

Лекция №4

Основы динамики вращательного движения.

План лекции.

- 4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.
- 4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.
- 4.3. Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.
- 4.4. Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.
- 4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.
- 4.6. Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.
- 4.7. Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.

Определения.

- Моментом импульса материальной точки относительно точки **O** (начала **O**) называется величина

$$\overset{\boxminus}{l} \equiv [\overset{\boxminus}{r}, \overset{\boxminus}{p}]. \quad (4.1)$$

- Моментом силы $\overset{\boxminus}{F}$ относительно точки **O** (начала **O**) называется величина

$$\overset{\boxminus}{M} \equiv [\overset{\boxminus}{r}, \overset{\boxminus}{F}]. \quad (4.2)$$

$$\overset{\boxminus}{F} = \sum_k \overset{\boxminus}{F}_k \quad \longrightarrow \quad \overset{\boxminus}{M} = \sum_k \overset{\boxminus}{M}_k, \quad \overset{\boxminus}{M}_k = [\overset{\boxminus}{r}, \overset{\boxminus}{F}_k]. \quad (4.3 - 4.5)$$

$$(4.1) \quad \longrightarrow \quad \frac{d\overset{\boxminus}{l}}{dt} = \left[\frac{d\overset{\boxminus}{r}}{dt}, \overset{\boxminus}{p} \right] + \left[\overset{\boxminus}{r}, \frac{d\overset{\boxminus}{p}}{dt} \right]. \quad (4.6)$$

$$\frac{d\overset{\boxminus}{p}}{dt} = \overset{\boxminus}{F} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\overset{\boxminus}{l}}{dt} = \overset{\boxminus}{M} \quad (4.7)$$

(4.7) – уравнение вращательного движения материальной точки.

4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.

Определение.

- Моментом импульса механической системы относительно точки O (начала O) называется величина

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{l}_i. \quad (4.8)$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i. \quad (4.9)$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{(ex)} + \vec{M}^{(in)}, \quad \vec{M}^{(in)} = 0 \quad (4.10, 4.11)$$

$$\vec{F}_{i,k} + \vec{F}_{k,i} = 0, \quad \vec{M}_{i,k} \equiv [\vec{r}_i, \vec{F}_{i,k}] = [\vec{r}_\perp, \vec{F}_{i,k}],$$

$$\vec{M}_{k,i} \equiv [\vec{r}_k, \vec{F}_{k,i}] = [\vec{r}_\perp, \vec{F}_{k,i}]. \quad (4.12, 4.13)$$

$$\vec{M}_{i,k} + \vec{M}_{k,i} = 0 \quad (4.14)$$

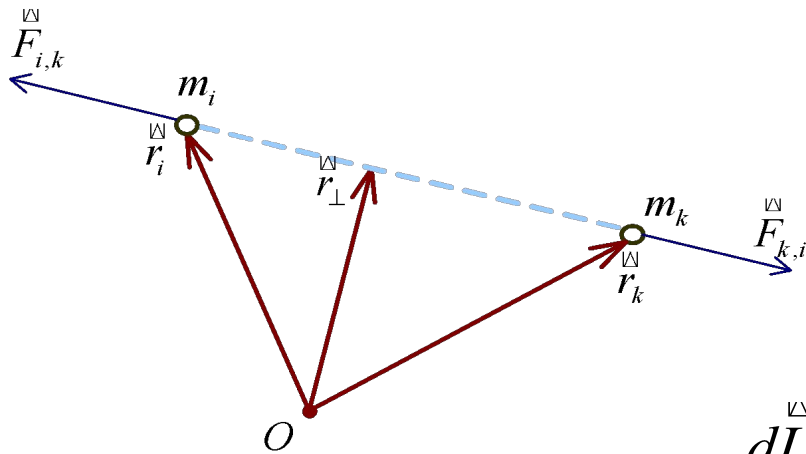


Рис. 4.1

Уравнение вращательного движения механической системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \quad (4.15, 4.16)$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

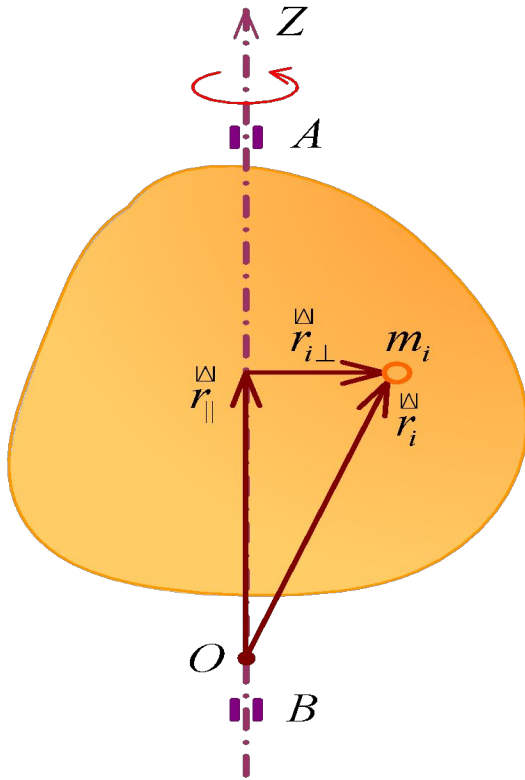


Рис. 4.2

Моменты импульса:

