Лекция №4

Основы динамики вращательного движения.

План лекции.

4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.
4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.
4.3.Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.
4.4. Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.
4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.
4.6.Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.
4.7. Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

4.1. Момент импульса. Момент силы.
Уравнение вращательного движения системы.

Определения.

- **Моментом импульса материальной точки относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{l} \equiv [\vec{r}, \vec{p}]. \qquad (4.1)$$

- **Моментом силы** $\vec{F}$ **относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (4.2)$$

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k \Rightarrow \vec{M} = \sum_k \vec{M}_k, \qquad \vec{M}_k = [\vec{r}, \vec{F}_k]. \qquad (4.3-4.5)$$

$$(4.1) \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \qquad (4.6)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M} \qquad (4.7)$$

(4.7) – уравнение вращательного движения материальной точки.

4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.

Определение. • **Моментом импульса механической системы относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{l}_i. \tag{4.8}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i. \tag{4.9}$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{(ex)} + \vec{M}^{(in)}, \qquad \vec{M}^{(in)} = 0 \tag{4.10, 4.11}$$

$$\vec{F}_{i,k} + \vec{F}_{k,i} = 0, \qquad \vec{M}_{i,k} \equiv [\vec{r}_i, \vec{F}_{i,k}] = [\vec{r}_\perp, \vec{F}_{i,k}],$$

$$\vec{M}_{k,i} \equiv [\vec{r}_k, \vec{F}_{k,i}] = [\vec{r}_\perp, \vec{F}_{k,i}]. \tag{4.12, 4.13}$$

$$\vec{M}_{i,k} + \vec{M}_{k,i} = 0 \tag{4.14}$$

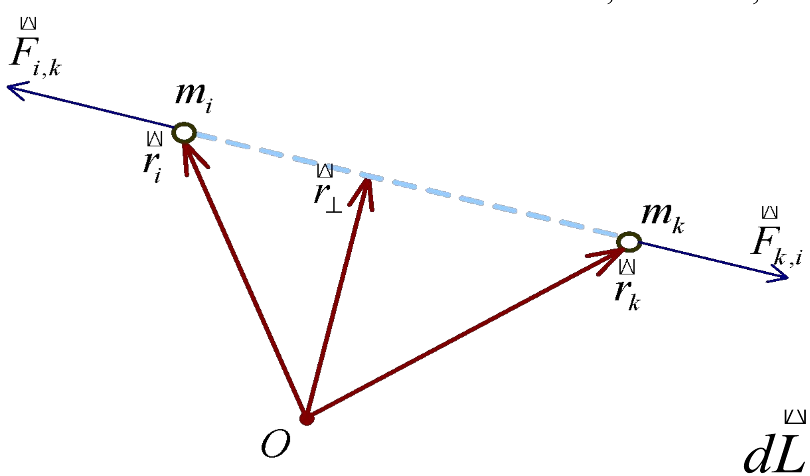

Рис. 4.1

Уравнение вращательного движения механической системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \tag{4.15, 4.16}$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

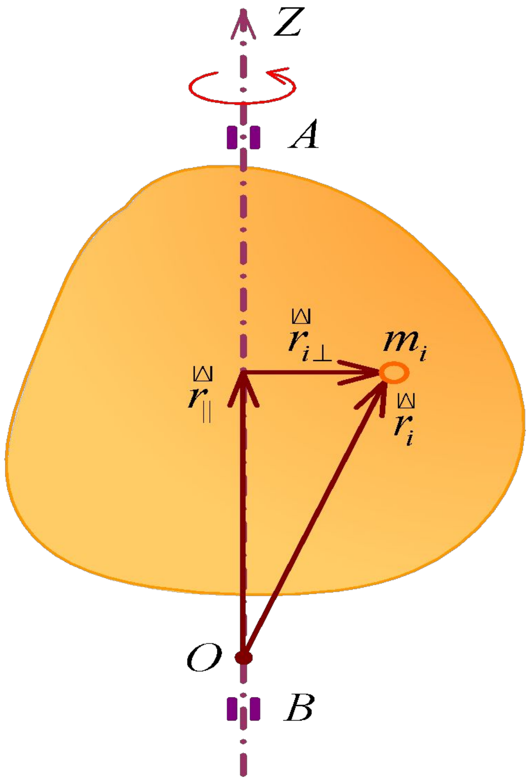

Рис. 4.2

Моменты импульса:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp}, \quad \vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}], \quad \vec{p}_i = m_i[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]. \qquad (4.17 – 4.19)$$

$$\vec{l}_i = m_i[\vec{r}_{i\parallel}[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] + m_i[\vec{r}_{i\perp}[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]]. \qquad (4.20)$$

