Основы теории множеств-4

Бинарные отношения и их свойства

Отношение - частный случай соответствия, когда область прибытия совпадает с областью отправления:

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{A \times A = A^2}$ называется ***квадратом*** множества **А.**

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$$

Формы задания отношений

<u>Пример</u>: Пусть $A = \{ a, b, c, d \}$

1 форма - как множества:

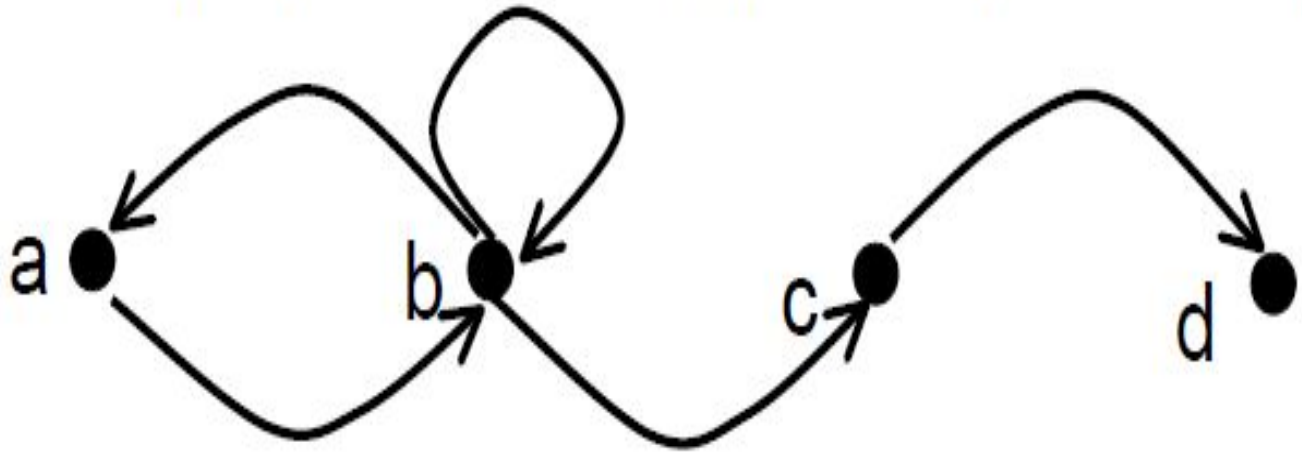
$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

2 форма –

с помощью *матрицы смежности*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

3 форма – с помощью графа



$< A, R >$

Свойства отношений

Пусть дано $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Тот факт, что $< a, b > \in R$ будем обозначать также как **a R b**

1. Рефлексивность

Для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ верно, что **x R x**

Все элементы лежащие на главной диагонали матрицы смежности равны **1**.

Определим ***диагональное отношение*** как $\boldsymbol{\delta} = \{ < a, a > \mid a \in A \}$.

Например, диагональным отношением будет: **δ = { < a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d > }**.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Отношение обладает свойством рефлексивности, если верно, что **δ ⊆ R**

2. Антирефлексивность

Из **x R y** следует, что **x ≠ y**

$$\mathbf{R \cap \delta = \varnothing}$$

3. Симметричность

Из **x R y** следует, что **y R x**

Матрица смежности симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а при задании отношения в виде графа следствием симметричности является наличие между всякой парой вершин, находящихся в отношении ***R***, двух противоположно направленных дуг.

Отношение ***R*** симметрично, если и только если

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$$

4. Асимметричность

Из $< x, y > \in R$ следует, что $< y, x > \notin R$

В соответствующем графе нет петель и не может быть случая, когда две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами.

Если отношение асимметрично, то оно антирефлексивно.

Отношение R асимметрично, если и только если

$$R \cap R^{-1} = \varnothing$$

5. Антисимметричность

Из $\langle x, y \rangle \in R$ следует, что $\langle y, x \rangle \notin R$

Из $\langle x, y \rangle \in R$ и $\langle y, x \rangle \in R$ следует, что $x = y$

Отношение ***R*** антисимметрично, если и только если

$$R \cap R^{-1} \subseteq \delta$$

6. Транзитивность

$x, y, z \in A$

Из $< x, y> \in R$ и $< y, z> \in R$ следует, что $< x, z> \in R$

Отношение R транзитивно, если и только если $R \circ R \subseteq R$.

Равенство достигается, если транзитивное отношение ещё и рефлексивно.