$$\overset{\omega}{r}_i = \overset{\omega}{r}_{i||} + \overset{\omega}{r}_{i\perp}, \quad \overset{\omega}{v}_i = [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}], \quad \overset{\omega}{p}_i = m_i [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}]. \quad (4.17 - 4.19)$$

$$\overset{\omega}{l}_i = m_i [r_{i||} [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}]] + m_i [r_{i\perp} [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}]]. \quad (4.20)$$

$$[a [b, c]] = b(a, c) - c(a, b):$$

$$[r_{i||} [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}]] = \overset{\omega}{\omega} (r_{i||}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}) - \overset{\omega}{r}_{i\perp} (r_{i||}, \overset{\omega}{\omega}) = -\overset{\omega}{r}_{i\perp} (r_{i||}, \overset{\omega}{\omega}), \quad (4.21)$$

$$[r_{i\perp} [\overset{\omega}{\omega}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}]] = \overset{\omega}{\omega} (r_{i\perp}, \overset{\omega}{r}_{i\perp}) - \overset{\omega}{r}_{i\perp} (r_{i\perp}, \overset{\omega}{\omega}) = r_{i\perp}^2 \overset{\omega}{\omega}.$$

$$\overset{\omega}{l}_i = \overset{\omega}{l}_{i||} + \overset{\omega}{l}_{i\perp}, \quad \overset{\omega}{l}_{i||} = m_i r_{i\perp}^2 \overset{\omega}{\omega} \quad (4.23, 4.24)$$

$$\overset{\omega}{L} = \overset{\omega}{L}_{||} + \overset{\omega}{L}_{\perp}, \quad \overset{\omega}{L}_{||} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \overset{\omega}{\omega} \quad (4.25, 4.26)$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\overset{\boxtimes}{L}_{\parallel} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \overset{\boxtimes}{\omega}$$

Момент инерции тела относительно оси:

$$I \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad (4.27)$$

$$\overset{\boxtimes}{L}_{\parallel} = I \overset{\boxtimes}{\omega}, \quad L_z = I \omega_z. \quad (4.28, 4.29)$$

- Величина L_z – момент импульса тела относительно OZ.

Главное: если нас интересует вращение тела относительно данной оси, то достаточно использовать величины $\overset{\boxtimes}{L}_{\parallel}$ или L_z , величина же L_{\perp} для нас не представляет интереса.

Моменты сил.

$$\overset{\boxtimes}{F} = \overset{\boxtimes}{F}_{\parallel} + \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}. \quad (4.33)$$

$$\overset{\boxtimes}{M} \equiv [\overset{\boxtimes}{r}, \overset{\boxtimes}{F}] = [\overset{\boxtimes}{r}_{\parallel} + \overset{\boxtimes}{r}_{\perp}, \overset{\boxtimes}{F}_{\parallel} + \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}] = [\overset{\boxtimes}{r}_{\parallel}, \overset{\boxtimes}{F}_{\parallel}] + [\overset{\boxtimes}{r}_{\perp}, \overset{\boxtimes}{F}_{\parallel}] + [\overset{\boxtimes}{r}_{\parallel}, \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}] + [\overset{\boxtimes}{r}_{\perp}, \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}]. \quad (4.34)$$

$$\overset{\boxtimes}{M} = \overset{\boxtimes}{M}_{\parallel} + \overset{\boxtimes}{M}_{\perp}, \quad \overset{\boxtimes}{M}_{\parallel} = [\overset{\boxtimes}{r}_{\perp}, \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}] \quad \overset{\boxtimes}{M}_{\perp} = [\overset{\boxtimes}{r}_{\perp}, \overset{\boxtimes}{F}_{\parallel}] + [\overset{\boxtimes}{r}_{\parallel}, \overset{\boxtimes}{F}_{\perp}]. \quad (4.35, 4.36)$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

Моменты сил.

$$M_z = \left(\left[\overset{\boxtimes}{r}_\perp, \overset{\boxtimes}{F}_\perp \right] \right)_z. \quad (4.41)$$

Подчеркнем, что момент (импульса, силы) относительно оси (OZ) равен проекции вектора момента (импульса, силы) на эту ось при условии, что начало O лежит на оси.

