2, \dots, f_7 (7-элементный кластер)

Цифра внутри соты показывает используемую частоту

Расстояние между сотами с одинаковыми частотами увеличилось



Повторное использование частот

Расстояние между центрами сот с одинаковыми частотами, $D = R\sqrt{3N}$

R – радиус соты (радиус описанной окружности),

N – число сот в кластере.

$N=3, D=3R.$ $N=7, D=4,58R.$ $N=19, D=7,55R.$

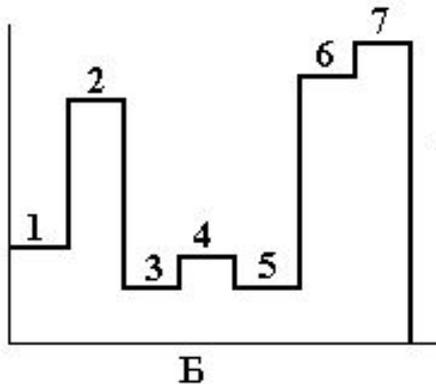
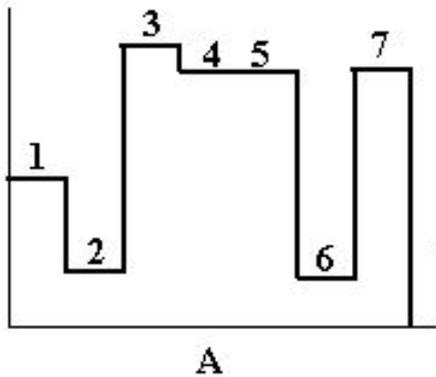
Отношение $D/R=q$ называется коэффициентом уменьшения соканальных помех или коэффициентом соканального повторения.

Обратная величина $C=1/N$ называется коэффициентом повторного использования частот

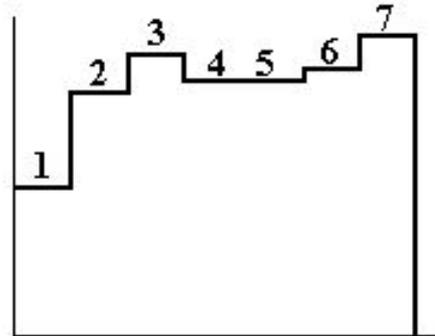
Расстояние между центрами сот с одинаковыми частотами $D = R\sqrt{\frac{3}{C}}$

Жесткая «Handoff»-процедура

Жесткий handoff - обслуживание лучшей базовой станцией (БС)



Пример двух БС (А и Б)



Жесткий handoff приводит к кратковременной передаче пользователя от одной БС к другой, то есть возможны перерывы в сеансе связи

Сигналы, принимаемые базовыми станциями А и Б

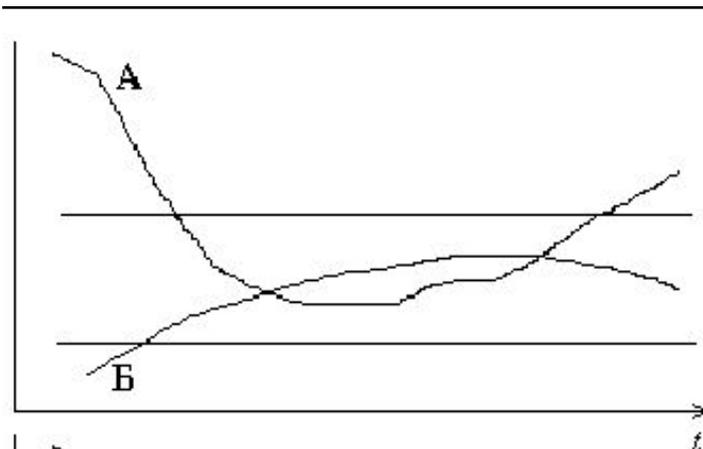
Результирующий сигнал формируется путем коммутации и «склеивания» сигналов от разных базовых станций

Мягкая «Handoff»-процедура

Мягкий handoff - обслуживание лучшей базовой станцией (БС)

Пример двух БС

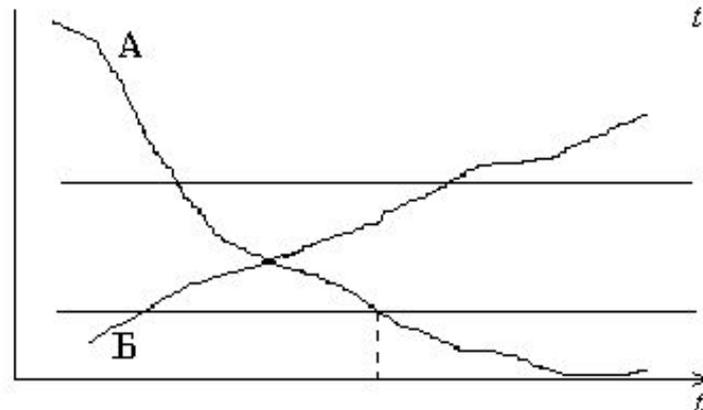
Нет Handoff



Пороговое ОСШ
(выбор кандидатных
БС)

Пороговое ОСШ
(замена
обслуживающей БС)

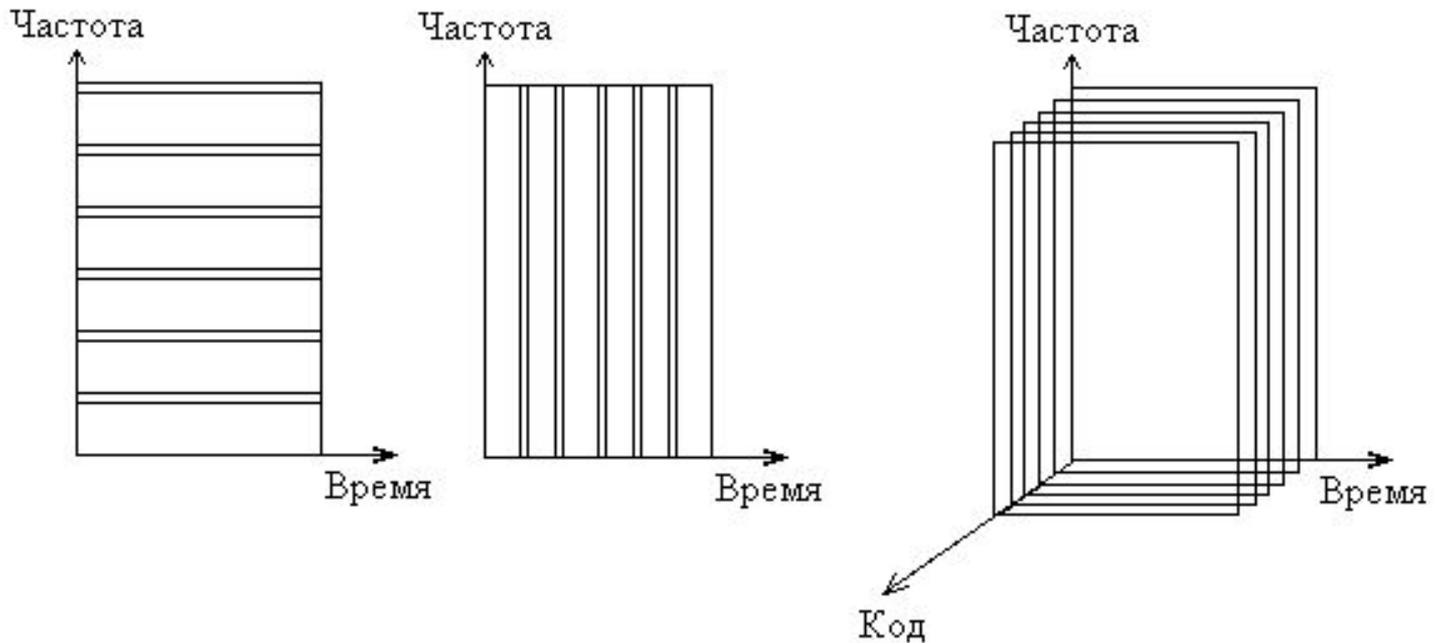
Handoff



Мягкий handoff уменьшает число передач пользователя от одной БС к другой, то есть число возможных перерывах в сеансе связи

Сигналы, принимаемые базовыми станциями А и Б

Основные принципы множественного доступа (разделения) пользователей



**Частотное
разделение - FDMA
(frequency division
multiple access)**

**Временное разделение
- TDMA (time division
multiple access)**

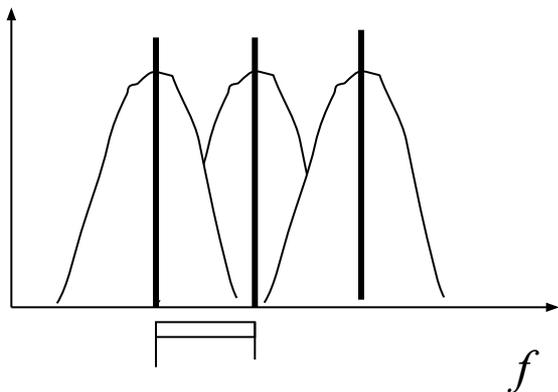
**Кодовое разделение
пользователей -
CDMA (code division
multiple access)**

Частотное разделение пользователей

Скорость передачи данных R бит/сек (один пользователь).

M – число пользователей (число отдельных полос).

Длительность импульсов увеличивается в M раз, то есть все M пользователей одновременно передают информацию, но с уменьшенной скоростью R/M бит/сек.