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}):$$

$$[\vec{r}_{i\parallel}[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{r}_{i\perp}) - \vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{\omega}) = -\vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{\omega}),$$

$$[\vec{r}_{i\perp}[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{r}_{i\perp}, \vec{r}_{i\perp}) - \vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega}) = r_{i\perp}^2 \vec{\omega}. \qquad (4.21)$$

$$\vec{l}_i = \vec{l}_{i\parallel} + \vec{l}_{i\perp}, \qquad \vec{l}_{i\parallel} = m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} \qquad (4.23, 4.24)$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}, \qquad \vec{L}_{\parallel} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2\right)\vec{\omega} \qquad (4.25, 4.26)$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\vec{L}_{\parallel} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \vec{\omega}$$

Момент инерции тела относительно оси:

$$I \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \qquad (4.27)$$

$$\vec{L}_{\parallel} = I\vec{\omega}, \qquad L_z = I\omega_z. \qquad (4.28,\ 4.29)$$

- Величина L_z – **момент импульса тела относительно OZ.**

Главное: если нас интересует вращение тела относительно данной оси, то достаточно использовать величины $\vec{L}_{\parallel}$ или L_z, величина же $\vec{L}_{\perp}$ для нас не представляет интереса.

Моменты сил.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}. \qquad (4.33)$$

$$\vec{M} \equiv \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\right] = \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}\right] + \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right]. \qquad (4.34)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}, \qquad \vec{M}_{\parallel} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right] \qquad \vec{M}_{\perp} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}\right]. \qquad (4.35,\ 4.36)$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

Моменты сил.

$$M_z = \left(\left[\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp\right]\right)_z. \tag{4.41}$$

Подчеркнем, что момент (импульса, силы) относительно оси (OZ) равен проекции вектора момента (импульса, силы) на эту ось при условии, что начало O лежит на оси.

$$\left|M_z\right| = F_\perp \cdot d, \tag{4.42}$$

$$M_z(\square) < 0, \qquad M_z(\square) > 0. \tag{4.43}$$

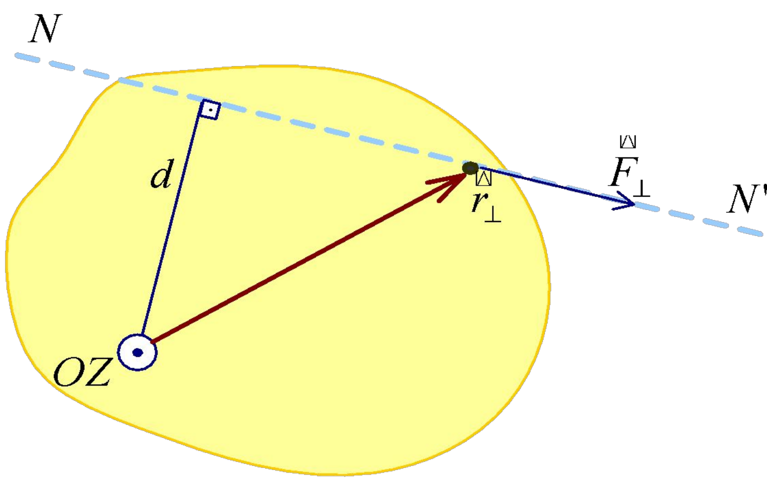

Рис. 4.3

Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}$$

$$\vec{L} \to \vec{L}_\parallel, \qquad \vec{M}^{(ex)} \to \vec{M}_\parallel^{(ex)}:$$

$$\frac{d\vec{L}_\parallel}{dt} = \vec{M}_\parallel^{(ex)} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью… Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\frac{d\vec{L}_{||}}{dt} = \vec{M}_{||}^{(ex)} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \qquad \vec{L}_{||} = I\vec{\omega}, \quad L_z = I\omega_z\,, \qquad (4.28,\ 4.29)$$

$$\vec{\varepsilon} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,, \quad \Rightarrow \quad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{||}^{(ex)} \qquad I\varepsilon_z = M_z^{(ex)} \qquad (4.44,\ 4.46)$$