$$|M_z| = F_\perp \cdot d, \quad (4.42)$$

$$M_z(\square) < 0, \quad M_z(\square) > 0. \quad (4.43)$$

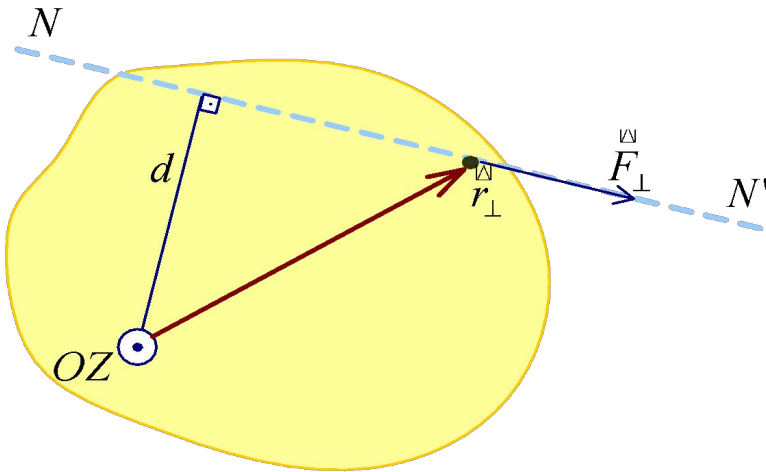


Рис. 4.3

Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\frac{d\overset{\boxtimes}{L}}{dt} = \overset{\boxtimes}{M}^{(ex)} \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}$$

$$\overset{\boxtimes}{L} \rightarrow \overset{\boxtimes}{L}_\parallel, \quad \overset{\boxtimes}{M}^{(ex)} \rightarrow \overset{\boxtimes}{M}_\parallel^{(ex)}:$$

$$\frac{d\overset{\boxtimes}{L}_\parallel}{dt} = \overset{\boxtimes}{M}_\parallel^{(ex)} \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}$$

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью... Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

$$\frac{dL_{\parallel}}{dt} = M_{\parallel}^{(ex)} \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \quad L_{\parallel} = I\omega, \quad L_z = I\omega_z, \quad (4.28, 4.29)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt}, \quad \longrightarrow \quad I\varepsilon = M_{\parallel}^{(ex)} \quad I\varepsilon_z = M_z^{(ex)} \quad (4.44, 4.46)$$

4.3. Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

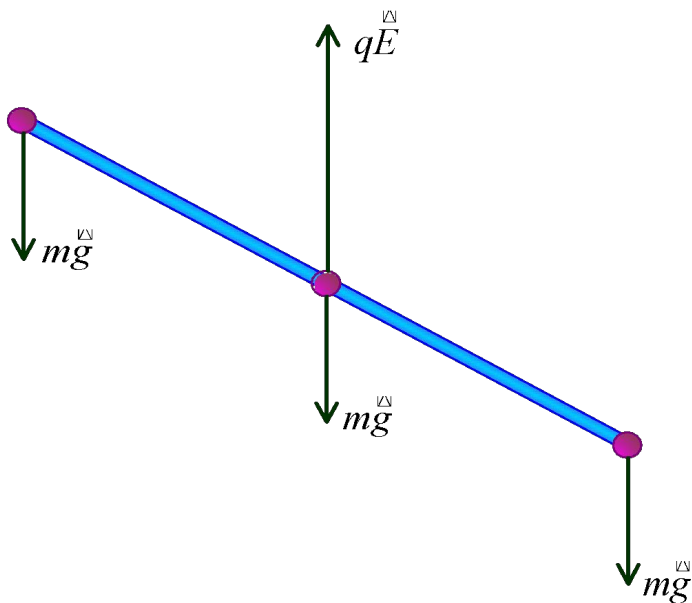


Рис. 4.5

$$\frac{dL}{dt} = M^{(ex)} \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)} \quad (4.15, 4.16)$$

$$M^{(ex)} = 0 \Rightarrow L = const : \quad (4.49)$$

если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется.

$$F^{(ex)} = 3mg + qE = 0, \quad M^{(ex)} = 0.$$

4.3. Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Традиционная формулировка :

- **момент импульса замкнутой системы сохраняется.**

При некотором специальном выборе начала O возможно

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad M_F = \left[\vec{r}, f(r) \frac{\vec{r}}{r} \right] = 0, \quad (4.59, 4.60)$$

- **в центральном силовом поле момент импульса материальной точки относительно силового центра сохраняется.**



Второй закон Кеплера

Закон сохранения момента импульса относительно оси:

$$M_z^{(ex)} = 0 \Rightarrow L_z = const : \quad (4.64)$$

- **если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.**

4.3... Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Скамья Жуковского – круглая горизонтальная платформа, которая может вращаться практически без трения вокруг вертикальной оси.