Транзитивное замыкание

Пусть дано отношение $\mathbf{R \subseteq A \times A}$. Тогда его ***транзитивным замыканием*** будет отношение

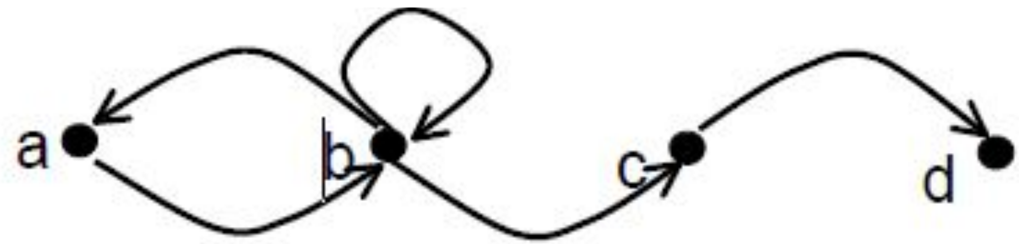
$\mathbf{R\text{^}} \subseteq \mathbf{A \times A}$ минимальное по числу элементов (пар) и такое, что оно обладает свойством транзитивности и $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R\text{^}}$.

$\mathbf{\langle x, y\rangle \in R\text{^}}$ если существует цепочка элементов из A $\mathbf{x = z_0, z_1, \ldots z_n = y}$ такая, что $\mathbf{z_0\, R\, z_1, z_1\, R\, z_2, \ldots z_{n-1}\, R\, z_n}$

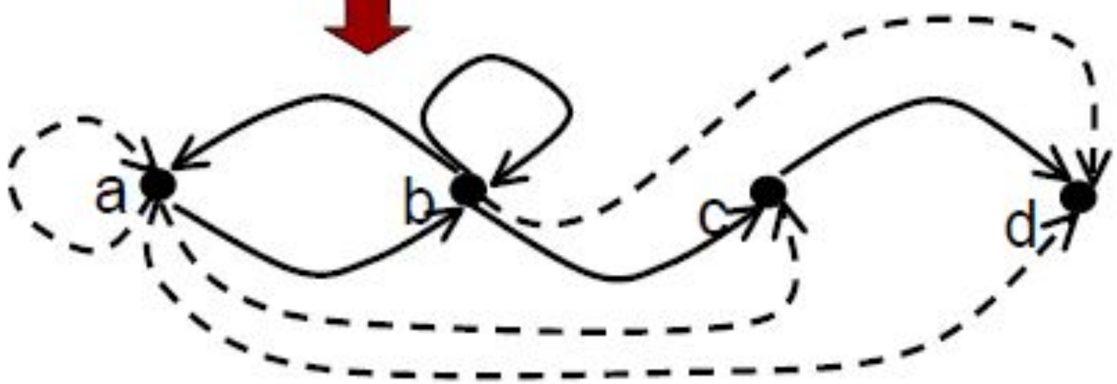
Если $\mathbf{R}$ транзитивно, то $\mathbf{R = R\text{^}}$.

Алгоритм нахождения транзитивного замыкания

Пример:



$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$



$$R\hat{} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle$$
$$\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle \}$$

Содержательно транзитивное замыкание определяется всеми путями, существующими в графе (начальная и конечная вершины пути определяют соответствующую пару).

R - есть все пути длиной 1 (из 1-й дуги),

$R_2 = R \circ R$ - есть все пути длиной 2 (из 2-х дуг),

$R_3 = R \circ R \circ R$ - есть все пути длиной 3 (из 3-х дуг),

… и т.д.

R^ = R1 U R2 U R3 U … U Rn U …

Вычисление транзитивного замыкания заданного отношения

R^* есть текущее множество (отношение)

В начале вычисления имеем

$R^*_1 = R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$

$R^2 = R \circ R =$

$\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle\}$

$R^*_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \langle a, a \rangle,$
$\langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle\}$

$R^3 = R \circ R \circ R = \{< a, a >, < a, c >, < a, b >, < a, d >,$

$< b, c >, < b, b >, < b, a >, < b, d >\}$

$R^*_3 = \; < a, b >, < b, a >, < b, c >, < c, d > < a, a >,$

$< a, c >, < b, b >, < b, d >, < a, d >\}$

$R^*_4 = R^*_3$,

т. е. выполнено условие останова

Текущее множество (представлено в виде графа) есть решение задачи.