

Решения волнового уравнения

Единое волновое уравнение для плоских волн различной природы, распространяющихся вдоль оси x можно записать как:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.31)$$

где φ - изменяющаяся по волновым законам величина (переменная плотность, давление или колебательная скорость для звуковой волны, переменное ЭМ поле и т.д.), а c - скорость распространения соответствующей волны в среде.

В сферических координатах, когда волны распространяются симметрично в радиальном направлении (r - радиус),

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.32)$$

Если в (2.32) подставить $\varphi = f(r, t)/r$, то для $f(r, t)$ получим уравнение (2.31), то есть решение для сферически симметричной волны отличается только убыванием амплитуды по закону $1/r$.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.31)$$

Будем искать решение волнового уравнения (2.31) в виде

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot f(x). \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.31) и исключив экспоненциальный множитель, получим уравнение для $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \quad (2.34)$$

Это уравнение имеет решение $f_0 e^{ikx}$ и $f_0 e^{-ikx}$, описывает пространственную структуру волнового поля. Здесь $k^2 = \omega^2 / c^2$ называется волновым числом, ω - круговая или циклическая частота волны, f_0 - амплитуда волны.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.31)$$

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot f(x). \quad (2.33)$$

Таким образом, с учетом (2.33), решение уравнения (2.31) представляется в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi(x, t) = f_0 e^{i(\omega t - kx)} + f_0 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (2.35)$$

Аналогично, используя подстановку $\varphi(r, t) = f(r, t) e^{i\omega t}$ можно решать и трехмерные волновые уравнения (2.8), (2.10.8). В этом случае получим трехмерное уравнение для волнового поля

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad (2.36)$$

Это уравнение носит название уравнения Гельмгольца.

Поглощение и дисперсия

При выводе волнового уравнения для ЭМ поля проводимость среды предполагалась равной нулю. С учетом проводимости уравнение для электромагнитных волн имеет вид:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.37)$$

Уравнение для акустических волн с учетом вязкости записывается как:

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{U} = 0, \quad (2.38)$$

где $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$ - диссипативный коэффициент.

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.37)$$

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{U} = 0, \quad (2.38)$$

В обоих уравнениях (2.37, 2.38) к волновому уравнению добавляется слагаемое с первой производной по времени. Поэтому, подстановка $\mathbf{E}, \mathbf{U} = f(r, t)e^{i\omega t}$ приводит (2.37, 2.38) к уравнению Гельмгольца с комплексным волновым числом :

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad ; \quad k = k_r + i\delta, \quad (2.39)$$

при этом

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \quad \text{для электромагнитных волн,} \quad (2.40)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{b\omega}{c^2 \rho} \right)^{-1} ; \quad k \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{b\omega}{2c^2 \rho} \right) \quad \text{для звуковых волн.} \quad (2.41)$$

С учетом теплопроводности уточненное значение

$$b = \xi + \frac{4}{3} \eta + \chi \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right),$$

где χ - коэффициент теплопроводности.

$$\varphi(x, t) = f_0 e^{j(\omega t - kx)} + f_0 e^{j(\omega t + kx)} . \quad (2.35)$$

Использование комплексного значения k в решении (2.35) приводит к появлению действительного множителя $e^{-\delta x}$, который отвечает за экспоненциальное пространственное затухание волнового поля. Таким образом, мнимая часть комплексного волнового числа имеет физический смысл декремента затухания, и окончательное выражение для плоской волны, распространяющейся в направлении x , принимает в действительных величинах вид

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{-\delta x} \cos(\omega t \pm kx + \psi_0) , \quad (2.42)$$

где ψ_0 - начальная фаза волны. Зависимость волнового числа от частоты волны $k = k(\omega)$ называется дисперсионным соотношением, а среды, в которых эта зависимость носит нелинейный характер – диспергирующими.