Пример. Человек располагается на вращающейся скамье Жуковского в ее центре в положении “руки по швам”. Система человек-скамья вращается с некоторой угловой скоростью ω_1 . Как изменится угловая скорость вращения системы, если человек разведет руки в стороны?

$$I_1 = I_c + I_{m1}, \quad I_2 = I_c + I_{m2}. \quad (4.72, 4.73)$$

$$I_{m2} > I_{m1} \quad \longrightarrow \quad I_2 > I_1, \quad (4.74, 4.75)$$

-- при разведении рук в стороны увеличивается момент инерции системы относительно оси.

$$M_z^{(ex)} = 0 \Rightarrow L_z = const \Rightarrow I_1 \omega_{1z} = I_2 \omega_{2z}. \quad (4.77)$$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (I_c + I_{m1}) \omega_1 = (I_c + I_{m2}) \omega_2 \quad (4.78, 4.79)$$

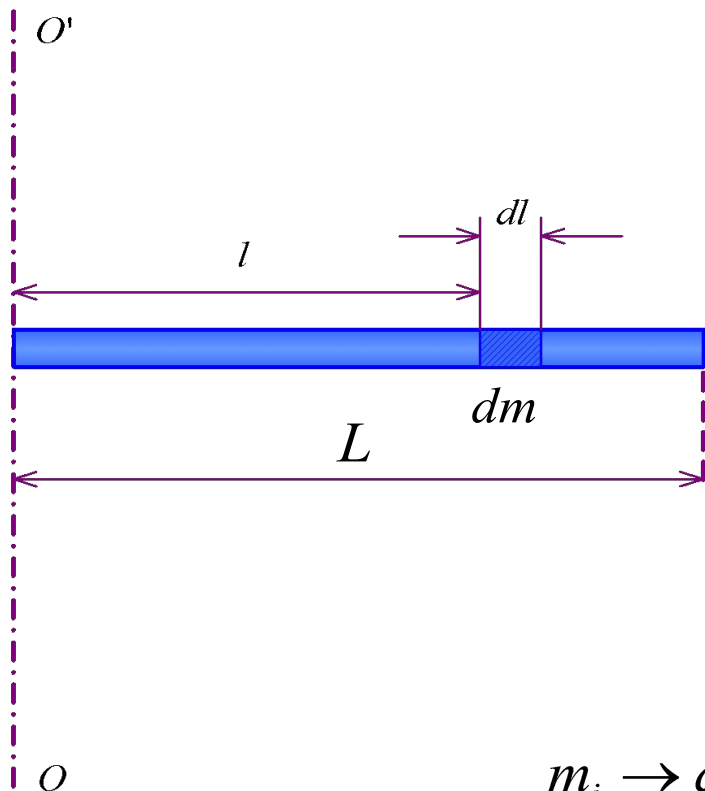
$$\longrightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{(I_c + I_{m1})}{(I_c + I_{m2})} \omega_1. \quad (4.80)$$

Угловая скорость вращения системы уменьшается.

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Пример 1. Тонкий стержень длиной L и массой m .

Распределение массы – с помощью линейной плотности массы: $\tau = \tau(l)$,



$$\tau \equiv \frac{dm}{dl}. \quad (4.82)$$

Однородность тонкого стержня означает, что для всех точек стержня (всех $l \in (0, L)$)

$$\tau = const. \quad (4.83)$$

Найдем момент инерции стержня относительно оси OO' , перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов (рис. 4.7).

$$I_i = m_i r_{i\perp}^2, \quad I = \sum_i I_i. \quad (4.84, 4.85)$$

$$m_i \rightarrow dm, \quad r_{i\perp} \rightarrow l, \quad I_i \rightarrow dI, \quad \sum_i I_i \rightarrow \int dI. \quad (4.88)$$

$$I = \int dI = \int l^2 dm. \quad (4.88)$$

Рис. 4.7

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

$$I = \int dI = \int l^2 dm. \quad (4.82) \quad \longrightarrow \quad dm = \tau dl. \quad (4.89)$$

$$\tau = \frac{m}{L} = \text{const}, \quad dm = \frac{m}{L} dl. \quad (4.90, 4.91)$$

$$I = \int_0^L l^2 \frac{m}{L} dl, \quad I = \frac{mL^2}{3} \quad (4.92, 4.93)$$

Момент инерции стержня относительно оси , перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс:

$$I = \frac{mL^2}{3} \quad \longrightarrow \quad I_0 = 2 \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2,$$

$$I_0 = \frac{mL^2}{12} \quad (4.112)$$

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Пример 2.

Найдем момент инерции сплошного однородного цилиндра массы m и радиуса R относительно оси цилиндра.

