ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ R, L, C И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

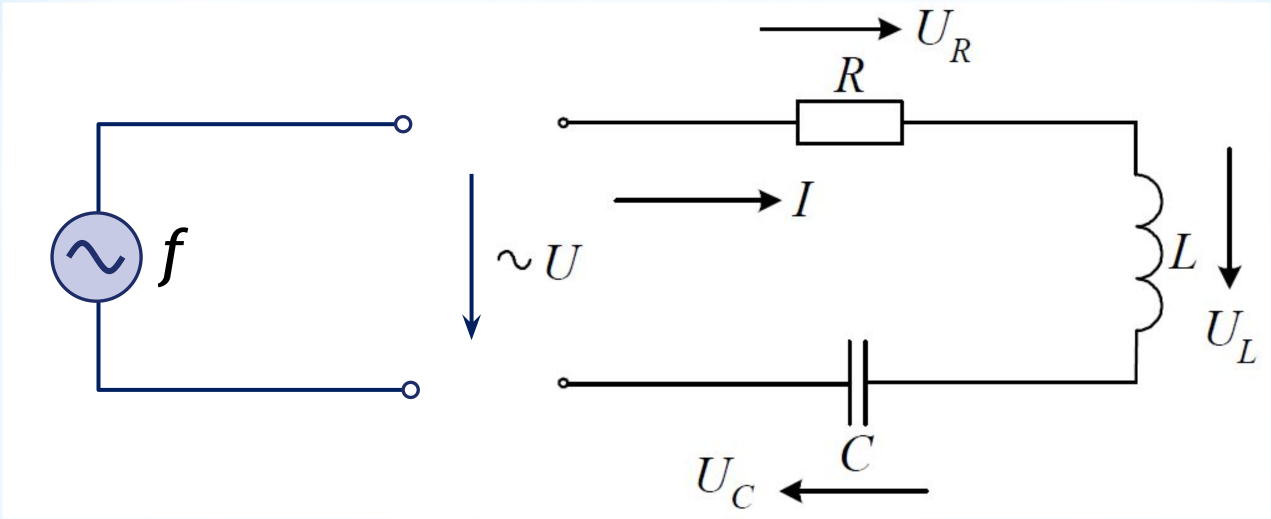
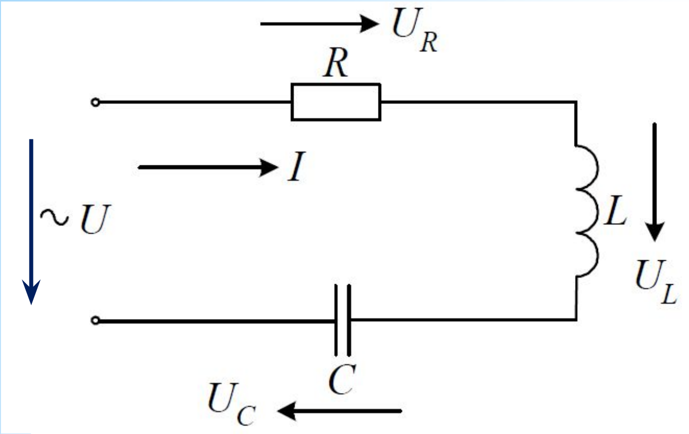


Рис. 4.1

Дана последовательная цепь из *R*, *L* и *C* (рис. 4.1). Цепь такого вида часто называют ***последовательным колебательным контуром***.

В этой цепи заданы: приложенное напряжение *U* , частота *f* и числовые значения (номиналы) элементов *R*, *L*, *C*.

Требуется найти ток и напряжение на элементах. Решение этой задачи выполним на основе построения векторной диаграммы.



В последовательной цепи общим для всех элементов является протекающий по ним ток. Поэтому именно с него начинаем построение векторной диаграммы последовательной электрической цепи.

На рис. 4.2 изображаем вектор тока, например, горизонтально, хотя его направление можно выбирать произвольно. Далее строятся векторы напряжений на всех элементах.