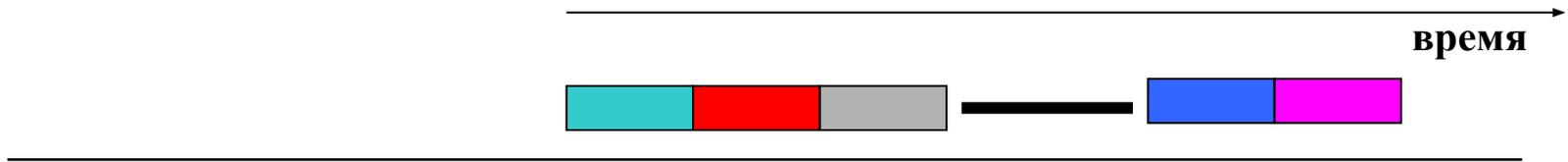
1. Взаимное влияние каналов должно быть минимально возможным;
2. Время ожидания пакета для всех пользователей одинаково;
3. При замираниях в канале некоторые частотные каналы могут быть сильно ослаблены.

Разнос частотных каналов
(GSM стандарт - 200КГц)

M – число пользователей;
 b – число бит в пакете;
 T – время передачи пакета.

Скорость передачи $R_{FD} = M \frac{b}{T}$ бит / сек

Временное разделение пользователей



Скорость передачи данных R бит/сек (один пользователь).
 M – число пользователей (число временных интервалов).
 Каждый пользователь использует всю полосу и передает информацию со скоростью R бит/сек (длительность импульсов не изменяется), но за время T/M .

Пакет передается за меньшее время

M – число пользователей;
 b – число бит в пакете;
 T – время передачи пакета.

Скорость передачи $R_{TD} = \frac{b}{T/M}$ бит /сек

$$R_{FD} = R_{TD}$$

Скорость передачи одинакова для частотного и временного разделения



Производительность частотного и временного разделения пользователей

Время задержки пакета состоит из среднего времени w ожидания пакета и из среднего времени τ передачи пакета

$$D = w + \tau$$

Частотное разделение - пакет передается без задержки в течение T секунд

$$w_{FD} = 0; \tau_{FD} = T$$

Временное разделение - пакет передается с задержкой в течение T/M секунд.
Время ожидания пакета для всех пользователей различно
Время задержки m -го пакета $(m-1)T/M$

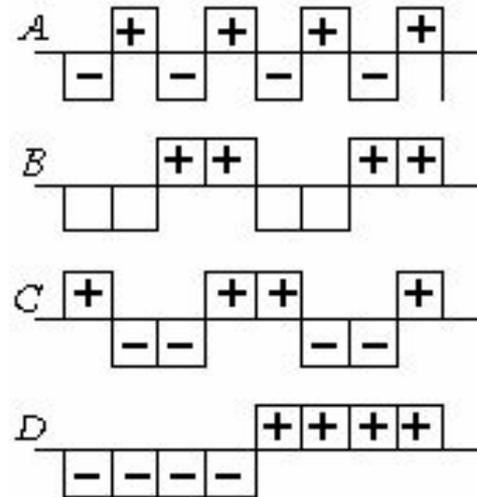
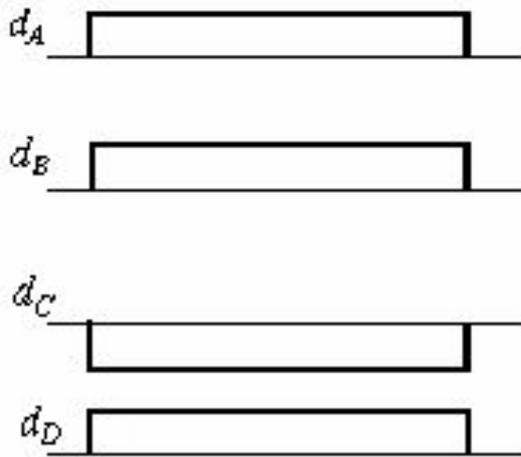
Среднее время ожидания m -го пакета $w_{TD} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (m-1) \frac{T}{M} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$

$$D_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \frac{T}{M} \quad D_{TD} = D_{FD} - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad D_{TD} = D_{FD} - \frac{b}{2R} (M-1)$$

Временное разделение является более производительным, если учитывать время задержки пакета

Понятие о кодовом разделении пользователей

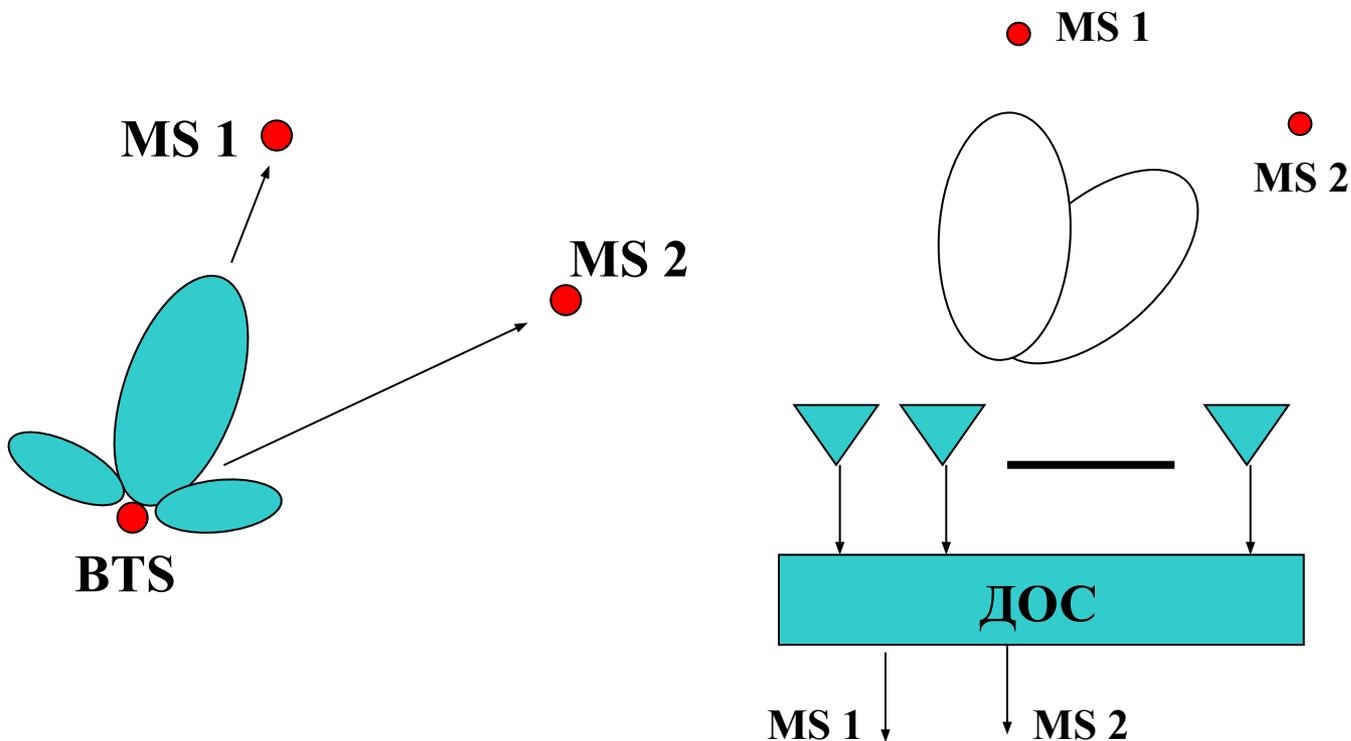
- Разделение пользователей осуществляется за счет модуляции символов кодовыми псевдослучайными последовательностями (КПШП).
- Каждому пользователю назначается своя КПШП.



Передаваемые импульсы
 $d_A=1, d_B=1, d_C=-1, d_D=1$
 (простой сигнал)

Модулированные
 импульсы
 (сигнал с расширенным
 спектром)

Понятие о пространственном разделении пользователей



**Формирование
ортогональных лучей с
помощью антенной решетки**

Управление мощностью (power control - PC) на мобильной станции

Стандарт CDMA (IS-95)

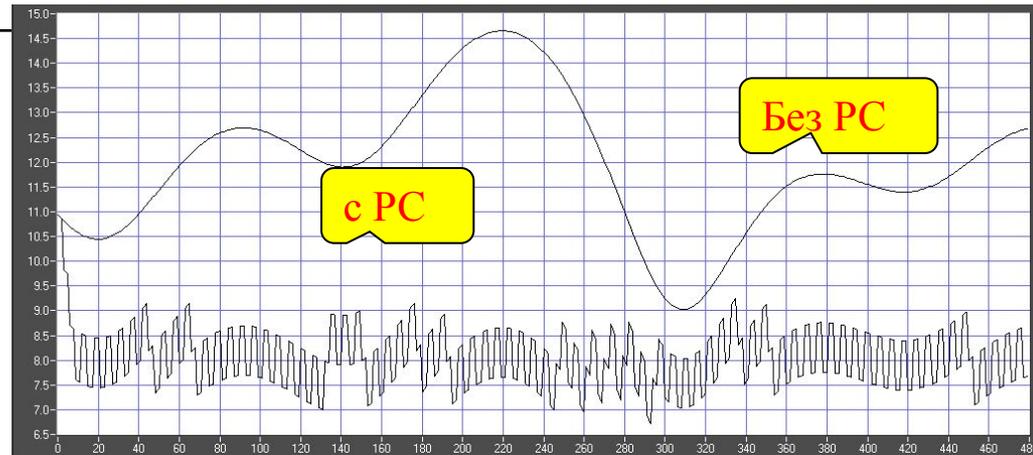
- Фрейм (20 мсек) состоит из 288 символов.
- Эти символы делятся на 16 групп РС (18 символов в группе).
- Длительность группы 1.25 мсек.
- Частота управления мощностью - 800 Гц
- Шаг управления мощностью ± 1 дБ
- Управление мощностью основано на оценке ОСШП для каждой группы СИМВОЛОВ

