

Основы теории множеств-4

Бинарные отношения и их свойства

Отношение - частный случай соответствия, когда область прибытия совпадает с областью отправления:

$$R \subseteq A \times A$$

$A \times A = A^2$ называется **квадратом** множества A .

$$R \subseteq A^2$$

Формы задания отношений

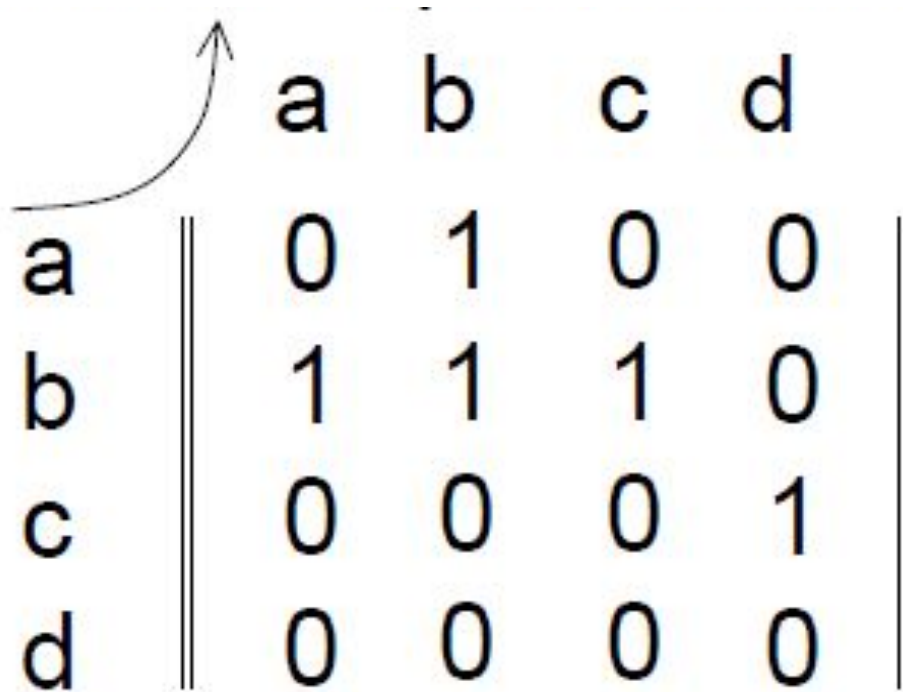
Пример: Пусть $A = \{ a, b, c, d \}$

1 форма - как множества:

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \\ \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \\ \langle c, d \rangle \}$$