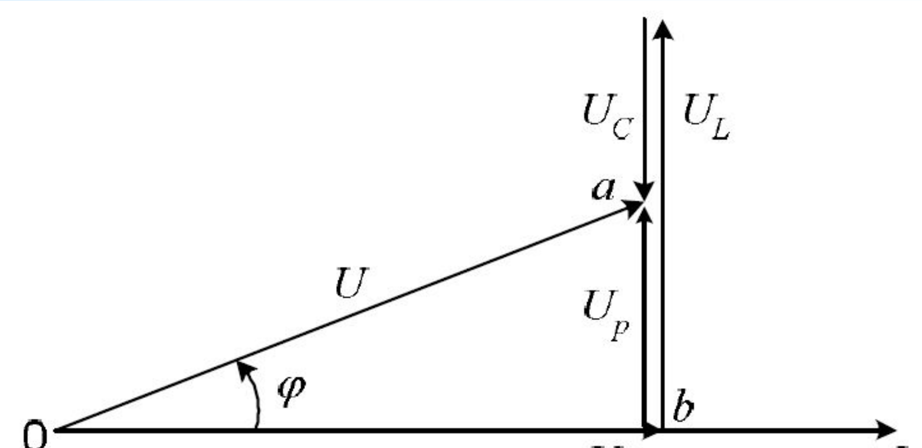


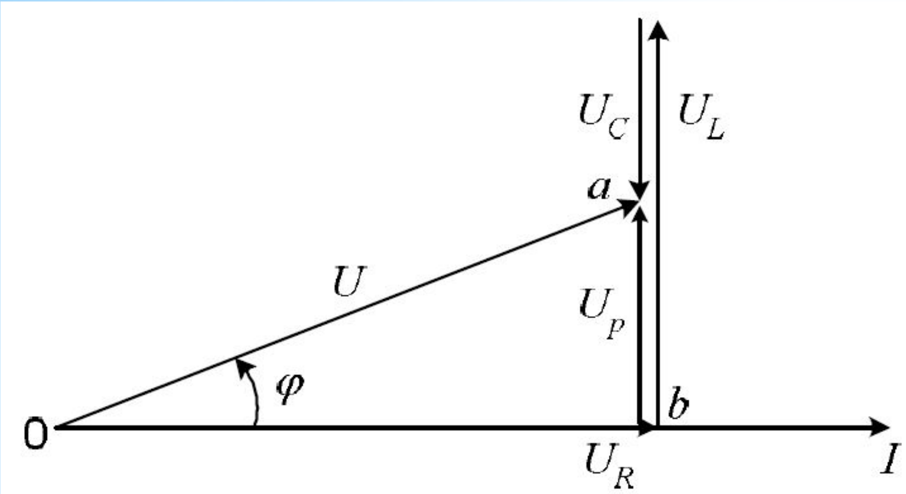
Рис. 4.2

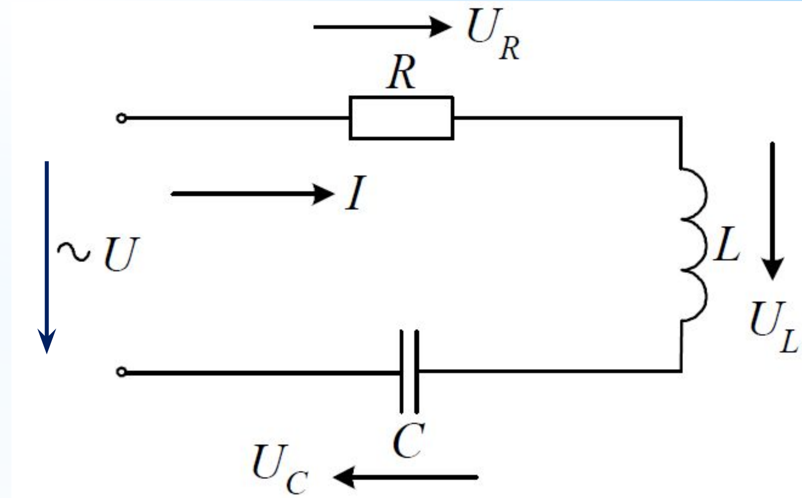
В соответствии со вторым законом Кирхгофа можно записать вектор входного напряжения:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C .$$

Сложение векторов удобнее выполнять по правилу многоугольника, когда каждый последующий вектор пристраивается к концу предыдущего.

Полученная диаграмма называется топографической векторной диаграммой.



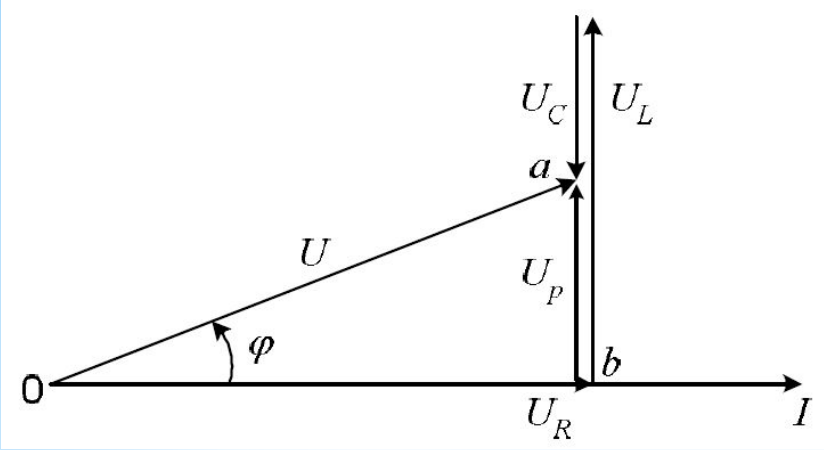


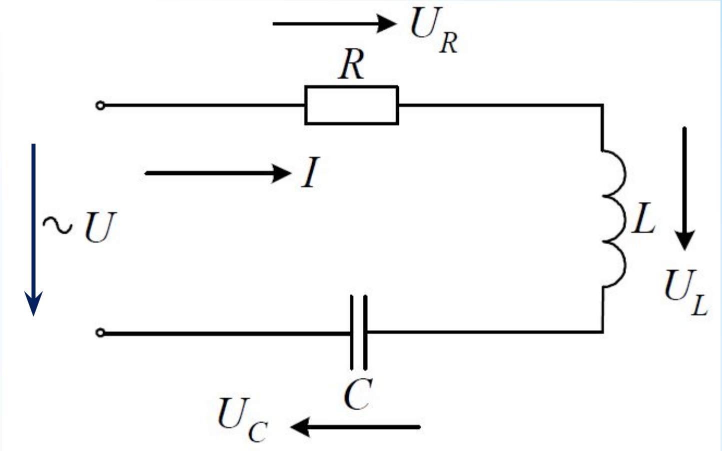
Известно, что напряжение на активном сопротивлении *R* совпадает по фазе с током, поэтому вектор U_R направлен по вектору тока *I*.

К концу вектора U_R пристраиваем вектор U_L и направляем его вверх под углом 90°, так как напряжение на индуктивности U_L опережает ток на 90°.

Напряжение на ёмкости U_C находится в противофазе с U_L , т. е. отстаёт от тока на 90°, поэтому вектор U_C , пристроенный к концу вектора U_L, направлен вниз.

Сумма векторов $U_R + U_L + U_C$ даёт вектор напряжения *U*.