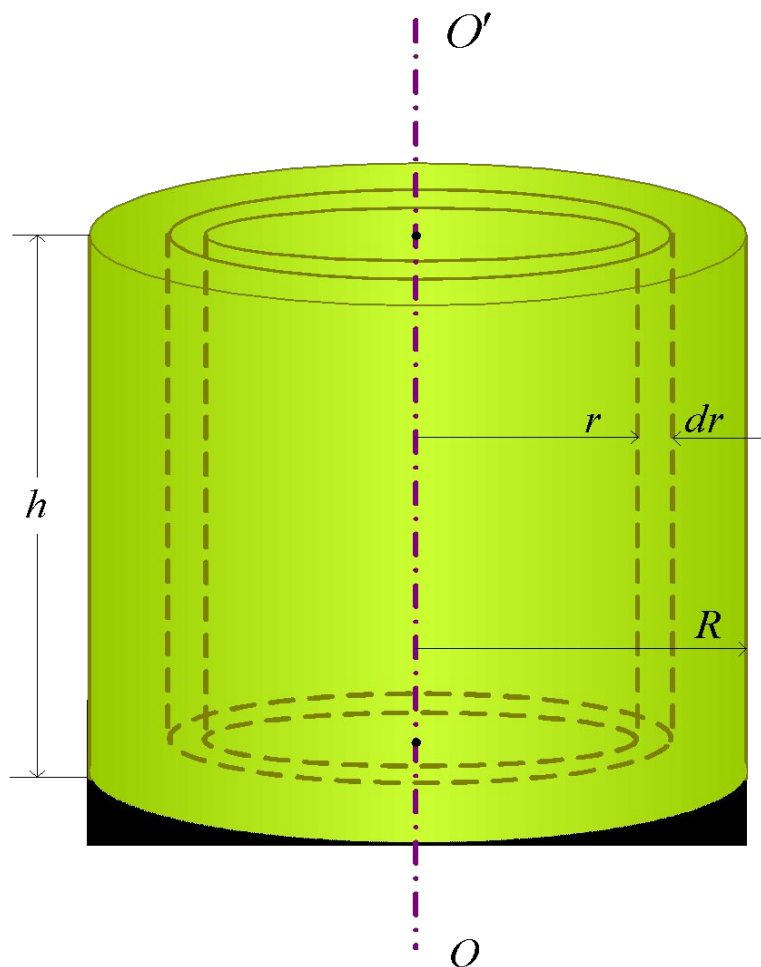


Рис. 4.8

Отметим: для тонкостенной трубы

$$I' = m' r^2. \quad (4.95)$$

$$I' \rightarrow dI, \quad m' \rightarrow dm \quad \longrightarrow \quad dI = r^2 dm.$$

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot h, \quad (4.98)$$

$$\rho = \text{const} = \frac{m}{\pi R^2 h} \quad \longrightarrow \quad (4.94)$$

$$dm = \frac{2m}{R^2} r dr, \quad dI = \frac{2m}{R^2} r^3 dr,$$

$$I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr, \quad I = \frac{mR^2}{2} \quad (4.101)$$

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Теорема Штейнера:

$$I = I_0 + md^2 \quad (4.102)$$



Для бесконечного множества параллельных осей вращения момент инерции тела минимален относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

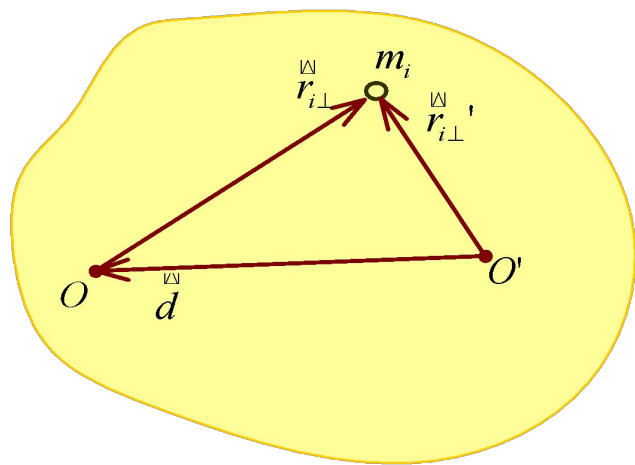


Рис. 4.9

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}'^2. \quad (4.103)$$

$$r_{i\perp}' = r_{i\perp} + \vec{d}, \quad r_{i\perp}'^2 = (r_{i\perp} + \vec{d})^2 = r_{i\perp}^2 + 2\vec{d} \cdot r_{i\perp} + d^2,$$