2 форма –

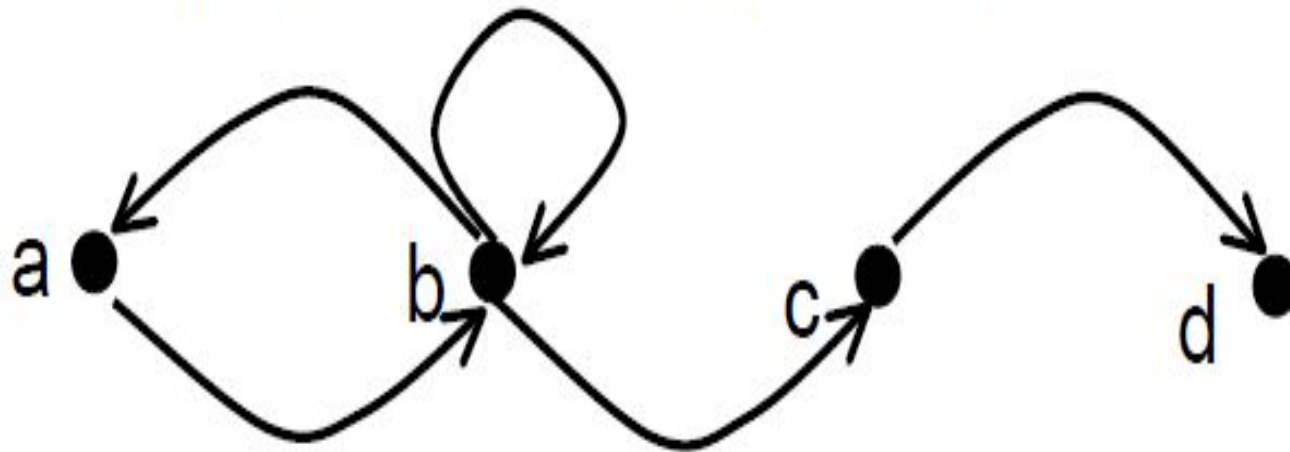
С ПОМОЩЬЮ *матрицы смежности*



The diagram shows an adjacency matrix for a graph with four nodes: a, b, c, and d. The matrix is a 4x4 grid of numbers (0 or 1) enclosed in double vertical lines. The columns are labeled 'a', 'b', 'c', and 'd' at the top. The rows are labeled 'a', 'b', 'c', and 'd' on the left. A curved arrow starts from the top-left corner of the matrix and points towards the top-right corner, indicating the direction of the edges in the graph.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 0 |
| b | 1 | 1 | 1 | 0 |
| c | 0 | 0 | 0 | 1 |
| d | 0 | 0 | 0 | 0 |

3 форма – с помощью **графа**



$\langle A, R \rangle$

Свойства отношений

Пусть дано $R \subseteq A \times A$.

Тот факт, что $\langle a, b \rangle \in R$ будем обозначать также как $a R b$

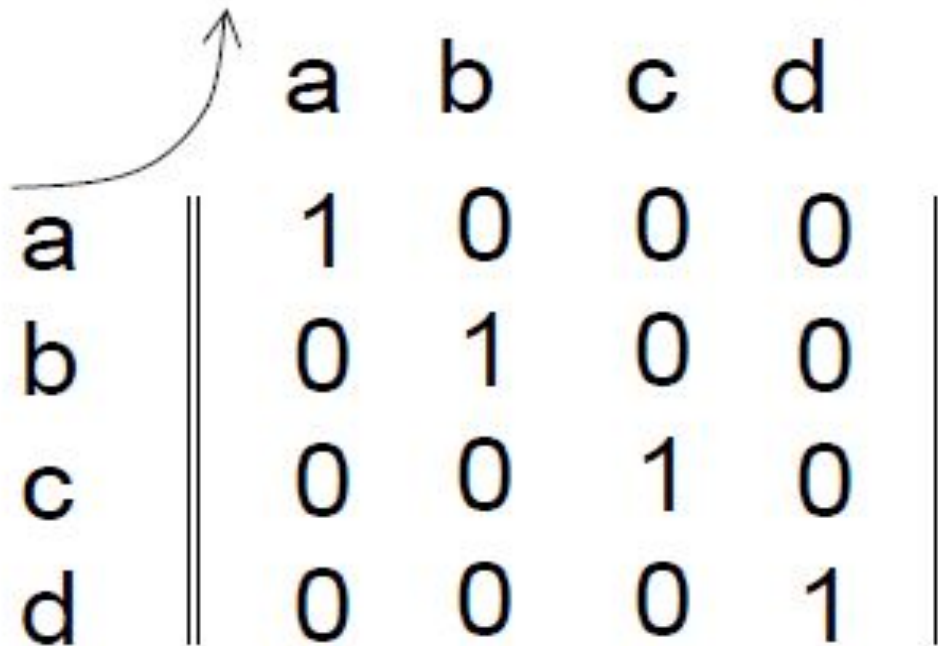
1. Рефлексивность

Для всех $x \in A$ верно, что $x R x$

Все элементы лежащие на главной диагонали матрицы смежности равны 1.

Определим **диагональное отношение** как $\delta = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$.

Например, диагональным отношением
будет: $\delta = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle \}$.



| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | 0 |
| c | 0 | 0 | 1 | 0 |
| d | 0 | 0 | 0 | 1 |

Отношение обладает свойством
рефлексивности, если верно, что $\delta \subseteq R$

2. Антирефлексивность

Из $x R y$ следует, что $x \neq y$

$$R \cap \delta = \emptyset$$

3. Симметричность

Из $x R y$ следует, что $y R x$

Матрица смежности симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а при задании отношения в виде графа следствием симметричности является наличие между всякой парой вершин, находящихся в отношении R , двух противоположно направленных дуг.