Величины напряжений на отдельных элементах цепи известны, согласно закону Ома:

$$U_R = I\,R\,,\; U_L = I\,X_L\,,\; U_C = I\,X_C\,.$$

По теореме Пифагора, из треугольника *oab* находим:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(I\,R)^2 + (I\,X_L - I\,X_C)^2} = I\,Z\,,$$

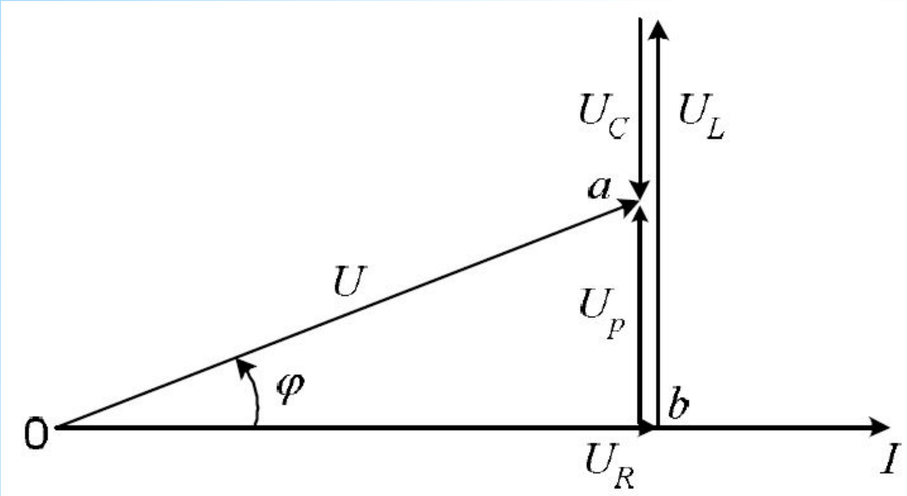
где *Z* – полное сопротивление цепи,

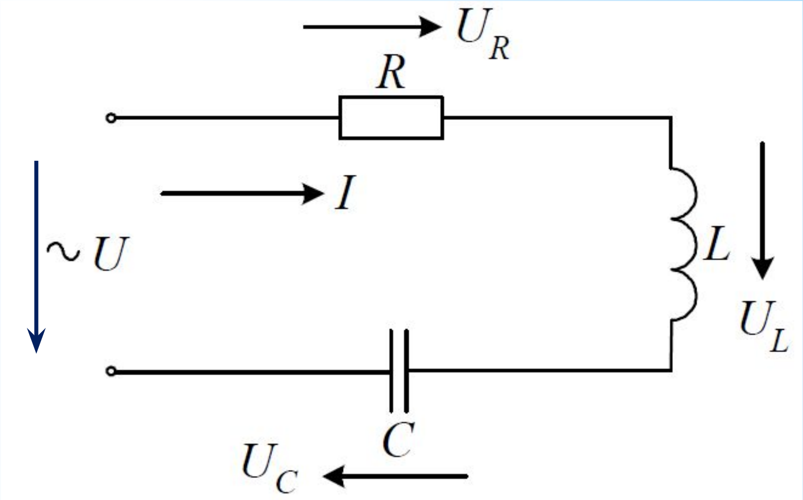
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}\,;$$

X – общее реактивное сопротивление, $X = X_L - X_C\,.$

Угол сдвига фаз между напряжением U и током I также определяется из треугольника *oab:*

$$\varphi = arctg\frac{ab}{ob} = arctg\frac{U_L - U_C}{U_R} = arctg\frac{X_L - X_C}{R} = arctg\frac{X}{R}\,.$$

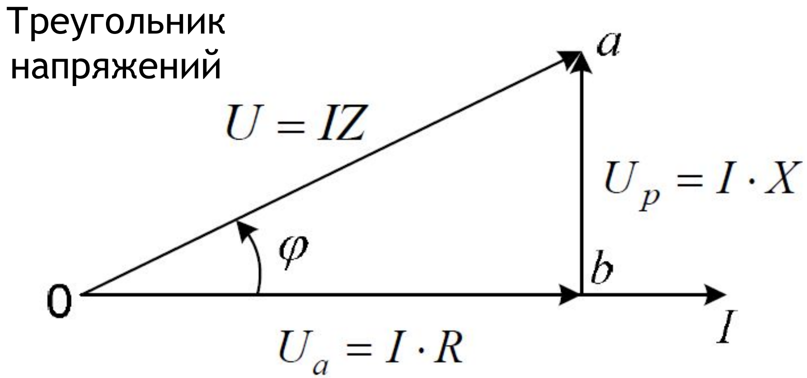




Векторная диаграмма, изображенная на рис. 4.2, построена для случая, когда $U_L > U_C$.

Это имеет место при $X_L > X_C$, когда в цепи преобладает индуктивность и цепь носит активно-индуктивный характер. В этом случае общий ток I отстаёт по фазе от входного напряжения на угол ϕ.

Возможны также режимы, когда $U_L < U_C$ и $U_L = U_C$.



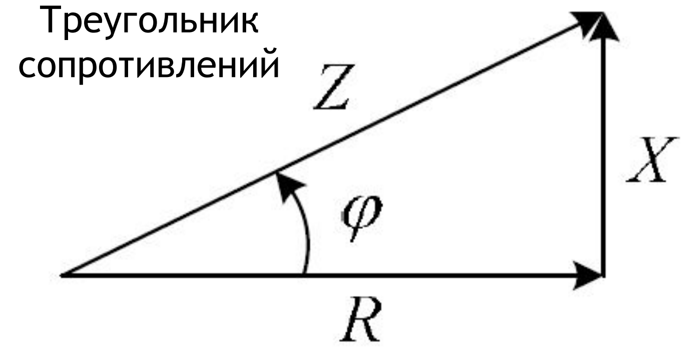


Рис. 4.3.

Изобразим отдельно треугольник *оаb*. Этот треугольник называется ***треугольником напряжений*** (рис. 4.3).