4.3.Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

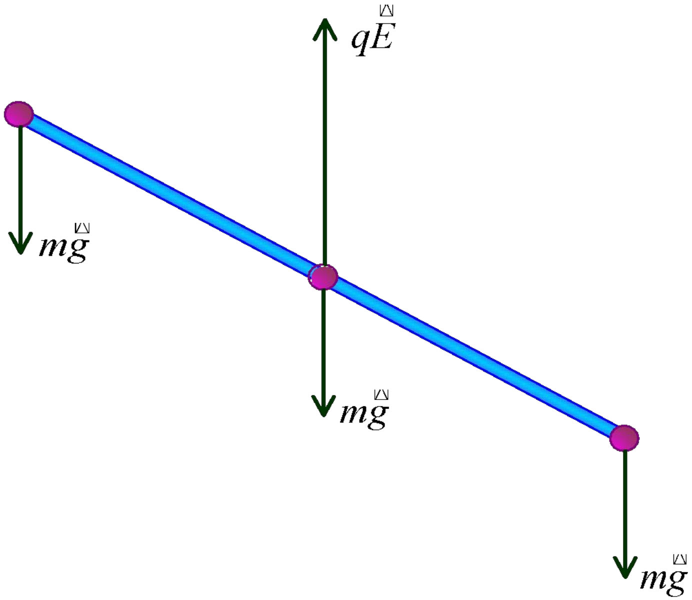

Рис. 4.5

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \qquad (4.15,\ 4.16)$$

$$\vec{M}^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = const\,: \qquad (4.49)$$

если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется.

$$\vec{F}^{(ex)} = 3m\vec{g} + q\vec{E} = 0, \qquad \vec{M}^{(ex)} = 0\,.$$

4.3.Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Традиционная формулировка :

- **момент импульса замкнутой системы сохраняется**.

При некотором специальном выборе начала О возможно

$$\vec{M}^{(ex)} = 0\,, \qquad \vec{F}^{(ex)} \neq 0\,,$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}\,, \qquad \vec{M}_F = \left[\vec{r}, f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0, \qquad (4.59,\ 4.60)$$

- **в центральном силовом поле момент импульса материальной точки относительно силового центра сохраняется.**

Второй закон Кеплера

Закон сохранения момента импульса относительно оси:

$$M_z^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = const\,: \qquad (4.64)$$

- **если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.**

4.3… Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Скамья Жуковского – круглая горизонтальная платформа, которая может вращаться практически без трения вокруг вертикальной оси.

Пример. Человек располагается на вращающейся скамье Жуковского в ее центре в положении “руки по швам”. Система человек-скамья вращается с некоторой угловой скоростью ω_1. Как изменится угловая скорость вращения системы, если человек разведет руки в стороны?

$$I_1 = I_c + I_{m1}, \qquad I_2 = I_c + I_{m2}. \qquad (4.72,\ 4.73)$$

$$I_{m2} > I_{m1} \qquad I_2 > I_1, \qquad (4.74,\ 4.75)$$

-- при разведении рук в стороны увеличивается момент инерции системы относительно оси.

$$M_z^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = const \;\Rightarrow\; I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z}. \qquad (4.77)$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (I_c + I_{m1})\,\omega_1 = (I_c + I_{m2})\,\omega_2 \qquad (4.78,\ 4.79)$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(I_c + I_{m1})}{(I_c + I_{m2})}\omega_1. \qquad (4.80)$$

Угловая скорость вращения системы уменьшается.

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Пример 1. Тонкий стержень длиной L и массой m.