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 + 2 \sum_i m_i \vec{d} \cdot r_{i\perp} + \sum_i m_i d^2. \quad (4.106)$$

$$\sum_i m_i r_{i\perp}^2 = I_0 \quad \sum_i m_i d^2 = md^2$$

$$\sum_i m_i \vec{d} \cdot r_{i\perp} = \left(\vec{d}, \sum_i m_i r_{i\perp} \right). \quad (4.107)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = 0, \quad \vec{r}_{c\perp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}}{m} = 0 \quad (4.108, 4.109)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Вращение тела:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i\perp} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{i\perp}], \quad (4.113)$$

$$v_i^2 = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{i\perp}]^2 = \omega^2 r_{i\perp}^2, \quad K \equiv \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (4.114, 4.115)$$

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \omega^2 r_{i\perp}^2 = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad K = \frac{I \omega^2}{2} \quad (4.116, 4.117)$$

- **В общем случае** кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы

$$K = K_{\text{ц.д.}} + K_{\text{в.д.}} \quad (4.118)$$

$$K_{\text{ц.д.}} = \frac{m v_c^2}{2}, \quad K_{\text{в.д.}} = \frac{I_0 \omega^2}{2}. \quad (4.119, 4.120)$$

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2} \quad (4.127)$$

Задание:

Тонкий обруч массой m катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v_0 . Найдите кинетическую энергию катящегося обруча.

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Работа при вращательном движении

Рассмотрим работу **внешней** силы \vec{F} , действующей на твердое тело, **вращающееся вокруг закрепленной оси**. Тело – набор материальных точек, и сила \vec{F} оказывается приложенной к какой-то материальной точке. Элементарная работа силы \vec{F} , по определению,

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \quad (4.131)$$

Вращение тела:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\perp = [d\vec{\varphi}, \vec{r}_\perp]. \quad (4.132)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp, \quad \delta A = \vec{F}_\parallel d\vec{r}_\perp + \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp. \quad (4.133, 4.134)$$

$$\delta A = \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp = \vec{F}_\perp [d\vec{\varphi}, \vec{r}_\perp], \quad \delta A = d\vec{\varphi} [\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp] = M_\parallel d\vec{\varphi}. \quad (4.135, 4.136)$$

$$\vec{d\varphi} = k d\varphi, \quad M_\parallel = M_z \cdot k \quad \longrightarrow \quad \delta A = M_z d\varphi \quad (4.137, 4.138)$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi \quad (4.139)$$

Здесь φ – угловая координата какой-либо **помеченной** материальной точки тела, φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значение координаты этой точки; момент M_z силы \vec{F} относительно оси считается функцией φ .

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Пример 1.

Найти работу силы тяжести над тонким однородным диском массой m и радиусом R при его движении до положения равновесия (оно показано на рис. 4.10). $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 0^\circ$.

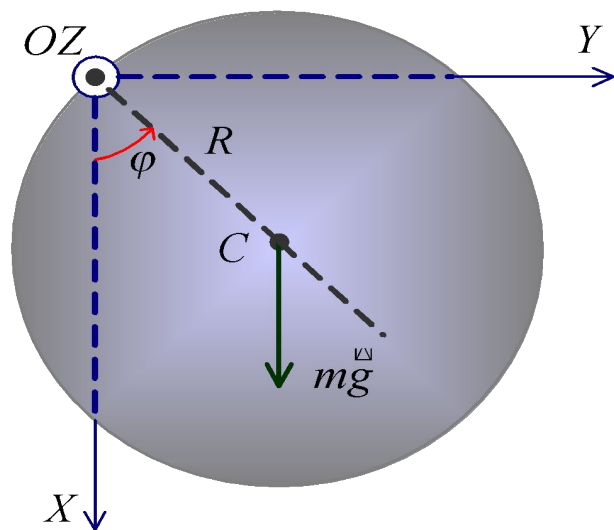


Рис. 4.11

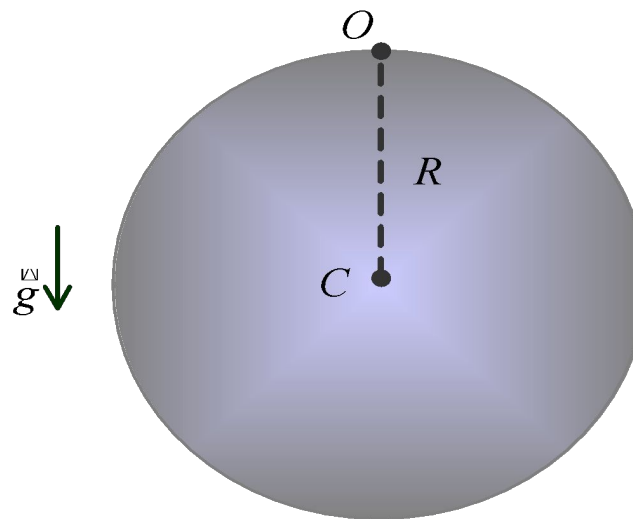


Рис. 4.10

$$M_z = M_z(\varphi) = -mgR \sin \varphi. \quad (4.140)$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi = \int_{\pi/3}^0 (-mgR \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/3} mgR \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} mgR. \quad (4.141)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Пример 2.