15 дБ

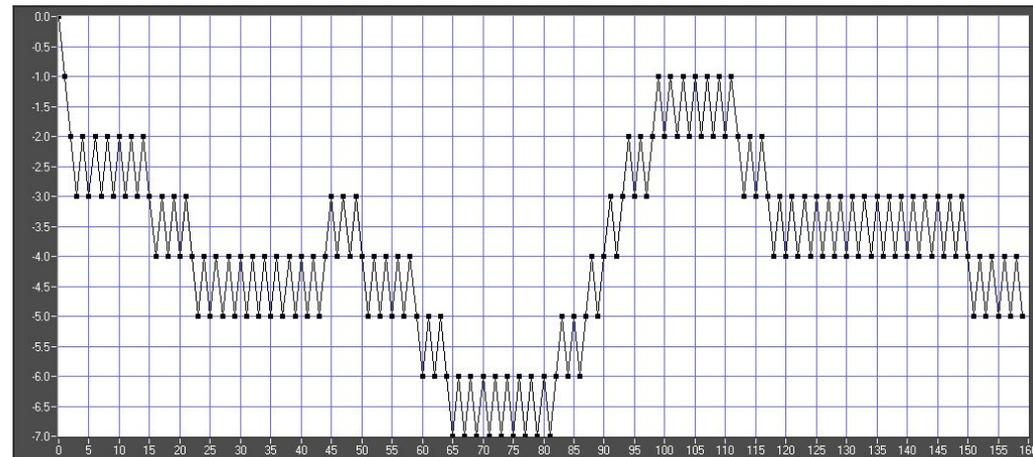
8 дБ

0 дБ

-5 дБ



Замирания сигналов в канале связи



Мощность передатчика

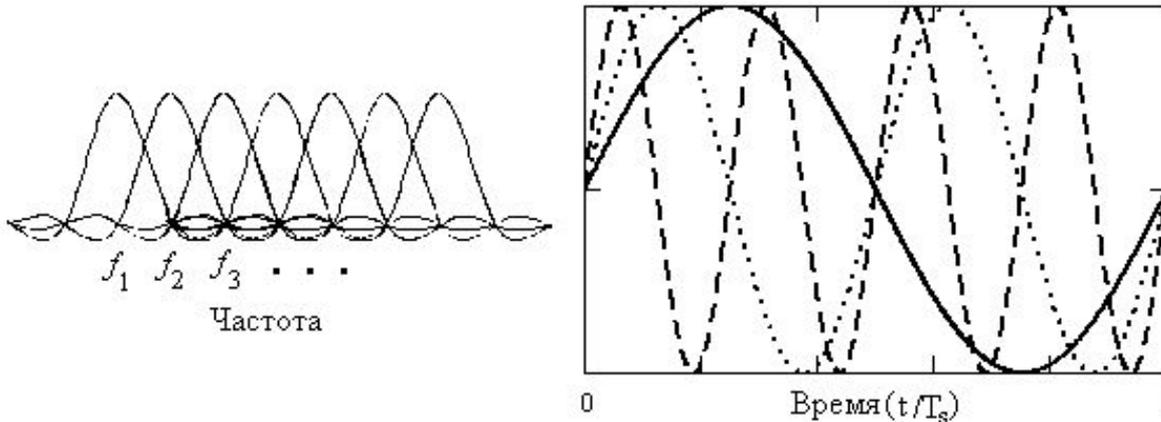
Лекция 2. OFDM-системы связи

1. Ортогональные многомерные сигналы с частотным сдвигом

$$s_m(t) = \text{Re} \left[\overline{s_{0m}(t) \exp(j2\pi f_c t)} \right] = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t] \quad 0 \leq t \leq T_s, m=1, 2, \dots, M.$$

$$s_{0m}(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \exp(j2\pi m \Delta f t)$$

$$\rho_{km} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T_s (m-k)\Delta f}{\pi T_s (m-k)\Delta f} e^{j\pi T_s (m-k)\Delta f} \quad |\rho_{km}| = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{T_s}$$



Δf – минимальный частотный разнос между поднесущими,

Спектры и временная зависимость синусоид с ортогональными частотами

2. Формирование OFDM-сигнала

d_k – информационный символ, передаваемый на k -й поднесущей,
 n – дискретное время, N_F – число точек БПФ.

Передаваемый узкополосный сигнал
 (n – дискретное время, N_F – размерность БПФ)

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp(-j2\pi f_k n \Delta t)$$

$$f_k = k\Delta f, \quad \Delta f = \frac{1}{T_s}, \quad N_F = \frac{T_s}{\Delta t}$$

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N_F}\right)$$

3. Прием OFDM-сигнала

Принятый низкочастотный сигнал $x(n) = \sum_{l=0} h(l)s(n-l) + z(n)$

$z(n)$ – гауссов собственный шум приемника с нулевым средним и дисперсией σ_0^2

Приемник выполняет прямое БПФ

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$



$$g_m = g_m^{(1)} + g_m^{(2)}$$

$$g_m^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{l=0}^{N_F} d_k h(l) \exp\left(\frac{j2\pi kl}{N_F}\right) \sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right) = \delta_{km} \quad g_m^{(1)} = \sqrt{N_F} H_m d_m$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{l=0}^{N_F} h(l) \exp\left(\frac{j2\pi ml}{N_F}\right)$$

H_m – коэффициент передачи многолучевого канала на m -й поднесущей

$$g_m^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} z(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$

$$\langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{n=1}^{N_F} \sum_{q=1}^{N_F} \langle z(n) z^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right) \exp\left(\frac{-j2\pi mq}{N_F}\right)$$

$$\langle z(n) z^*(q) \rangle = \sigma_0^2 \delta_{nq} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

$$\gamma_m = N_F \frac{\langle |H_m|^2 \rangle |d_m|^2}{\sigma_0^2} \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{l=0} \sum_{q=0} \langle h(l)h^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi m(l-q)}{N_F}\right)$$

$$\langle h(l)h^*(q) \rangle = P(l)\delta_{lq} \quad \sum_l P(l) = 1 \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \quad \gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\sigma_0^2}$$

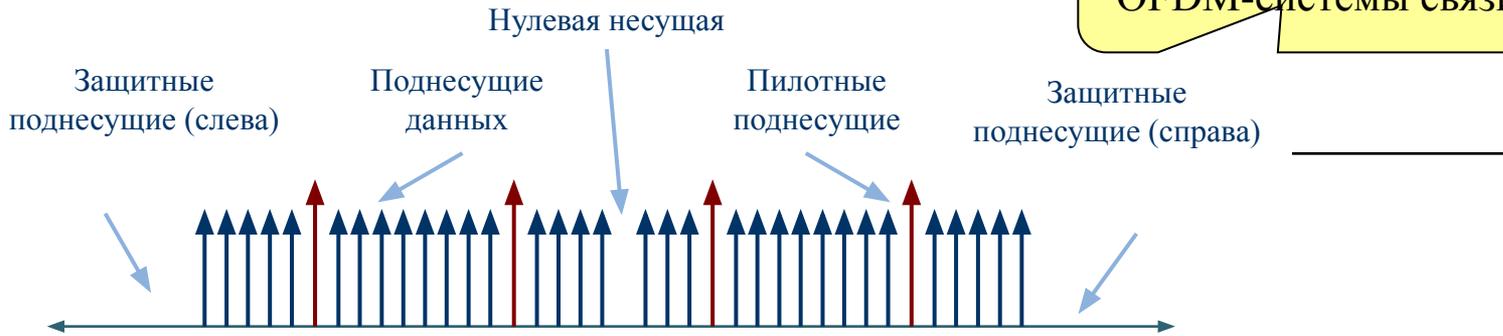
$$P_0 = \langle |s(n)|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle d_k d_m \rangle \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$

$$\langle d_k d_m \rangle = \langle |d_k|^2 \rangle \delta_{km}$$

$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle = \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\langle |d_m|^2 \rangle \sigma_0^2} \quad \langle \gamma_m \rangle = P_0 / \sigma_0^2$$

Частотная структура OFDM-системы связи



$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_{used}} \langle |d_m|^2 \rangle = \frac{N_{used}}{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\langle \gamma_m \rangle = \frac{N_F}{N_{used}} \frac{P_0}{\sigma_0^2}$$