Распределение массы – с помощью линейной плотности массы: $\tau = \tau(l)$,

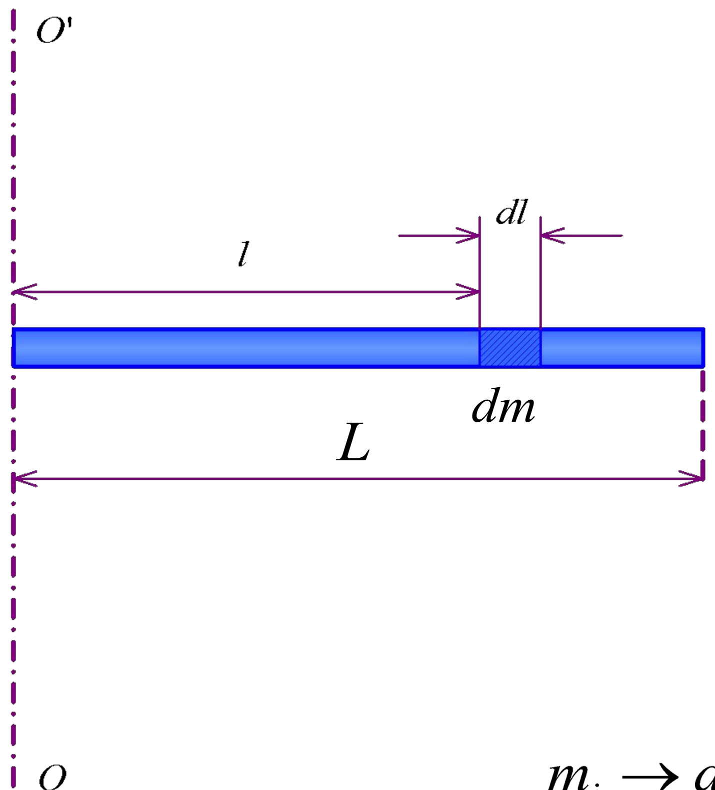

Рис. 4.7

$$\tau \equiv \frac{dm}{dl}. \qquad (4.82)$$

Однородность тонкого стержня означает, что для всех точек стержня (всех $l \in (0, L)$)

$$\tau = const. \qquad (4.83)$$

Найдем момент инерции стержня относительно оси ОО$^{/}$, перпендикулярной стержню и прохо – дящей через один из его концов (рис. 4.7).

$$I_i = m_i r_{i\perp}^2, \qquad I = \sum_i I_i. \qquad (4.84,\ 4.85)$$

$$m_i \to dm, \quad r_{i\perp} \to l, \quad I_i \to dI, \quad \sum_i I_i \to \int dI. \qquad (4.88)$$

$$I = \int dI = \int l^2 dm. \qquad (4.88)$$

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

$$I = \int dI = \int l^2 dm. \qquad (4.82) \qquad \Rightarrow \qquad dm = \tau\, dl. \qquad (4.89)$$

$$\tau = \frac{m}{L} = const, \qquad dm = \frac{m}{L} dl. \qquad (4.90,\ 4.91)$$

$$I = \int_0^L l^2 \frac{m}{L} dl, \qquad I = \frac{mL^2}{3} \qquad (4.92,\ 4.93)$$

Момент инерции стержня относительно оси , перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс:

$$I = \frac{mL^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = 2\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2,$$

$$I_0 = \frac{m\,L^2}{12} \qquad (4.112)$$

Пример 2.

Найдем момент инерции сплошного **однородного** цилиндра массы m и радиуса R относительно оси цилиндра.