Проекция вектора напряжения ***U*** на вектор тока ***I*** называется активной составляющей напряжения, обозначается U_a, и равна падению напряжения на активном сопротивлении:

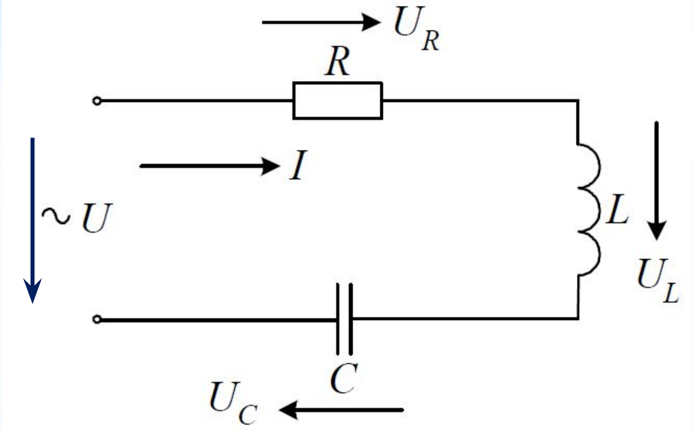
$$U_a = U_R = I\,R.$$

Реактивная составляющая напряжения U_p – это проекция вектора напряжения на направление, перпендикулярное вектору тока, она равна падению напряжения на суммарном реактивном сопротивлении цепи:

$$U_p = U = U_L - U_C = I\left(X_L - X_C\right) = I\,X.$$

Если все стороны треугольника напряжений разделить на ток, то получим ***треугольник сопротивлений***, которому соответствуют формулы:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z},\ \sin\varphi = \frac{X}{Z},\ tg\varphi = \frac{X}{R},\ ctg\varphi = \frac{R}{X},\ Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$



Резонанс напряжений

Режим, когда в цепи, содержащей последовательно соединенные активное сопротивление, индуктивность и ёмкость, ток совпадает по фазе с напряжением (рис. 4.4) называют ***резонансом напряжения***. Это означает, что входное реактивное сопротивление в цепи равно нулю:

$$X = X_L - X_C = 0 \text{ или } X_L = X_C.$$

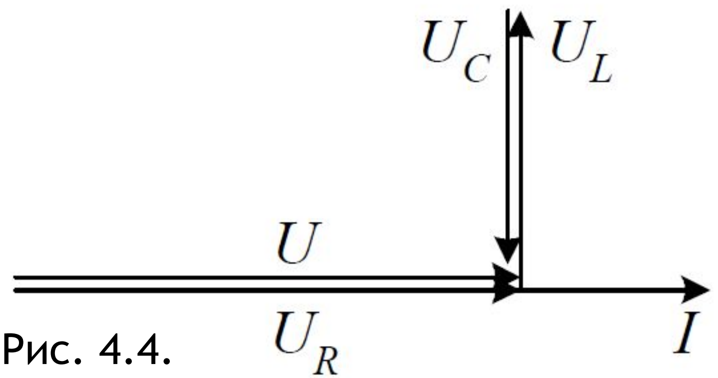


Рис. 4.4.

В этом случае

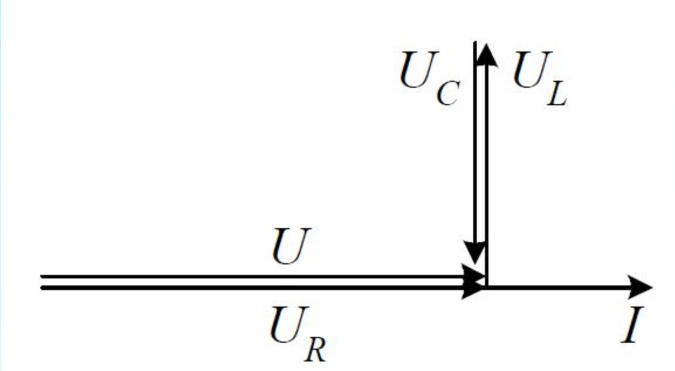
$$U_L = U_C$$

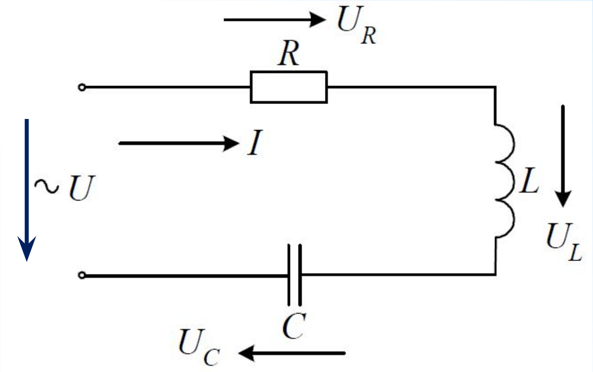
и цепь носит чисто активный характер, т.е.

$$Z = R,$$

и сдвиг фаз отсутствует

$$\varphi = 0.$$





Так как при резонансе $X_L = X_C$, то соответственно:

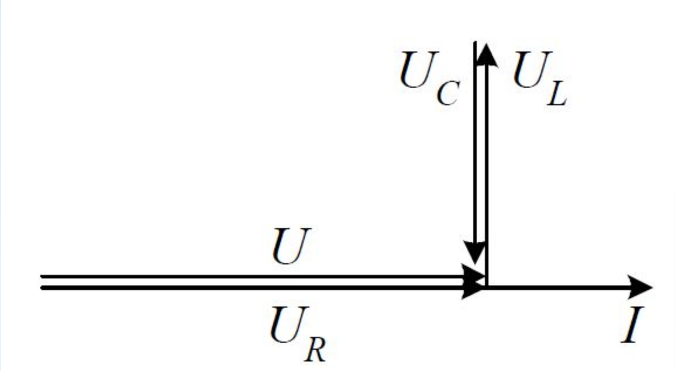
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

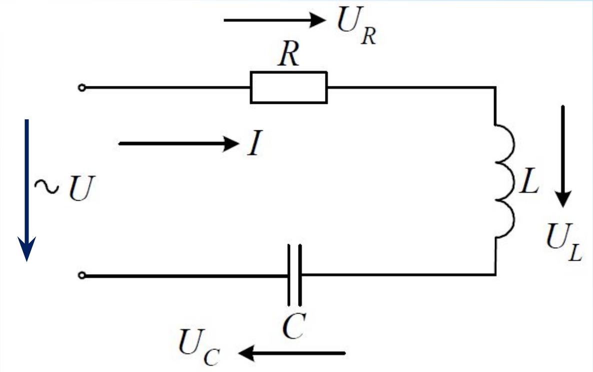
Напряжения на индуктивности и ёмкости в этом режиме равны по величине и, находясь в противофазе (сдвиг фаз 180^0), компенсируют друг друга. Всё приложенное к цепи напряжение приходится на её активное сопротивление.