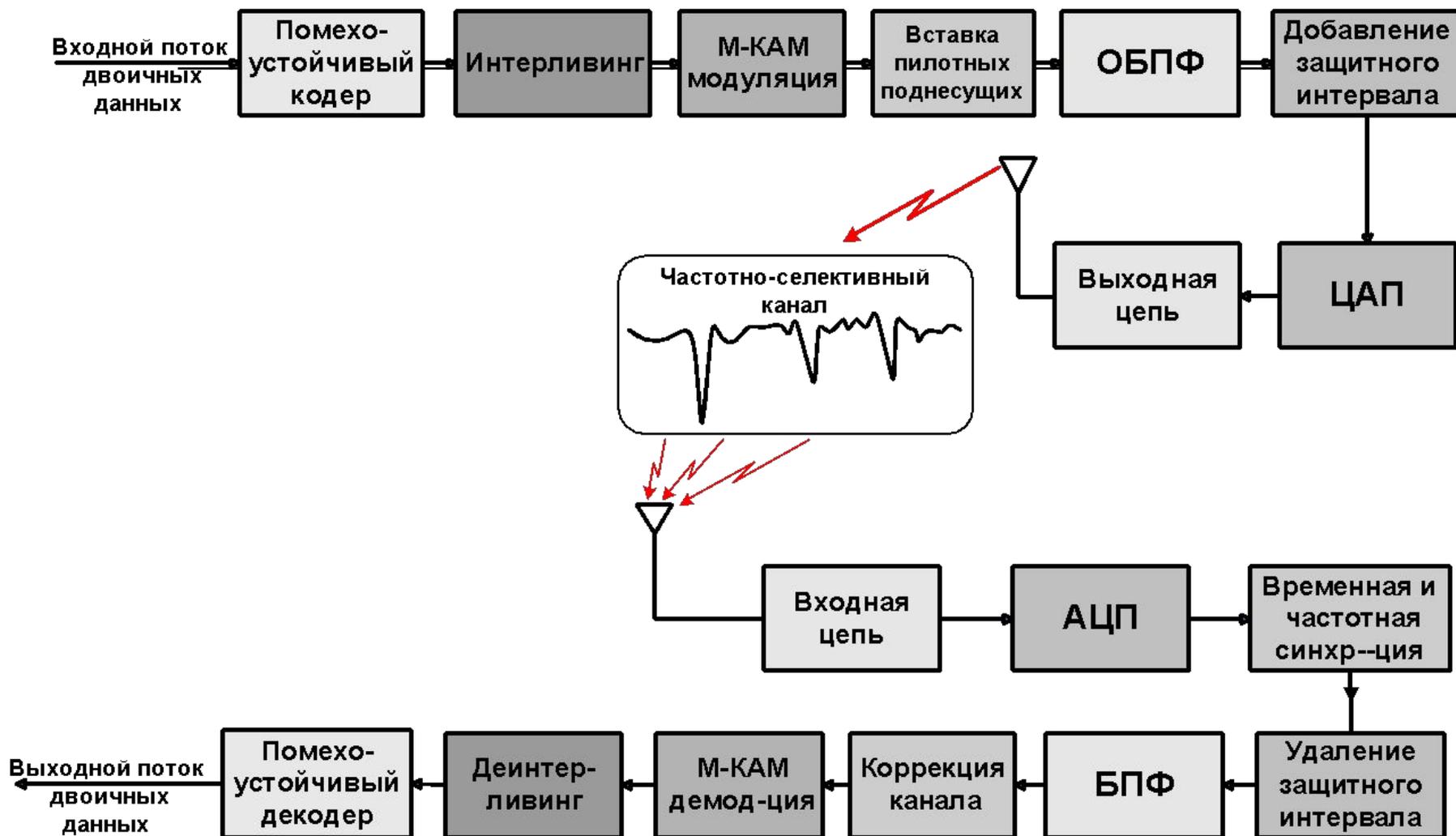
Информация из конца символа переносится в защитный интервал (циклический префикс).

Иначе возникнет помеха между поднесущими.

Длительность защитного интервала должна быть больше максимальной задержки в канале связи



4. Структурная схема OFDM-системы связи





Коррекция канала или эквализация

Вход эквалайзера – выход блока БПФ

$$g_m = \sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

Задача эквалайзера – восстановить спектр переданного сигнала, искаженного в частотно-селективном пространственном канале

Выход эквалайзера

$$\hat{d}_m = f_m \cdot g_m; \quad f_m = ?$$

f_m – коэффициент передачи эквалайзера на m -ой частоте

1. Простейший эквалайзер

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m} \quad \hat{d}_m = \frac{g_m}{\sqrt{N_F} H_m} = d_m + \frac{g_m^{(2)}}{\sqrt{N_F} H_m}$$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на m -й поднесущей $H_m \ll 1$), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте может неограниченно увеличиваться. Это плохо.

2. Эквализация по минимуму среднеквадратической ошибки

Функционал среднеквадратической ошибки

$$J = \langle | \hat{d}_m - d_m |^2 \rangle = \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$$

$$\min_{f_m} J = \min_{f_m} \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$$

*



$$\frac{dJ}{df_m^*} = \frac{d}{df_m^*} \langle (f_m^* g_m^* - d_m^*)(f_m g_m - d_m) \rangle = \langle g_m^* (f_m g_m - d_m) \rangle = 0$$

Т.о. сигнал ошибки эквалайзера ортогонален входному сигналу

Коэффициент передачи эквалайзера на m -ой частоте $f_m = \frac{\langle g_m^* d_m \rangle}{\langle |g_m|^2 \rangle}$

$$f_m = \frac{\langle (\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)})^* d_m \rangle}{\langle |\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)}|^2 \rangle} = \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{N_F |H_m|^2 |d_m|^2 + \sigma_0^2}$$

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \gg \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m}$ - совпадение с простейшим эквалайзером

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \ll \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{\sigma_0^2}$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на m -й поднесущей $H_m \ll 1$), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте не может неограниченно увеличиваться. Это хорошо.



5. Пропускная способность OFDM-системы

Каждый кластер (фрейм) кодируется и декодируется независимо.

Каждый кластер (фрейм) характеризуется:

N_s – число поднесущих; N_t – число OFDM-символов; N_p – число пилотных поднесущих, k_b – уровень модуляции (битовая загрузка символа), R_c – скорость кода.

$$I_{cluster} = R_c k_b (N_s N_t - N_p) \quad (\text{бит})$$

$$I = I_{cluster} / N_t T_s = I_{cluster} \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

$$Th = (1 - PER) I = (1 - PER) R_c k_b (N_s N_t - N_p) \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

$$N_t = 1 \quad Th = (1 - PER) W_{data} R_c k_b$$

$$k_b = 1, R_c = 1, \text{ОСШ} \rightarrow \infty \Rightarrow PER \rightarrow 0, Th \rightarrow W_{data}$$

**ПС (ОСШ $\gg 1$) равна
ширине полосы,
используемой для
передачи данных**

6. Эффективная пропускная способность OFDM-системы

Рассмотрим передачу некодированной информации, а наличие кодера учтем, задавая максимально допустимое число ν ошибочно переданных бит в блоке, которое может исправить кодер.

Блок считается переданным верно при меньшем или равном ν числе ошибочных бит.

Вероятность, что в блоке из n бит имеется j ошибочно и $(n-j)$ правильно детектированных бит

$$P_n^{(j)} = C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

C_n^j - число сочетаний из n по j .

Вероятность правильной передачи блока

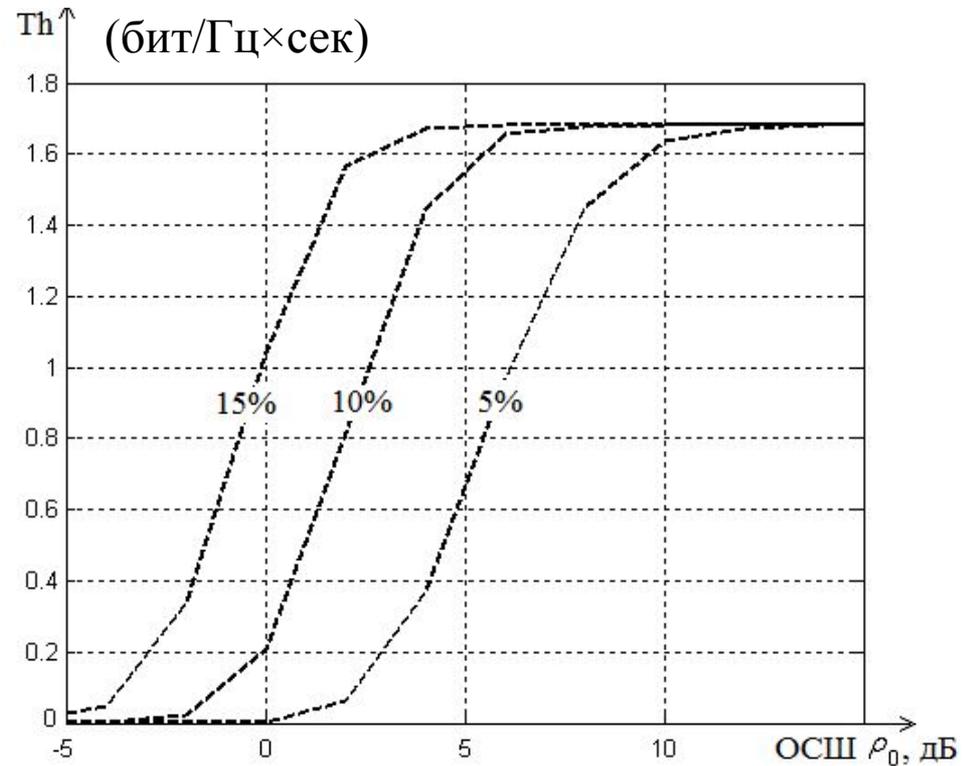
$$\sum_{j=0}^{\nu} C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

Вероятность блоковой ошибки

$$BLER = 1 - \sum_{j=0}^{\nu} C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

$$Th = (1 - BLER) \frac{k_b R_c (N_s N_t - N_p)}{N_s N_t}$$

(бит/Гц×сек)



Эффективная ПС при QPSK модуляции

$$R_c = 1, N_s = 5, N_t = 5$$

7. Некоторые сведения о преобразованиях Фурье

7.1. Дискретное преобразования Фурье (ДПФ)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad \text{- прямое ДПФ}$$

Докажем, что обратное ДПФ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Доказательство:

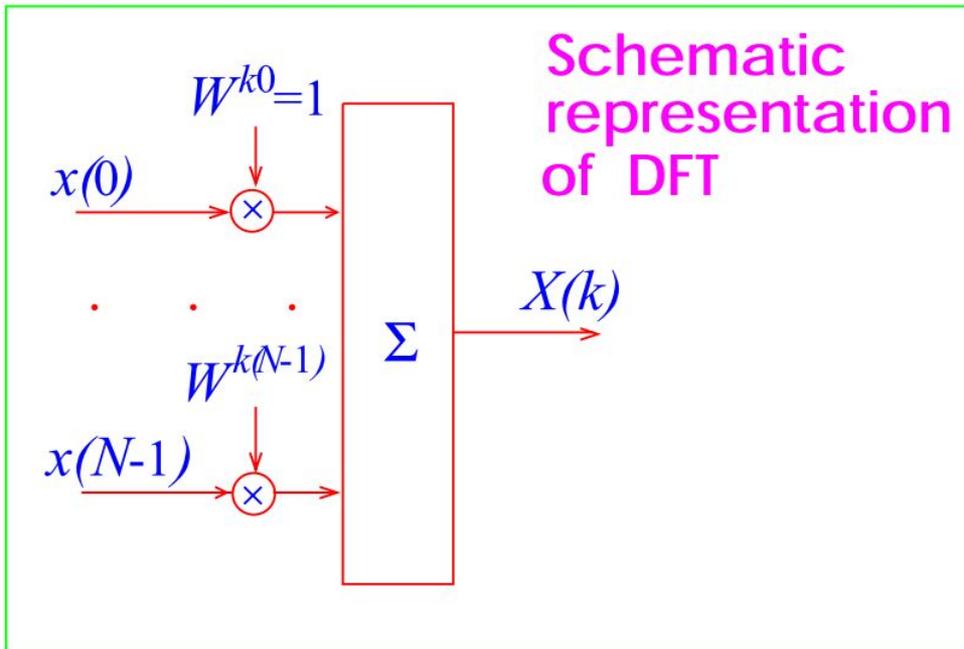
$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right\} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k(m-n)}{N}} \right\}}_{\delta(m-n)} = x(n) \end{aligned}$$

Обозначим $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Прямое и обратное ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}$$



7.2. Матричная формулировка ДПФ

Введем N -мерные векторы

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

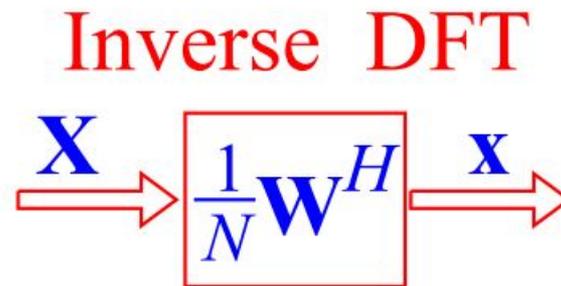
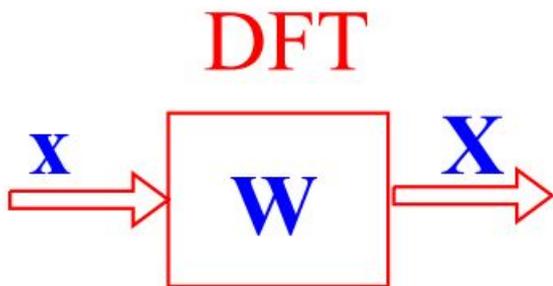
$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

Введем матрицу
размерности $N \times N$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Прямое и обратное ДПФ в матричной записи: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ $\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$



7.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Введем новые обозначения: $X_N(k) = X(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Выше мы использовали обозначения $X(k)$ и W без нижнего индекса N , показывающего длину последовательности.

Предположим, что длина преобразуемой последовательности – целая степень 2

$$N = 2^r, \quad r = \log_2 N$$

Идея БПФ:

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \leftarrow N\text{-point DFT}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{n \text{ even} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{\substack{n \text{ odd} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_N^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_{N/2}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk} \quad \leftarrow \text{two } N/2\text{-point} \end{aligned}$$

DFT's!!!

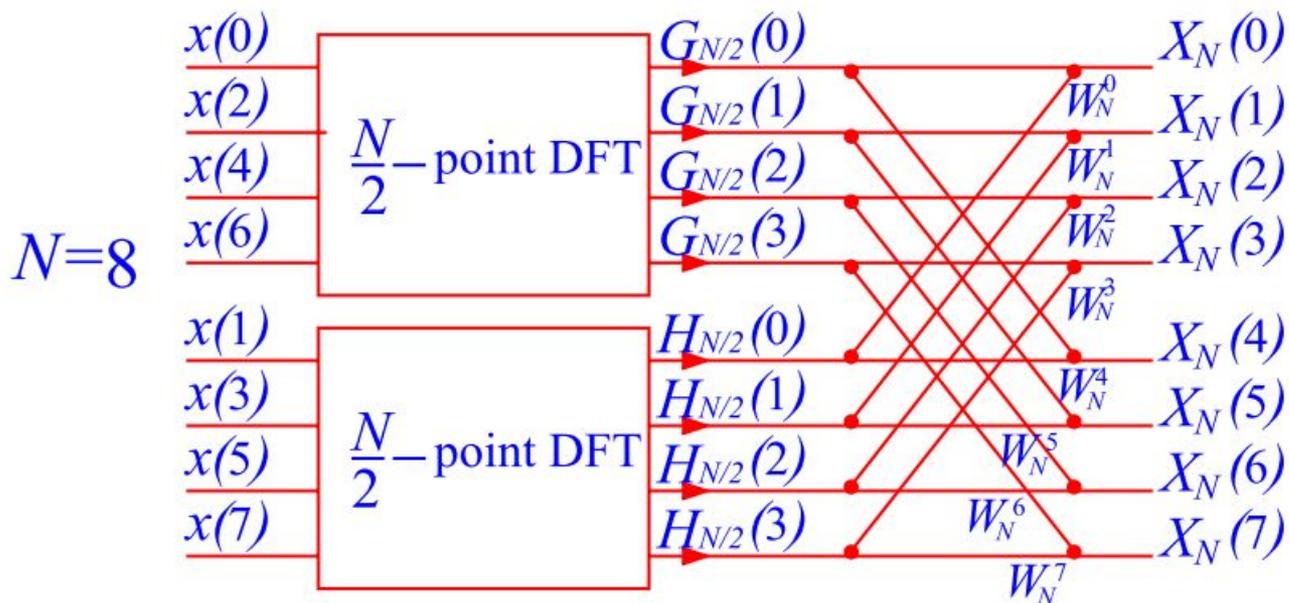


Или в краткой форме: $X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k)$

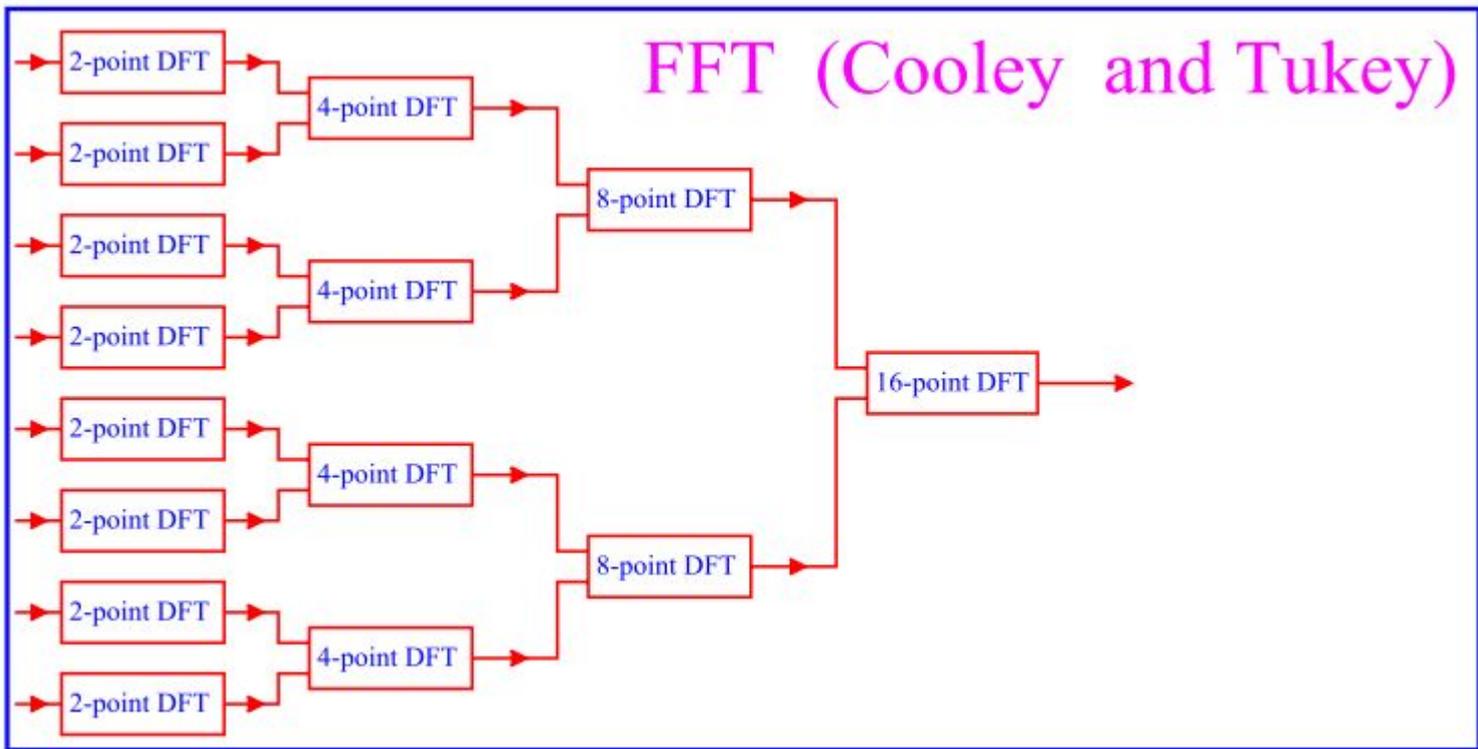
$G_{N/2}(k)$ и $H_{N/2}(k)$ – ДПФ размерности $N/2$, включающие четные и нечетные n , соответственно

$$G_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l)W_{N/2}^{lk}$$

$$H_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk}$$



1. N -точечное ДПФ с четным N может быть вычислено через два $N/2$ -точечных ДПФ.
2. Если $N/2$ четное, то каждое из этих $N/2$ -точечных ДПФ может быть вычислено через два $N/4$ -точечных ДПФ и так далее.
3. Так как $N=2^r$, то $N, N/2, N/4 \dots$ четные числа и процесс закончится 2-точечным ДПФ.