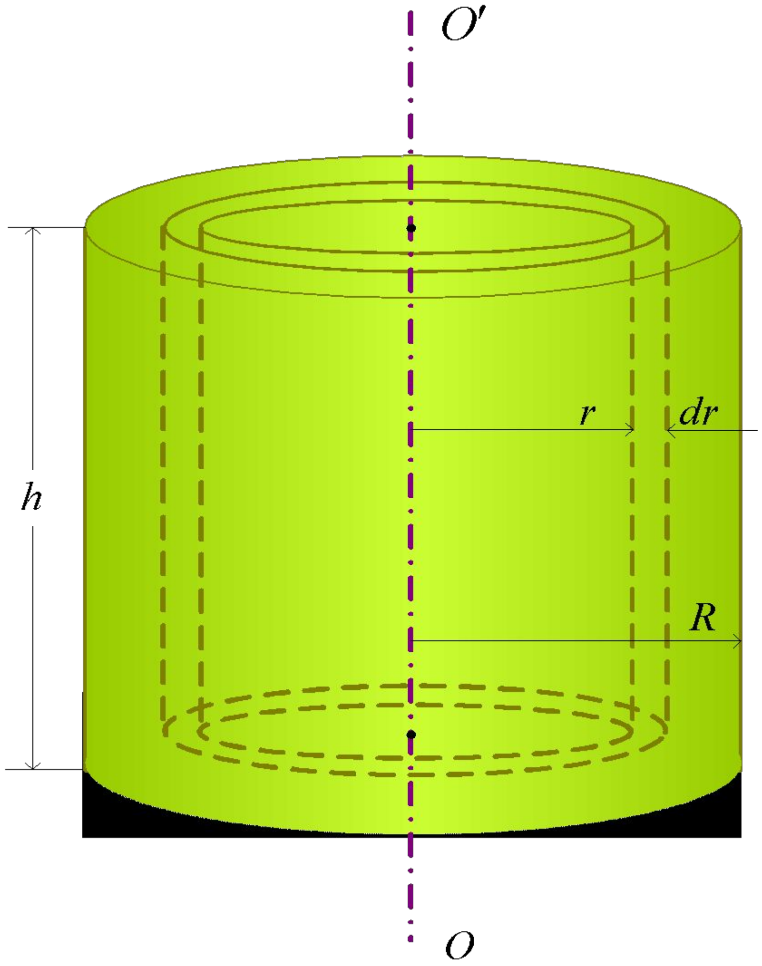

Рис. 4.8

Отметим: для тонкостенной трубы

$$I' = m' r^2. \qquad (4.95)$$

$$I' \to dI, \quad m' \to dm \quad \Rightarrow \quad dI = r^2 dm.$$

$$dm = \rho\, dV = \rho \cdot 2\pi\, r\, dr \cdot h, \qquad (4.98)$$

$$\rho = const = \frac{m}{\pi R^2 h} \quad \Rightarrow \qquad (4.94)$$

$$dm = \frac{2m}{R^2} r\, dr, \qquad dI = \frac{2m}{R^2} r^3\, dr,$$

$$I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3\, dr, \qquad I = \frac{mR^2}{2} \qquad (4.101)$$

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Теорема Штейнера:

$$I = I_0 + md^2 \qquad (4.102)$$

Для бесконечного множества параллельных осей вращения момент инерции тела минимален относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

$$I = \sum_i m_i r'^2_{i\perp}. \qquad (4.103)$$

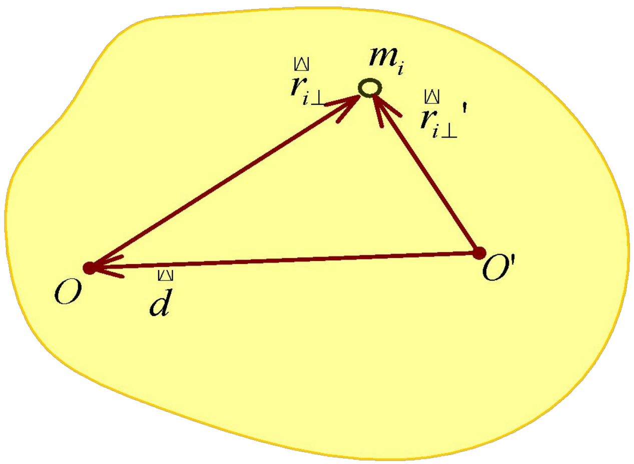

Рис. 4.9

$$\vec{r}'_{i\perp} = \vec{r}_{i\perp} + \vec{d}, \qquad r'^2_{i\perp} = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{d})^2 = r_{i\perp}^{\ 2} + 2\vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} + d^2,$$

$$I = \sum_i m_i r^2_{i\perp} + 2\sum_i m_i \vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} + \sum_i m_i d^2. \qquad (4.106)$$

$$\sum_i m_i r^2_{i\perp} = I_0 \qquad \sum_i m_i d^2 = md^2$$

$$\sum_i m_i \vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} = \left(\vec{d}, \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}\right). \qquad (4.107)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = 0, \qquad \vec{r}_{c\perp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}}{m} = 0 \qquad (4.108, 4.109)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Вращение тела:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_{i\perp} = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}], \qquad (4.113)$$

$$\upsilon_i^2 = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]^2 = \omega^2 r_{i\perp}^2, \qquad K \equiv \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}, \qquad (4.114,\ 4.115)$$

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \omega^2 r_{i\perp}^2 = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \cdot \frac{\omega^2}{2}, \qquad K = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (4.116,\ 4.117)$$

- **В общем случае** кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы

$$K = K_{\text{ïîñò}} + K_{\text{âð}} \qquad (4.118)$$

$$K_{\text{ïîñò}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2}, \qquad K_{\text{âð}} = \frac{I_0 \omega^2}{2}. \qquad (4.119,\ 4.120)$$

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2} \qquad (4.127)$$

Задание: Тонкий обруч массой m катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v_0. Найдите кинетическую энергию катящегося обруча.