Напряжение на индуктивности и ёмкости может значительно превышать напряжение на входе цепи. Их отношение, называемое добротностью контура *Q*, определяется величинами индуктивного (или ёмкостного) и активного сопротивлений:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{X_{L\ рез}}{R} = \frac{X_{C\ рез}}{R}.$$

Добротность показывает, во сколько раз напряжения на индуктивности и ёмкости при резонансе превышают напряжение, приложенное к цепи. В радиотехнических цепях она может достигать несколько сотен единиц.





При резонансе

$$X_L = X_C \quad \text{или} \quad 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

Решив это уравнение относительно *f*, получим:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0,$$

где f_0 – собственная частота колебаний контура. Таким образом, при резонансе напряжений частота *f* источника напряжения равна собственной частоте f_0 колебаний контура.

При резонансе напряжения $X_L = 2\pi f_0 L = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\dfrac{L}{C}}.$

Величину $X_L = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = Z_B$ называют ***волновым сопротивлением контура***.

Тогда добротность *Q* равна $Q = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{Z_B}{R}.$

Для резонанса напряжений можно построить зависимость (частотную характеристику) действующего значения тока в контуре от частоты источника напряжения при неизменной собственной частоте контура (рис. 4.5), называемую резонансной кривой. Она характеризует способность колебательного контура выделять ток резонансной частоты и ослаблять токи других частот.

Резонанс напряжений широко используется в радиотехнике для выделения сигналов заданной частоты.

На рис. 4.6 показана зависимость реактивного сопротивления X, индуктивного X_L и ёмкостного X_C сопротивлений от частоты f источника напряжения.

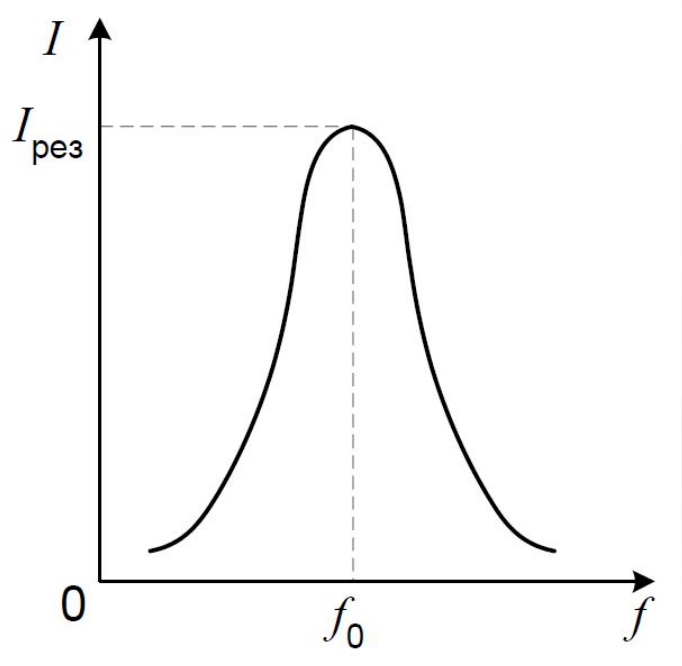


Рис. 4.5

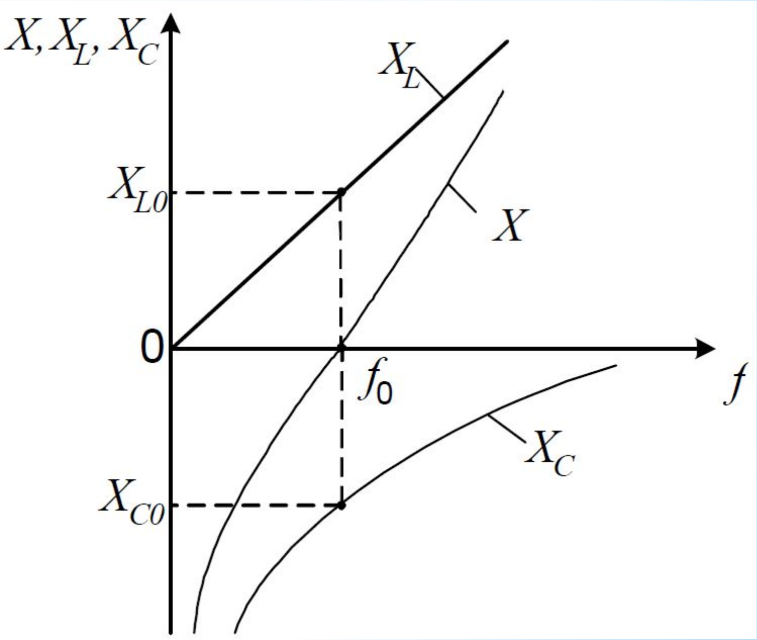


Рис. 4.6

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ *R*, *L*, *C* И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