7.4. Вычислительная сложность дискретных преобразований Фурье

1. БПФ

Каждая стадия имеет N комплексных умножений и N комплексных сложений.

Всего имеется $\log_2 N$ стадий.

Полный объем вычислений

$$C_{FFT} = N \log_2 N$$

2. ДПФ

Полный объем вычислений $C_{DFT} = N^2$

3. Сравнение

Использование БПФ дает выигрыш в $\frac{N}{\log_2 N}$ раз

4. Пример.

$$N=2^{10} = 1024.$$

$$C_{DFT} = 2^{20} \approx 10^6. C_{FFT} = 10 \cdot 1024 \approx 10^4$$

Использование БПФ дает выигрыш в ≈ 100 раз.



Лекции 3-4. Преобразование аналоговой информации в цифровую форму

1. Дискретизация аналогового сигнала

$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ - спектр сигнала $x(t)$, где ω - круговая частота; $\delta(x)$ - дельта-функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Периодический сигнал с периодом T имеет линейчатый спектр

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

Сигнал представляется рядом Фурье $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$

Докажем, что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)$ периодическая последовательность δ -импульсов имеет линейчатый спектр в виде периодической последовательности δ -компонент

Последовательность импульсов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \text{ имеет период } \Delta t$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$X_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Delta t} t\right) dt = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\text{Спектр } X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)$$

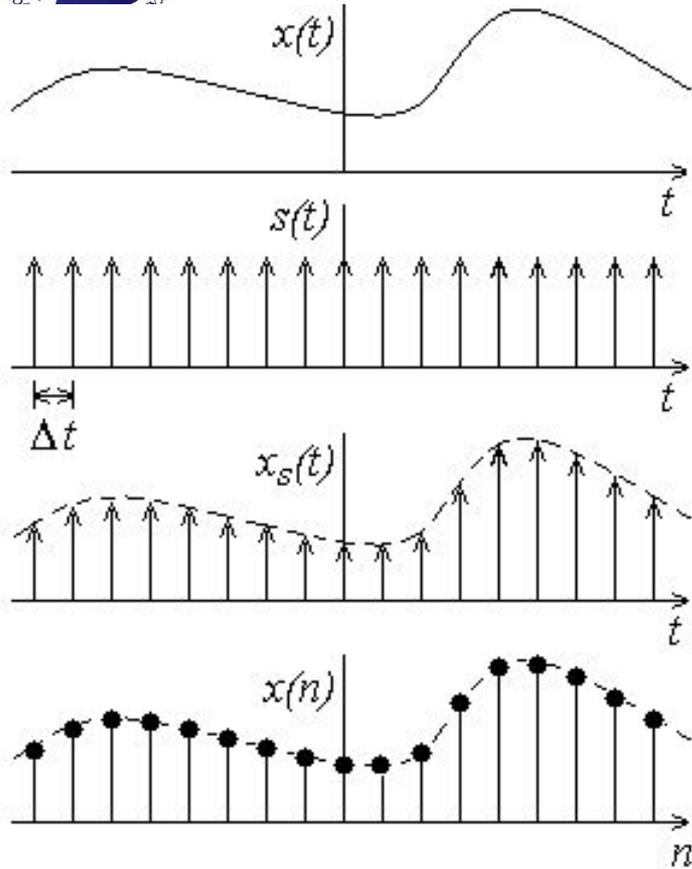
Доказали

Операция дискретизации.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$x_s(t) = x(t)s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad - \text{ дискретный (семплированный) сигнал}$$

$$\text{Так как } x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \text{ то } x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)$$



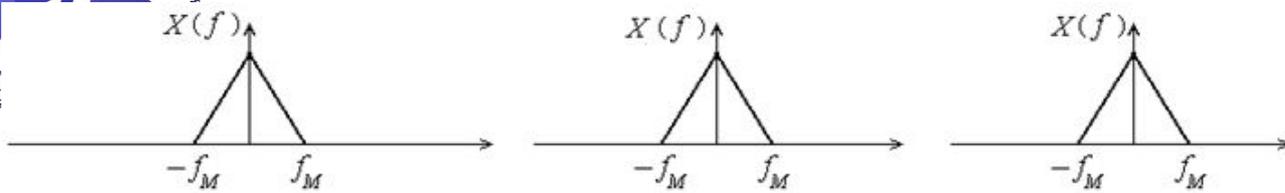
Процедура дискретизации
аналогового сигнала

$$\begin{aligned}
 X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) S(\omega - \nu) d\nu = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \left\{ \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t} - \nu\right) \right\} d\nu = \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

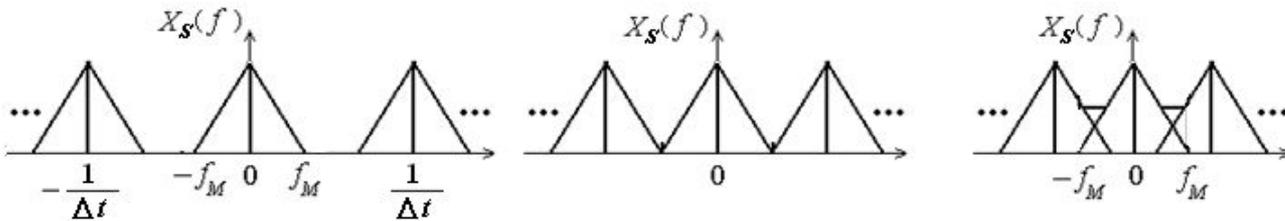
Спектр дискретного сигнала есть
размноженная версия спектра
исходного непрерывного сигнала

Частота Найквиста (частота дискретизации, скорость стробирования) $f_N = 1/\Delta t$

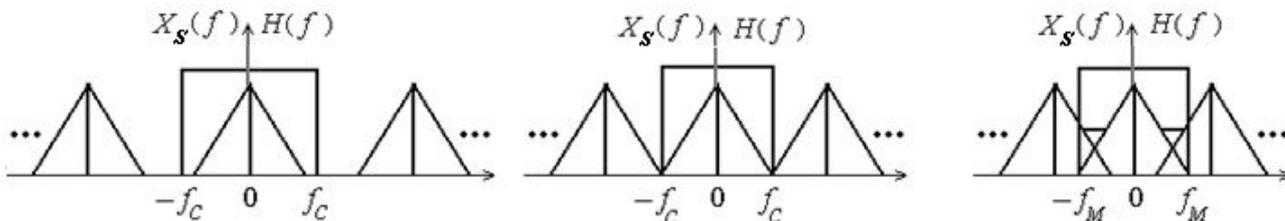
НИЖЕ



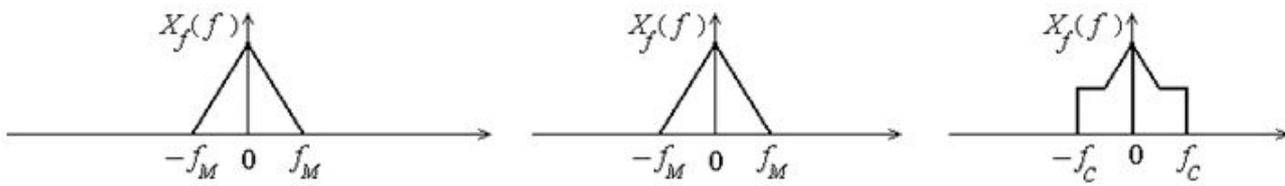
Спектр аналогового сигнала



Спектр дискретного сигнала



Передаточная функция восстанавливающего фильтра



Спектр восстановленного сигнала

$f_N > 2f_M$

$f_N = 2f_M$

$f_N < 2f_M$

Хорошее восстановление сигнала

Плохое восстановление сигнала

$f_N \geq 2f_M$ or $\Delta t \leq \frac{1}{2f_M}$

Так необходимо делать на практике

2. Теорема Котельникова

Непрерывный сигнал с ограниченной полосой $[-f_M \div f_M]$ может быть восстановлен по его отсчетам (выборкам), взятым через интервал времени $\Delta t \leq 1/(2f_M)$ с помощью интерполяционной формулы

$$x_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \frac{\sin[\pi(t - n\Delta t)/\Delta t]}{\pi(t - n\Delta t)/\Delta t}$$