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Работа при вращательном движении

Рассмотрим работу **внешней** силы $\vec{F}$, действующей на твердое тело, **вращающееся вокруг закрепленной оси.** Тело – набор материальных точек, и сила $\vec{F}$ оказывается приложенной к какой-то материальной точке. Элементарная работа силы $\vec{F}$, по определению,

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \tag{4.131}$$

Вращение тела:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\perp = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}_\perp\right]. \tag{4.132}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp, \qquad \delta A = \vec{F}_\parallel d\vec{r}_\perp + \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp. \qquad (4.133,\ 4.134)$$

$$\delta A = \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp = \vec{F}_\perp \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}_\perp\right], \qquad \delta A = \overrightarrow{d\varphi} \left[\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp\right] = \vec{M}_\parallel \overrightarrow{d\varphi}. \qquad (4.135,\ 4.136)$$

$$\overrightarrow{d\varphi} = \vec{k} d\varphi, \quad \vec{M}_\parallel = M_z \cdot \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \delta A = M_z d\varphi \qquad (4.137,\ 4.138)$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi)\, d\varphi \tag{4.139}$$

Здесь φ – угловая координата какой-либо **помеченной** материальной точки тела, φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значение координаты этой точки; момент M_z силы $\vec{F}$ относительно оси считается функцией φ .

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Пример 1. Найти работу силы тяжести над тонким однородным диском массой m и радиусом R при его движении до положения равновесия (оно показано на рис. 4.10). $\varphi_1 = 60^0$, $\varphi_2 = 0^0$.

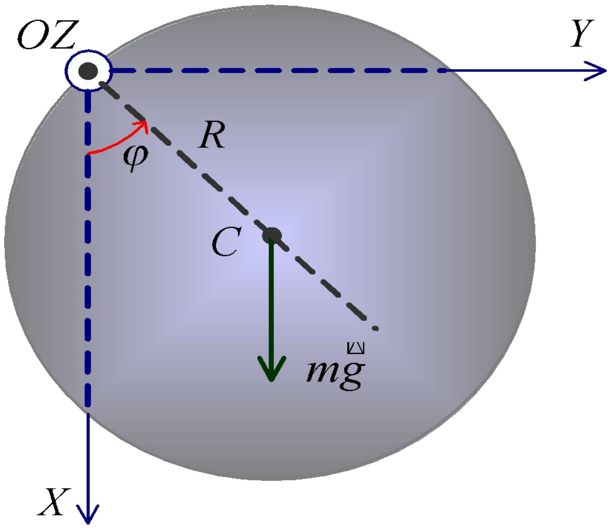

Рис. 4.11

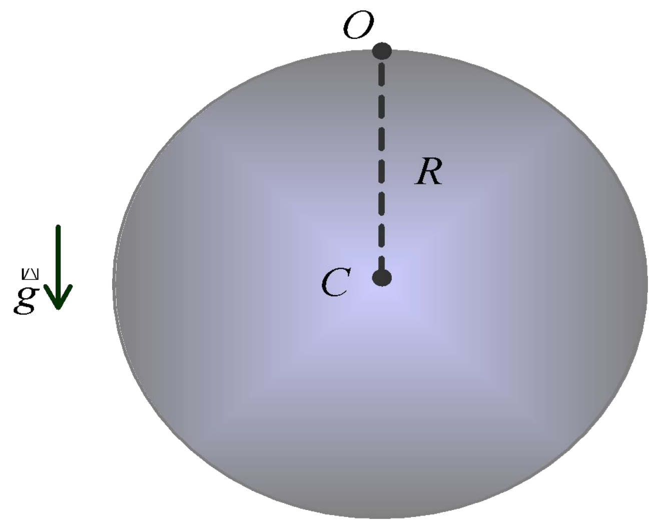

Рис. 4.10

$$M_z = M_z(\varphi) = -mgR\sin\varphi. \tag{4.140}$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi)\, d\varphi \qquad A = \int_{\pi/3}^{0} (-mgR\sin\varphi)\, d\varphi = \int_{0}^{\pi/3} mgR\sin\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2} mgR. \tag{4.141}$$

Пример 2. Вращающийся цилиндрический барабан радиуса R тормозят, прижимая к его боковой поверхности тормозную колодку. Найти работу силы трения при повороте барабана на угол $\Delta\varphi$. Считать величину силы трения известной и постоянной.