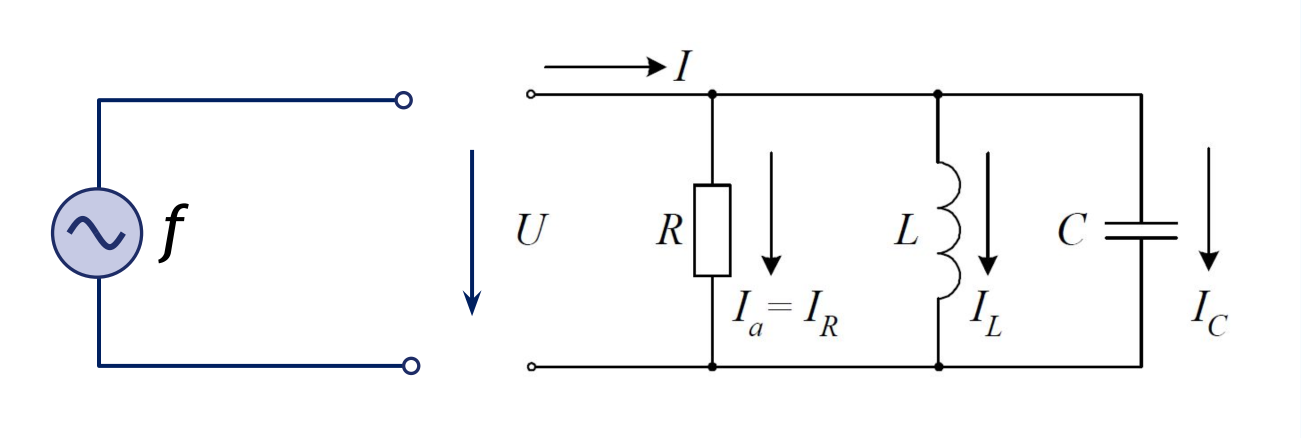
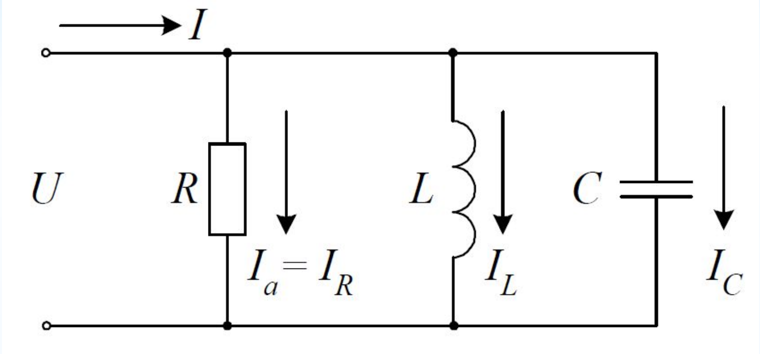


Рис. 4.7

Дана схема, состоящая из параллельно соединённых активного R и реактивных L, C элементов (рис. 4.7). Такую цепь называют параллельным колебательным контуром.

В этой цепи заданы: приложенное напряжение U , частота f и числовые значения (номиналы) элементов R, L, C.

Требуется найти токи в ветвях цепи. Решение этой задачи выполним на основе построения векторной диаграммы.



Запишем токи ветвей:

$$I_a = \frac{U}{R} = U\,G, \quad I_L = \frac{U}{X_L} = U\,B_L, \quad I_C = \frac{U}{X_C} = U\,B_C$$

Для определения общего тока *I* необходимо построить векторную диаграмму (рис. 4.8).

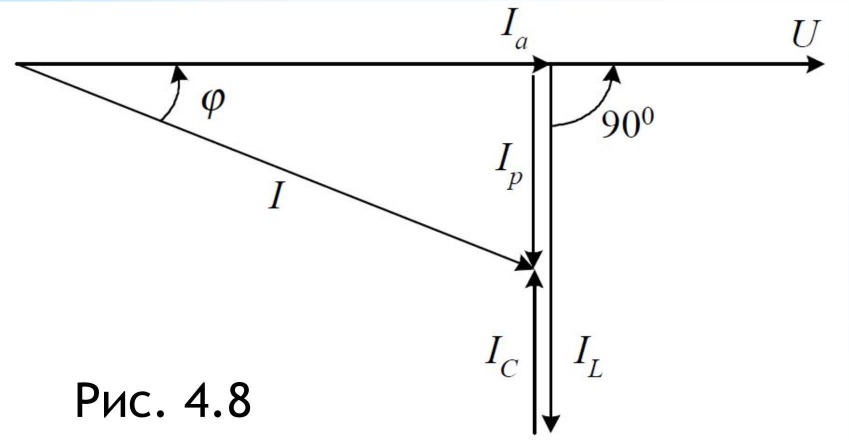
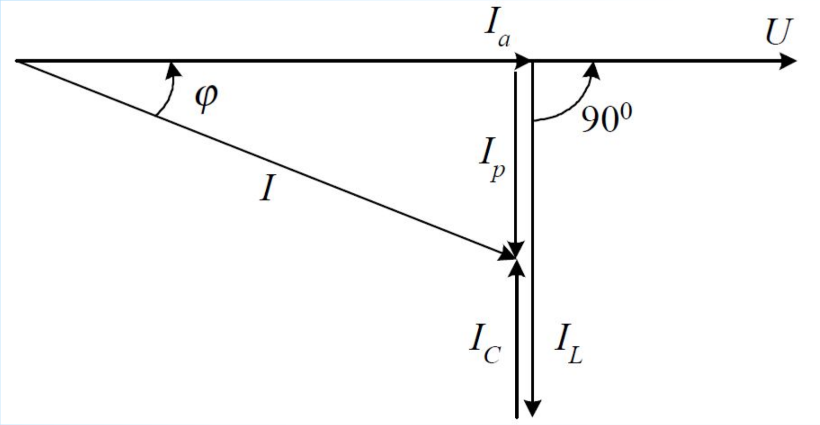
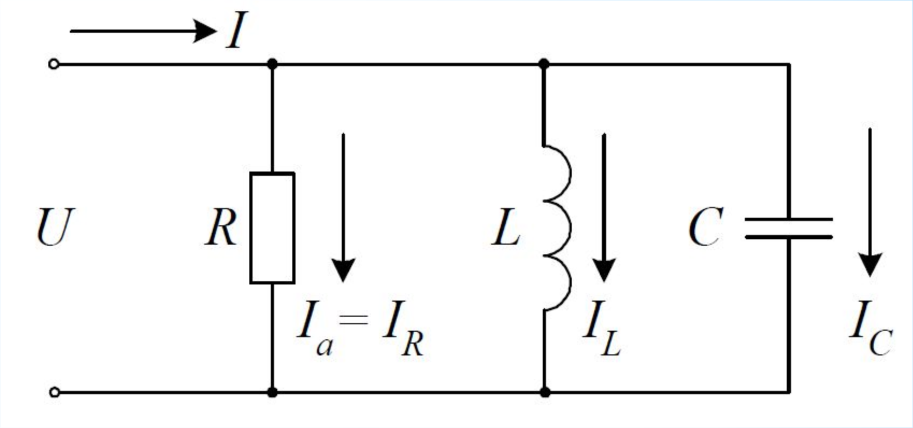


Рис. 4.8

Построение начинаем с вектора напряжения, так как оно является общим для всех ветвей схемы.