$\Delta t_{max} = 1/(2f_M)$ - максимальный интервал между временными отсчетами сигнала, определяемый шириной полосы

Доказательство. Сигнал можно восстановить в частотной области, используя идеальный низкочастотный фильтр

$$X_f(\omega) = X_s(\omega)H(\omega)$$

$$\begin{aligned} x_f(t) &= \{x_s(t)\} \otimes \{h(t)\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \right\} \otimes \{h(t)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(\tau - n\Delta t) h(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) h(t - n\Delta t) \end{aligned}$$

Идеальная передающая функция
(см. рисунок на слайде выше)

$$H(\omega) = \begin{cases} \Delta t, & -\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t \\ 0, & |\omega| > \pi/\Delta t. \end{cases}$$

Идеальная импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta t)}{(\pi t/\Delta t)}$$

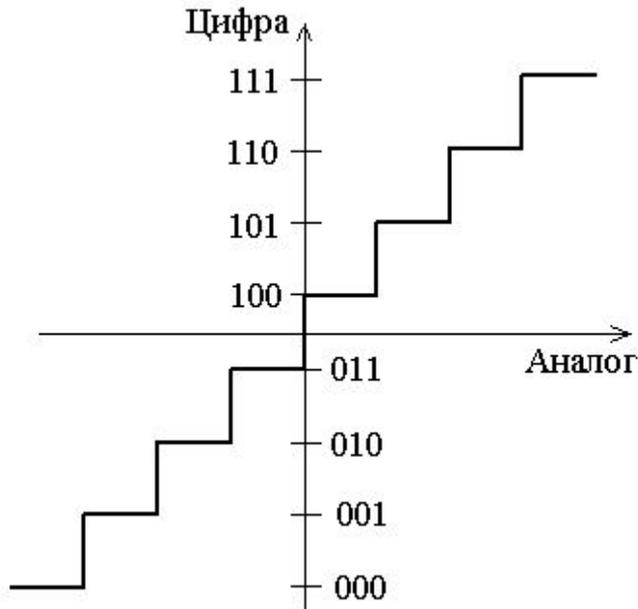
3. Квантование аналоговых сигналов

Равномерная импульсно-кодовая модуляция (ИКМ)

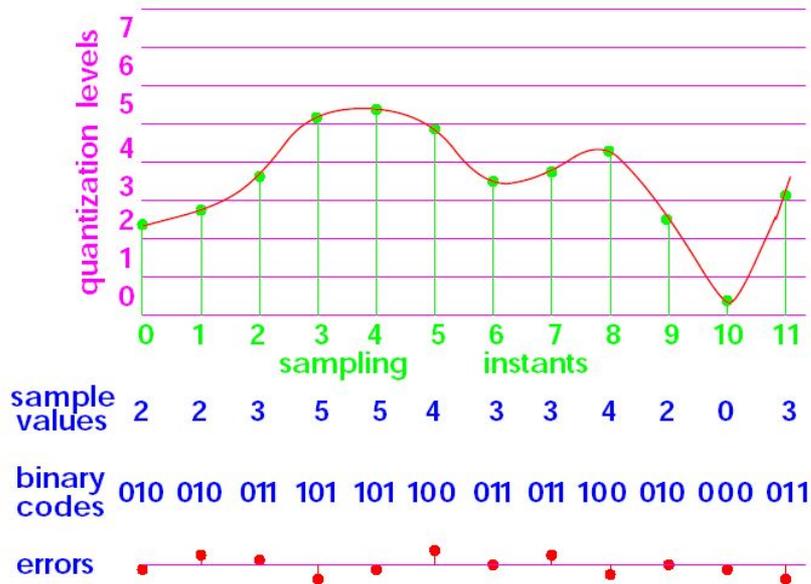
Каждый отчет квантуется в один из $N=2^b$ уровней, где b – число двоичных цифр (разрядов)
Динамический диапазон сигнала $[-E_{max} \div E_{max}]$.

Размер шага квантования

$$q = 2E_{max} / 2^b$$



Converting an analog signal into a binary code



Амплитудная характеристика
3-битового квантователя

Процесс квантования $\tilde{x} = x + e$

где e – ошибка квантования, трактуемая как аддитивный шум с равномерной плотностью вероятности

$$p(e) = 1/q$$

$$(-0.5q \leq e \leq 0.5q)$$

Мощность
ошибки квантования

$$\sigma_q^2 = \int_{-0.5q}^{0.5q} e^2 p(e) de = \int_{-0.5q}^{0.5q} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{1}{12} q^2 = \frac{(2E_{\max})^2}{12(2^{2b})}$$

Мощность входного сигнала x при равномерной плотности вероятности на интервале от $-E_{\max}$ до $+E_{\max}$

$$\sigma_x^2 = \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} x^2 p(x) dx = \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} x^2 \frac{1}{2E_{\max}} dx = \frac{(2E_{\max})^2}{12}$$

$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 2^{2b} \quad \text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 10 \lg(\text{ОСШ}) = 10 \lg(2^{2b}) = 20b \lg(2) = 6b$$

Пример: 8-разрядный ($b=8$) АЦП (256 уровней).
ОСШ = 48 дБ.

**ОСШ увеличивается
на 6 дБ на каждый
разряд АЦП**



При неравномерной плотности вероятности сигнала на интервале от $-E_{max}$ до $+E_{max}$

$$\text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 6b - C \quad (C > 0)$$

Пример. Сигнал x занимает часть динамического диапазона квантователя и имеет равномерную плотность вероятности на интервале $-E_{max}/a \leq x \leq E_{max}/a$ ($a > 1$)

Мощности сигнала
$$\sigma_x^2 = \int_{-E_{max}/a}^{E_{max}/a} x^2 p(x) dx = \frac{(2E_{max})^2}{12a^2}$$

$$\text{ОСШ} = 2^{2b} / a^2 \quad \text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 10 \lg(\text{ОСШ}) = 6b - 20 \lg a$$

Пример: $a=4$. Тогда $C=12$ дБ.

Неравномерная импульсно-кодовая модуляция



Устройство неравномерного квантования

Характеристика компрессора $y=C(x)$. Размер шага квантования $\Delta y = (dC/dx)\Delta x$

Дисперсия ошибки квантования (плотность вероятности $p(x)$ и характеристика компрессора $y=C(x)$ произвольные)

$$\sigma_q^2 = \frac{q^2}{12} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{|dC/dx|^2} dx$$

Дисперсия сигнала $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$

В природе более вероятны более слабые сигналы. Входной сигнал преобразуется в нелинейном устройстве (компрессор или сжиматель) и затем квантуется с помощью равномерной ИКМ. При восстановлении сигнала используется обратное преобразование, выполняемое с помощью экспандера (расширителя)



$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = \frac{\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} x^2 p(x) dx}{\frac{q^2}{12} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{(dC/dx)^2} dx}$$

ОСШ не должно зависеть от функции $p(x)$ —

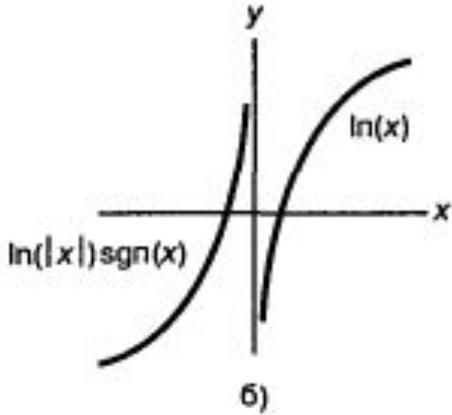
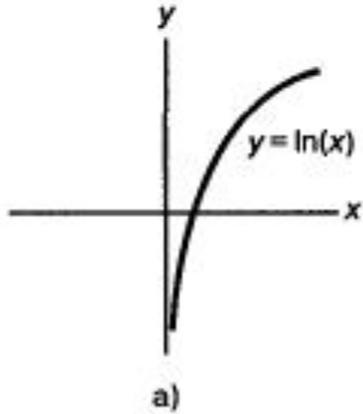
$$(dC/dx)^2 = (K/x)^2$$

$$x > 0. \quad dC/dx = K/x \quad C(x) = \int_0^x (K/z) dz = \ln x + \text{const}$$

Компрессор должен
быть логарифмическим

$$\text{Граничные условия} \quad \frac{y}{y_{\max}} = \frac{C(x)}{y_{\max}} = \ln \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)$$

$$x < 0. \quad \frac{y}{y_{\max}} = \ln \left(\frac{|x|}{x_{\max}} \right) \text{sgn}(x), \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & (x \geq 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$



Плавное соединение между логарифмической функцией и линейным отрезком, проходящим через начало координат

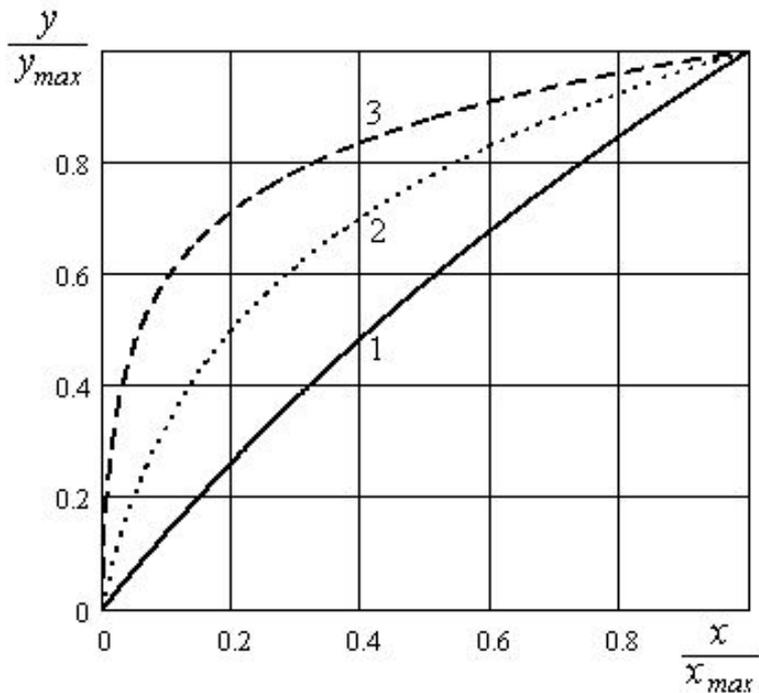
Функции логарифмического сжатия

μ -закон (Северная Америка)
 A -закон (Европа)