$$M_z = F_{\text{тр}} \cdot R. \qquad (4.142)$$

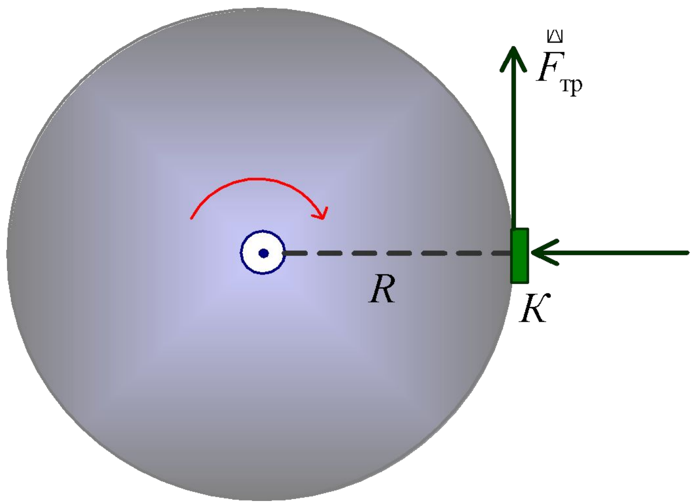

Рис. 4.12

Пометим ту материальную точку барабана, которая находится в контакте с тормозной колодкой в начальный момент времени и положим

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi)\, d\varphi$$

$$A_{\text{тр}} = \int_0^{-\Delta\varphi} F_{\text{тр}} \cdot R\, d\varphi = -F_{\text{тр}} \cdot R\Delta\varphi. \qquad (4.143)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Теорема о кинетической энергии.

$$dK = \delta A_{\Sigma}\,, \qquad \delta A_{\Sigma} = \delta A^{(in)} + \delta A^{(ex)}, \qquad (4.144,\ 4.145)$$

$$\delta A^{(in)} = M_z^{(in)} d\varphi\,, \qquad \delta A^{(ex)} = M_z^{(ex)} d\varphi\,. \qquad (4.146)$$

$$\vec{M}^{(in)} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_z^{(in)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\delta A^{(in)} = 0\,, \qquad A^{(in)} = 0\,. \qquad (4.147)$$

$$\Rightarrow \qquad dK = M_z^{(ex)} d\varphi \qquad (4.148)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta K = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^{(ex)} d\varphi \qquad (4.149)$$

4.6. Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.

Поступат. движение	$d\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}$	x	υ_x	a_x	m	$\vec{p}$	$\vec{F}$	p_x	F_x
Вращат. движение	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z	I	$\vec{L}$	$\vec{M}$	L_z	M_z

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ex)}, \tag{4.150}$$

$$\vec{P} \to \vec{L}, \ \vec{F}^{(ex)} \to \vec{M}^{(ex)}:$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)}. \tag{4.151}$$

4.7. Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

- **Гироскоп – это быстровращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять свое направление в пространстве.**