Вращающийся цилиндрический барабан радиуса R тормозят, прижимая к его боковой поверхности тормозную колодку. Найти работу силы трения при повороте барабана на угол $\Delta\varphi$. Считать величину силы трения известной и постоянной.

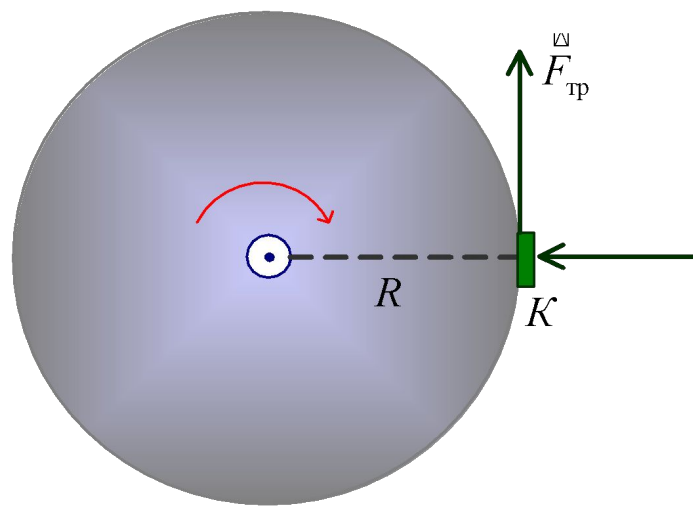


Рис. 4.12

$$M_z = F_{\text{тр}} \cdot R. \quad (4.142)$$

Пометим ту материальную точку барабана, которая находится в контакте с тормозной колодкой в начальный момент времени и положим

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi \quad \longrightarrow$$

$$A_{\text{тр}} = \int_0^{-\Delta\varphi} F_{\text{тр}} \cdot R d\varphi = -F_{\text{тр}} \cdot R \Delta\varphi. \quad (4.143)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

Теорема о кинетической энергии.

$$dK = \delta A_{\Sigma}, \quad \delta A_{\Sigma} = \delta A^{(in)} + \delta A^{(ex)}, \quad (4.144, 4.145)$$

$$\delta A^{(in)} = M_z^{(in)} d\varphi, \quad \delta A^{(ex)} = M_z^{(ex)} d\varphi. \quad (4.146)$$

$$M_z^{(in)} = 0 \quad \longrightarrow \quad M_z^{(in)} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\delta A^{(in)} = 0, \quad A^{(in)} = 0. \quad (4.147)$$

$$\longrightarrow \quad dK = M_z^{(ex)} d\varphi \quad (4.148)$$

$$\longrightarrow \quad \Delta K = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^{(ex)} d\varphi \quad (4.149)$$

4.6. Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.

Поступат. движение	\overline{dr}	\overline{v}	\overline{a}	x	v_x	a_x	m	\overline{p}	\overline{F}	p_x	F_x
Вращат. движение	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z	I	\overline{L}	\overline{M}	L_z	M_z

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F}^{(ex)}, \quad (4.150)$$

$$\overline{P} \rightarrow \overline{L}, \quad \overline{F}^{(ex)} \rightarrow \overline{M}^{(ex)}:$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{M}^{(ex)}. \quad (4.151)$$

4.7. Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

- Гироскоп – это быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять свое направление в пространстве.