Отношение R симметрично, если и только если

$$R = R^{-1}$$

4. Асимметричность

Из $\langle x, y \rangle \in R$ следует, что $\langle y, x \rangle \notin R$

В соответствующем графе нет петель и не может быть случая, когда две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами.

Если отношение асимметрично, то оно антирефлексивно.

Отношение R асимметрично, если и только если

$$R \cap R^{-1} = \emptyset$$

5. Антисимметричность

Из $\langle x, y \rangle \in R$ следует, что $\langle y, x \rangle \notin R$

Из $\langle x, y \rangle \in R$ и $\langle y, x \rangle \in R$ следует,
что $x = y$

Отношение R антисимметрично, если
и только если

$$R \cap R^{-1} \subseteq \delta$$

6. Транзитивность

$$x, y, z \in A$$

Из $\langle x, y \rangle \in R$ и $\langle y, z \rangle \in R$ следует,

$$\text{что } \langle x, z \rangle \in R$$

Отношение R транзитивно, если и только если $R \circ R \subseteq R$.

Равенство достигается, если транзитивное отношение ещё и рефлексивно.

Транзитивное

замыкание

Пусть дано отношение $R \subseteq A \times A$. Тогда его **транзитивным замыканием** будет отношение

$R^\wedge \subseteq A \times A$ минимальное по числу элементов (пар) и такое, что оно обладает свойством транзитивности и $R \subseteq R^\wedge$.

$\langle x, y \rangle \in R^\wedge$ если существует цепочка элементов из A $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ такая, что $z_0 R z_1, z_1 R z_2, \dots, z_{n-1} R z_n$

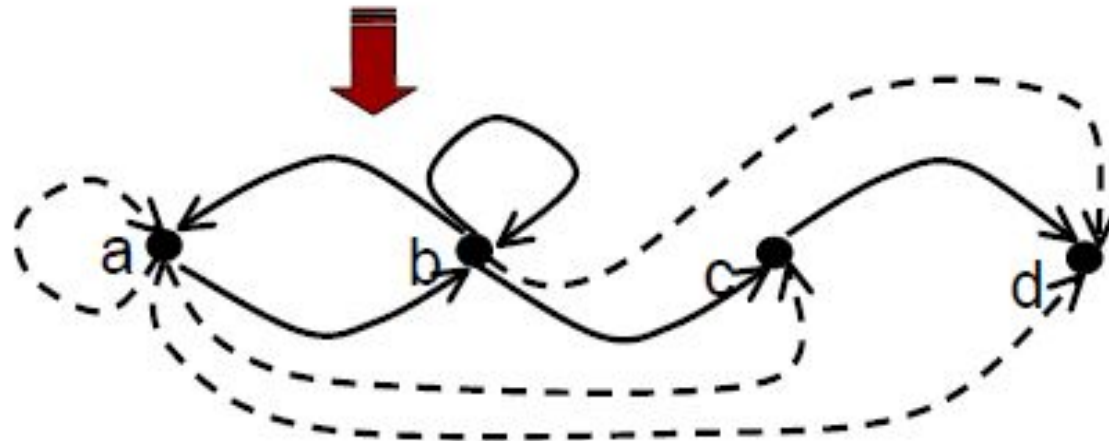
Если R транзитивно, то $R = R^\wedge$.

Алгоритм нахождения транзитивного замыкания

Пример:



$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$



$$R^{\wedge} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \\ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle \}$$

Содержательно транзитивное замыкание определяется всеми путями, существующими в графе (начальная и конечная вершины пути определяют соответствующую пару).

R - есть все пути длиной 1 (из 1-й дуги),

$R_2 = R \circ R$ - есть все пути длиной 2 (из 2-х дуг),

$R_3 = R \circ R \circ R$ - есть все пути длиной 3 (из 3-х дуг),

... и т.д.

$R^\wedge = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_n \cup \dots$

Вычисление транзитивного замыкания заданного отношения

R^* есть текущее множество (отношение)

В начале вычисления имеем

$$**R^*_1 = R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}**$$

$$**R^2 = R \circ R =**$$

$$**\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle \}**$$

$$**R^*_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle \}**$$

$$R^3 = R \circ R \circ R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$R^*_3 = \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle \}$$

$$R^*_4 = R^*_3,$$

т. е. выполнено условие останова

Текущее множество (представлено в виде графа) есть решение задачи.