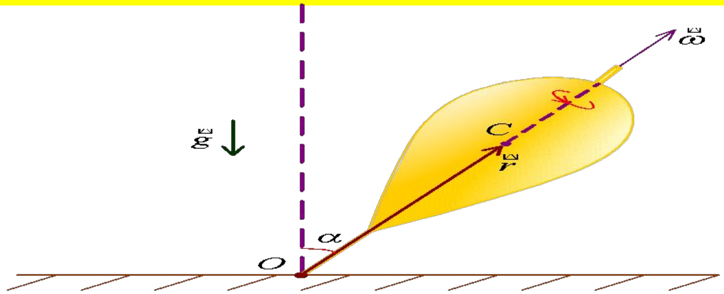

Рис. 4.13

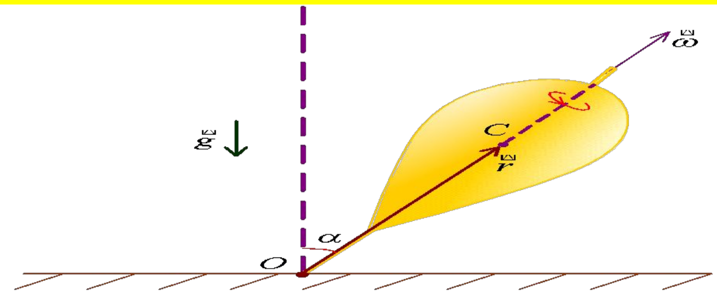

Рис. 4.13

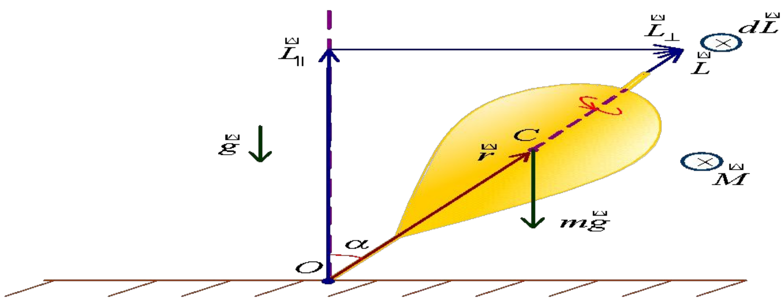

Рис. 4.14

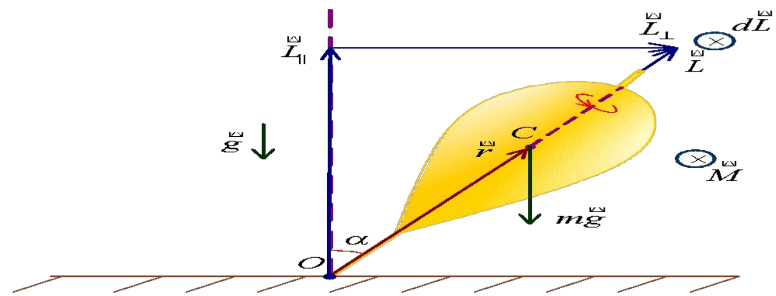

Рис. 4.14

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}], \quad d\vec{L} = \vec{M}\,dt,$$

$$d\vec{L} = d\vec{L}_{\perp}, \quad d\vec{L}_{\parallel} = 0, \quad d\vec{L}_{\perp} \perp \vec{L}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{\parallel} = const, \quad |\vec{L}_{\perp}| \equiv L_{\perp} = const$$

4.7 Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

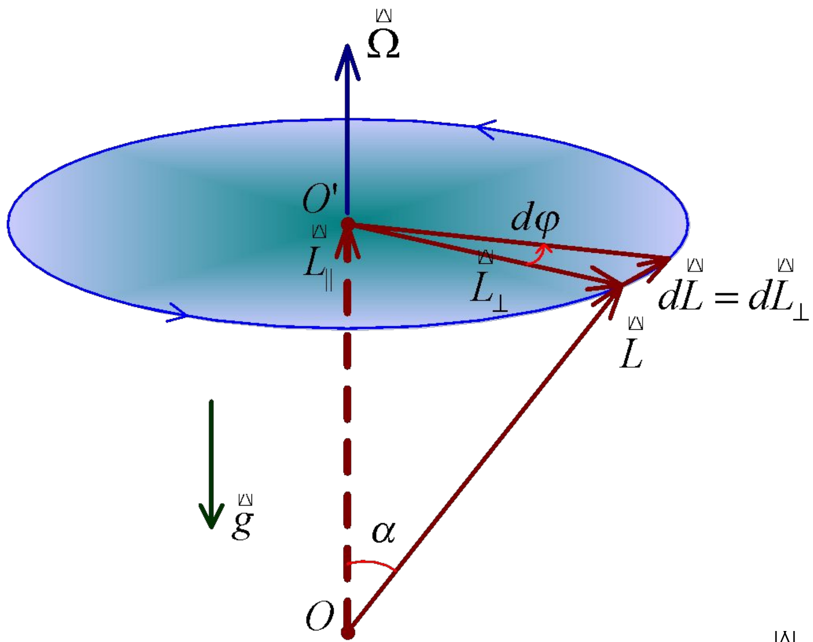

Рис. 4.15

$$\Omega = \frac{|d\varphi|}{dt},$$

$$|d\varphi| = \frac{|d\vec{L}_{\perp}|}{L_{\perp}} = \frac{|\vec{M}|dt}{L_{\perp}},$$

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{L_{\perp}},$$

$$|\vec{M}| = m\,g\,r\sin\alpha, \qquad L_{\perp} = L\sin\alpha,$$

$$\Omega = \frac{mgr}{L} \qquad \Omega = \frac{mgr}{I\omega}.$$

Отметим, что Ω **не зависит от угла** α **между осью гироскопа и вертикалью.**

Гироскоп. Физическая энциклопедия. Т.1 // М: Советская энциклопедия, 1988. С.484.