Амплитудная характеристика μ -компрессора

$$y = y_{\max} \frac{\ln[1 + \mu(|x|/x_{\max})]}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn} x$$

Амплитудная характеристика A -компрессора



$$y = \begin{cases} y_{\max} \frac{A(|x|/x_{\max})}{1 + \ln(A)} \operatorname{sgn} x, & 0 < |x|/x_{\max} < 1/A \\ y_{\max} \frac{1 + A(|x|/x_{\max})}{1 + \ln(A)} \operatorname{sgn} x, & 1/A < |x|/x_{\max} < 1. \end{cases}$$

В стандарте США и Канады при кодировании речи $\mu=255$ при 8-битовом АЦП.

$A=87.56$ - стандартное значение параметра A .

Амплитудная характеристика компрессора при $\mu=1, 15$ и 255 (кривые 1, 2, 3, соответственно)

Среднее ОСШ для μ -компрессора

$$\frac{dC}{dx} = y_{\max} \frac{1}{\ln(1+\mu)} \cdot \frac{(\mu/x_{\max})}{1+\mu(|x|/x_{\max})}$$

$$\mu(|x|/x_{\max}) \gg 1 \quad \frac{dC}{dx} \approx \frac{1}{|x|} \cdot \frac{y_{\max}}{\ln(\mu)}$$

$$\text{ОСШ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = \frac{12}{q^2} \left(\frac{y_{\max}}{\ln(\mu)} \right)^2 = 3 \left(\frac{2y_{\max}}{q} \right)^2 \left(\frac{1}{\ln(\mu)} \right)^2$$

$$2y_{\max}/q = 2^b \quad \text{ОСШ} = 2^{2b} \frac{3}{[\ln(\mu)]^2}$$

$$\text{ОСШ}_{\text{дБ}} = 6b - C \quad C = 4.8 - 20 \cdot \lg(\ln(\mu))$$

$$\mu=255 \quad C=10.1 \text{ дБ.}$$

ОСШ уменьшилось на 10.1 дБ.
Однако теперь ОСШ не зависит
от плотности вероятности
входного сигнала

4. Кодирование дискретных источников

X множество всевозможных дискретных сообщений x_1, x_2, \dots, x_n передается по каналу связи с вероятностями $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$.

Условие непрерывной передачи: $p(x_1)+p(x_2)+ \dots +p(x_n)=1$.

Энтропия источника (среднее количество информации при передаче одного символа сообщения)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i)$$

$H_{\max} = \log n$ - при равновероятных символах ($p(x_i)=1/n$),

Кодовые слова фиксированной длины (при равновероятных символах источника)

Каждому из n символов источника ставится в соответствие R бит.

Эффективность кодирования – H/R (H – энтропия)

- n равно целой степени основания 2: число бит на символ источника $R=\log_2(n)$, $H/R=1$

- n не равно целой степени основания 2: число бит на символ $R=\lceil \log_2(n) \rceil +1$, $H/R < 1$

Кодовые слова переменной длины (при не равновероятных символах источника)

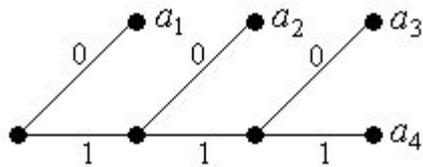
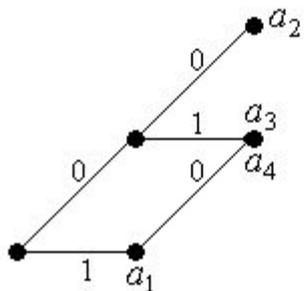
Должны выполняться два условия:

- требуется минимальное количество кодовых символов (бит) для передачи сообщения;
- отсутствуют потери передаваемой информации (однозначное декодирование)

Для выполнения второго условия используются префиксные (мгновенные) коды, в которых начало более длинного кодового слова не совпадает с более коротким кодом.

В этом случае исключается неоднозначность при декодировании.

Пример. Четыре символа источника имеют вероятности (см. табл.) и кодируются, как показано в табл.



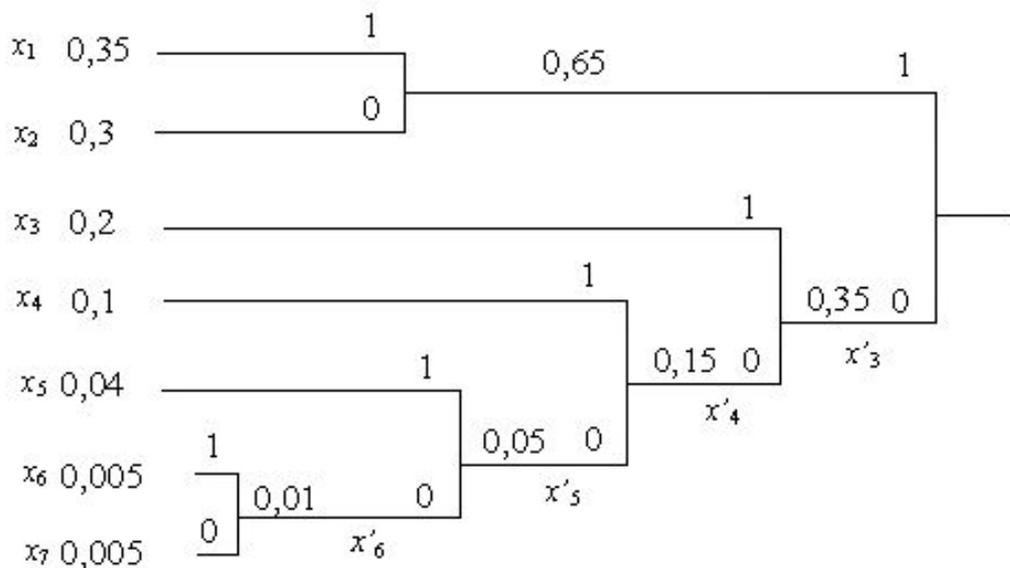
| Символ | Вероятность | Код I | Код II |
|--------|-------------|-------|--------|
| a_1 | 1/2 | 1 | 0 |
| a_2 | 1/4 | 00 | 10 |
| a_3 | 1/8 | 01 | 110 |
| a_4 | 1/8 | 10 | 111 |

Принятая последовательность 001001 имеет два варианта декодирования (при коде I): $a_2 a_4 a_3$ или $a_2 a_1 a_2 a_1$

Код I (слева) не обеспечивает однозначное декодирование.
Код II (справа) обеспечивает однозначное декодирование



Код Хаффмена

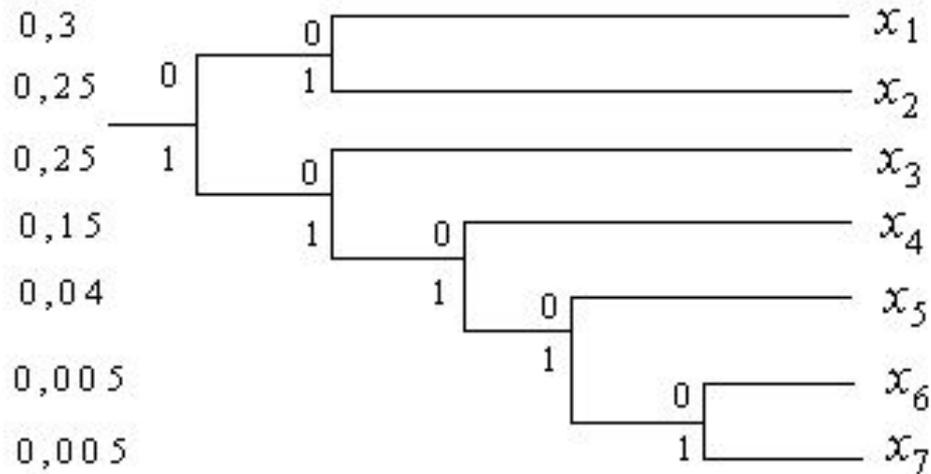


Энтропия источника $H(X)=2.11$.
 Средняя длина кодового слова $R=2.21$.
 Эффективность кодирования
 $H(X)/R=95.5\%$.

Длина кодовой посылки обратно пропорциональна его априорной вероятности

| Символ сообщения | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вероятность символа | 0.35 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.04 | 0.005 | 0.005 |
| Двоичный код символа | 11 | 10 | 01 | 001 | 0001 | 00001 | 00000 |

Код Шеннона-Фэнно



Длина кодовой посылки обратно пропорциональна его априорной вероятности

| Символ сообщения | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вероятность символа | 0.3 | 0.25 | 0.25 | 0.15 | 0.04 | 0.005 | 0.005 |
| Двоичный код символа | 00 | 01 | 10 | 110 | 1110 | 11110 | 11111 |