

Математика

Системы линейных уравнений



Виды систем линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad [1.9], \text{ где } b_1, b_2, \dots, b_n \text{-свободные члены; } x_1, x_2, \dots, x_n \text{-}$$

неизвестные; a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

системы линейных уравнений

- Решить систему линейных уравнений значит найти совокупность чисел $x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n$, или доказать что решений нет.
- Две системы называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Пример

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}, x_1=10, x_2=0 - \text{совместная, определённая система;}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}, \text{решений нет} - \text{несовместная система;}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}, x_1=k, x_2=10-2k - \text{совместная, неопределённая система.}$$

Матричная запись систем линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad [1.10] \text{- основная матрица, её элементами являются}$$

коэффициенты при неизвестных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad [1.11] \text{- матрица столбец свободных членов; } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [1.12] \text{- матрица столбец}$$

неизвестных; $C = (A|B)$ [1.13]- расширенная матрица.

Пример

Пример

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \text{основная матрица;}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{матрица столбец свободных членов; } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \text{матрица столбец}$$

$$\text{неизвестных; } C = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) - \text{расширенная матрица.}$$

Решение систем линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \epsilon_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = \epsilon_2 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \text{основная матрица}; B = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} - \text{матрица столбец}$$

свободных членов; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - матрица столбец неизвестных.

$X = A^{-1}B$ [1.14] - формула для решения систем линейных уравнений матричным методом.

Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пример

$$1) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

применим формулу: $X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, значит $x=2, y=1$. |

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix};$$

применим формулу: $X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, значит $x_1=2, x_2=0,$

$x_3=-1$.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Для решения система n линейных уравнений с n неизвестными применяются

формулы: $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, ..., $x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$ [1.15]; где x_1, x_2, \dots, x_n - неизвестные, D - определитель основной матрицы; D_{x_1} - определитель основной матрицы в котором первый столбец заменили столбцом свободных членов, D_{x_2} - определитель основной матрицы в котором второй столбец заменили столбцом свободных членов, ..., D_{x_n} - определитель основной матрицы в котором n -ый столбец заменили столбцом свободных членов.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}, D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79, D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -158, D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 5, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = -2, x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = 3.$$