Ток через резистор совпадает по фазе с приложенным напряжением, ток через индуктивность I_L отстает по фазе от напряжения на 90°, ток через емкость I_C находится в противофазе с I_L.





Из векторной диаграммы имеем:

$$I = \sqrt{I_a^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{(G\,U)^2 + (B_L\,U - B_C\,U)^2} \text{ или } I = U\,Y\,,$$

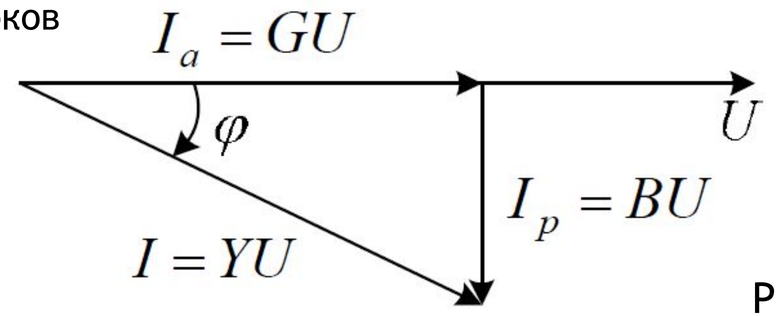
где *Y* – полная проводимость цепи

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}\,;$$

B – общая реактивная проводимость

$$B = B_L - B_C\,.$$

Треугольник
токов



Треугольник
проводимостей

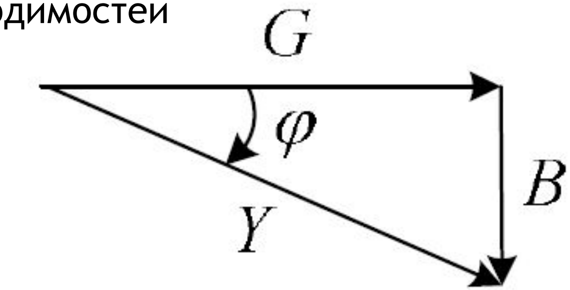


Рис. 4.9.

Векторы токов на диаграмме образуют треугольник токов (рис. 4.9). При этом вектор I_a – активная составляющая тока, $I_a = UG$; I_p – реактивная составляющая тока, которая определяется как разность длин векторов:

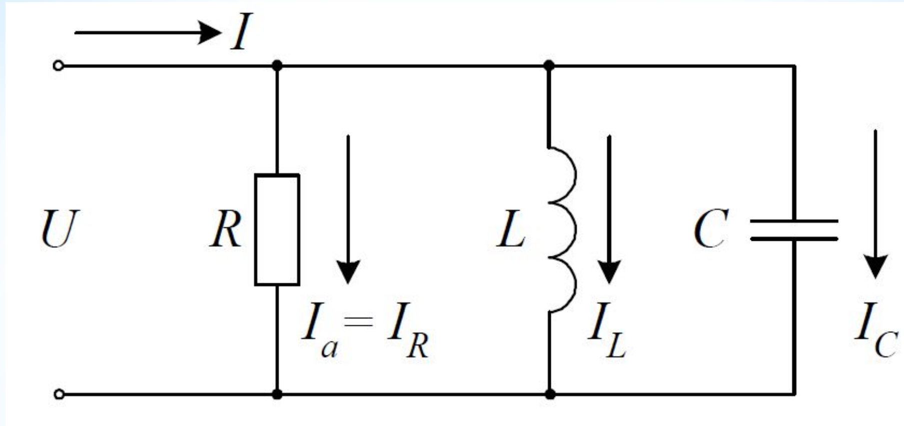
$$I_p = I_L - I_C = B_L U - B_C U = U(B_L - B_C) = BU .$$

Разделив все стороны треугольника токов на U , получим треугольник проводимостей (рис. 4.9). Стороны треугольника проводимостей связаны следующими соотношениями:

$$cos\,\varphi = \frac{G}{Y},\ sin\,\varphi = \frac{B}{Y},\ tg\varphi = \frac{B}{G},\ Y = \sqrt{G^2 + B^2} .$$

Векторные диаграммы на рис. 4.8, 4.9 построены для случая, когда $I_L > I_C$. Это имеет место при $B_L > B_C$, когда в цепи преобладает индуктивность, и цепь носит активно-индуктивный характер.

В этом случае общий ток I отстаёт по фазе от входного напряжения на угол ϕ. Возможны также режимы, когда $I_L < I_C$ и $I_L = I_C$.



Резонанс токов

Режим, когда в цепи, содержащей параллельно соединенные активное сопротивление, индуктивность и ёмкость, ток совпадает по фазе с напряжением (рис. 4.10) называют ***резонансом тока***. Это означает, что входная реактивная проводимость в цепи равно нулю:

$$B = B_L - B_C = 0 \text{ или } B_L = B_C.$$

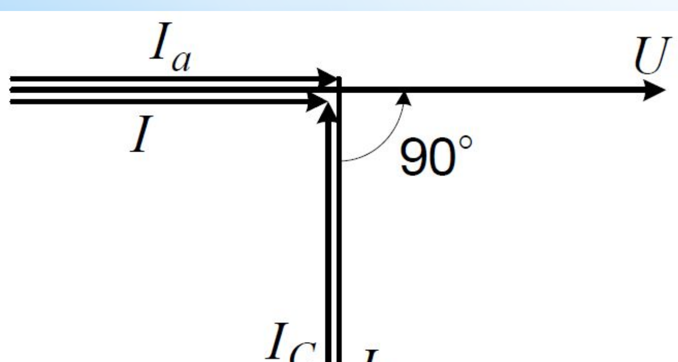


Рис. 4.10.