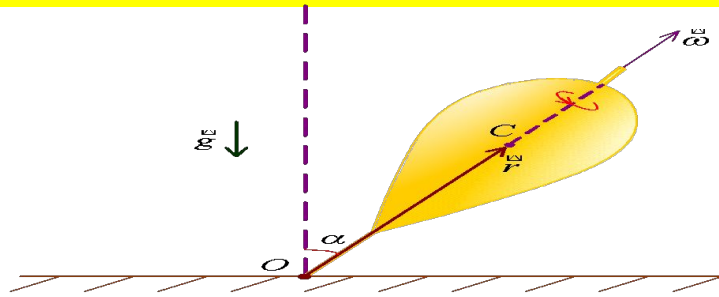


Рис. 4.13

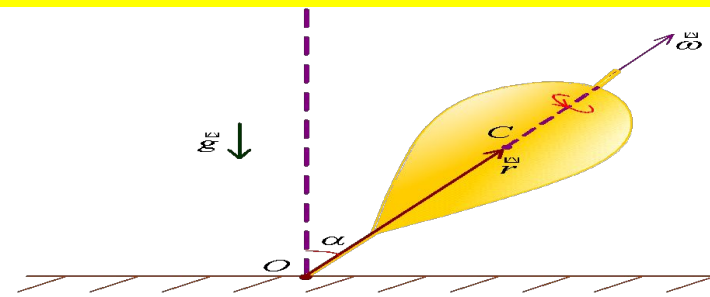


Рис. 4.13

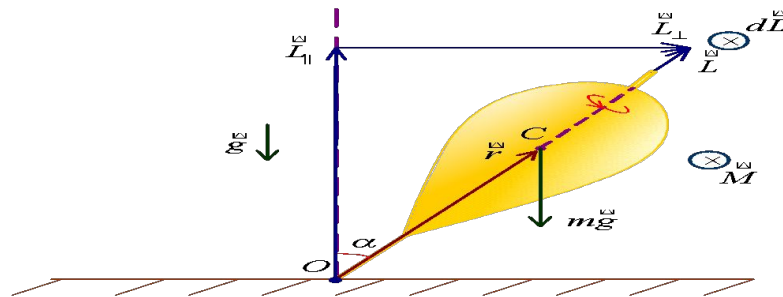


Рис. 4.14

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}], \quad d\vec{L} = \vec{M} dt,$$

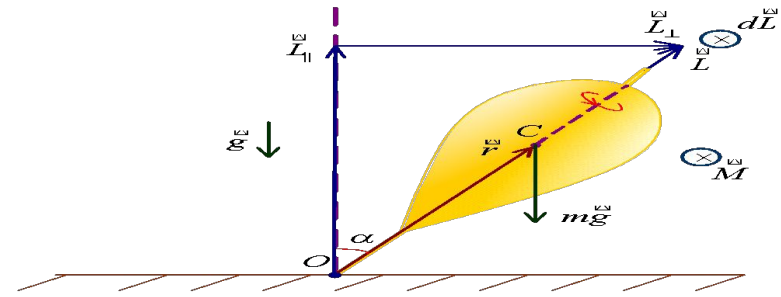


Рис. 4.14

$$d\vec{L} = d\vec{L}_{\perp}, \quad dL_{\parallel} = 0, \quad d\vec{L}_{\perp} \perp \vec{L}_{\perp}$$



$$L_{\parallel} = const, \quad |\vec{L}_{\perp}| \equiv L_{\perp} = const$$

4.7 Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

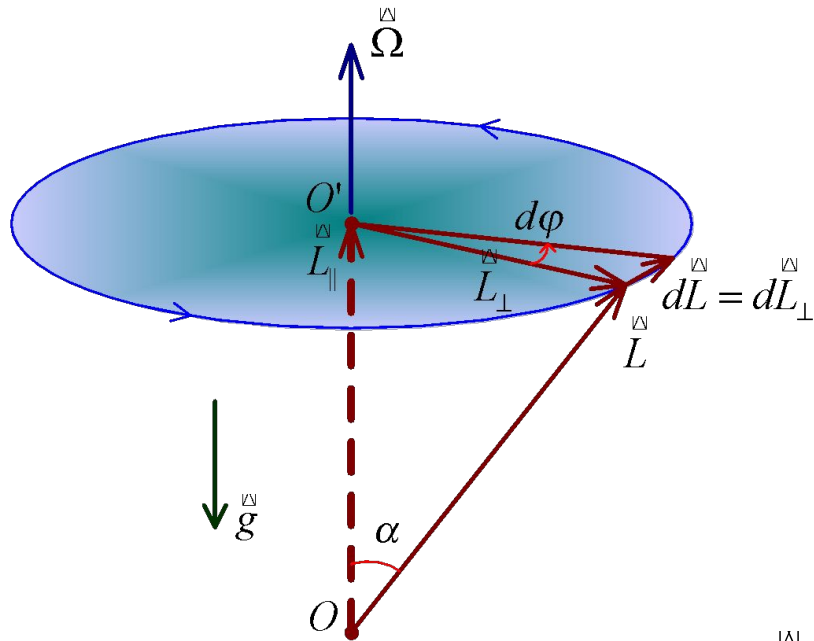


Рис. 4.15

$$\Omega = \frac{|d\varphi|}{dt},$$

$$|d\varphi| = \frac{|dL_{\perp}|}{L_{\perp}} = \frac{|M|dt}{L_{\perp}},$$

$$\Omega = \frac{|M|}{L_{\perp}},$$

$$|M| = m g r \sin \alpha, \quad L_{\perp} = L \sin \alpha,$$

$$\Omega = \frac{mgr}{L}$$

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega}.$$

Отметим, что Ω не зависит от угла α между осью гироскопа и вертикалью.

Гироскоп. Физическая энциклопедия. Т.1 // М: Советская энциклопедия, 1988. С.484.