В этом случае

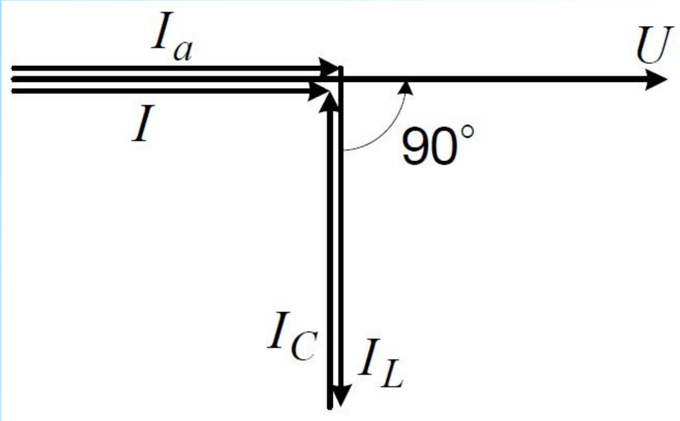
$$I_L = I_C$$

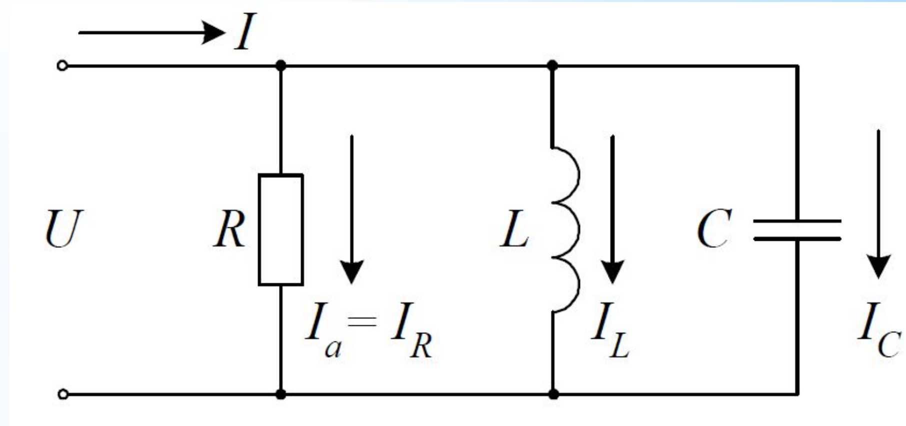
и цепь носит чисто активный характер, т.е.

$$Y = G,$$

и сдвиг фаз отсутствует

$$\varphi = 0.$$





Для того чтобы ток *I* в неразветвленной части цепи совпадал по фазе с напряжением источника, реактивный ток индуктивной ветви I_L должен быть равен реактивному току ёмкостной ветви I_C , т.е. $I_L = I_C$. В этом случае эти токи, находясь в противофазе, компенсируют друг друга. В итоге весь ток, подходящий к разветвленной цепи, носит активный характер.

Полная проводимость цепи при резонансе токов равна:

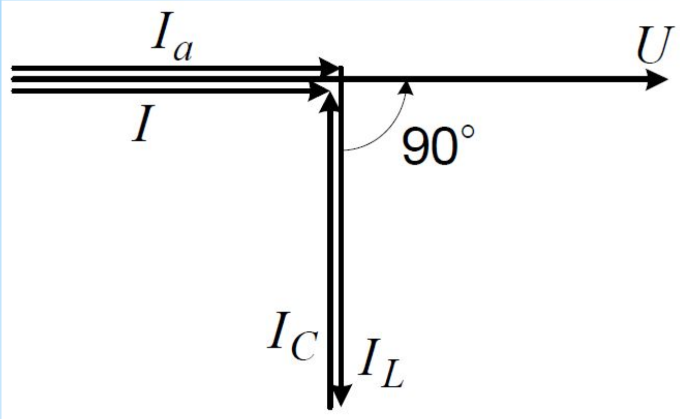
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + 0^2} = G.$$

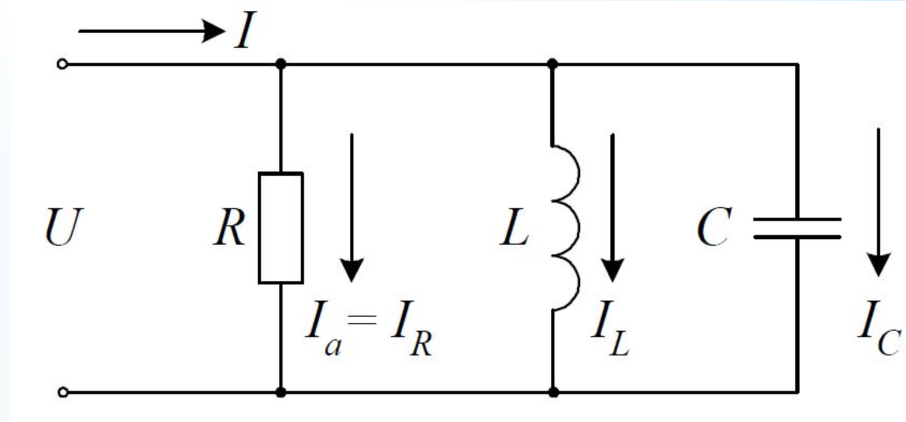
Так как при резонансе токов $B_L = B_C$, то соответственно

$$\frac{1}{2\pi fL} = 2\pi fC .$$

При этом условии частота f , при которой наступает резонанс токов, совпадает с собственной частотой f_0 контура:

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$





Величину

$$X_L = 2\pi f_0 L = 2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_B$$

называют волновым сопротивлением контура. В этом случае добротность контура равна:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{Z_B}{R} \quad \text{или} \quad Q = \frac{G}{B_L} = \frac{G}{Y_B}.$$

Таким образом, ток в неразветвленной части цепи, т. е. ток источника питания совпадает по фазе с напряжением источника и достигает минимального значения, равного величине активного тока, определяемым значением величины R.

В тоже время реактивный ток в катушке индуктивности равен реактивному ёмкостному току, причём эти токи могут во много раз превышать ток источника питания.