Вынужденные колебания

Если колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы, то возникают так называемые ***вынужденные колебания***, имеющие незатухающий характер.

Внешняя сила периодически изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \cos wt$

По II закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos wt$$

Разделив это уравнение на ***m***, и перенеся члены с ***x*** и ***F*** в левую часть, получим ***<u>неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.</u>***

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f_0 \cos wt$$

$$\beta = \frac{r}{2m}, w_0^2 = \frac{k}{m}, f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

$$x_{\text{общ.н/о}} = x_{\text{общ.о}} + x_{\text{част.н/о}}$$

Общее решение уравнения вынужденных колебаний таково:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(wt + \varphi) + \frac{F_0/_m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2}} \cos(wt - arctg \frac{2\beta w}{w_0^2 - w^2}$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет свободные колебания. Их частота $\boldsymbol{\omega_0}$ определяется внутренними свойствами системы, а амплитуда $\boldsymbol{A_0}$ и фаза $\boldsymbol{\varphi'}$ — начальными условиями и внешними воздействиями.

Второе слагаемое, называемое *вынужденными колебаниями*, обусловлено наличием внешней (вынуждающей) силы.

Амплитуда вынужденных колебаний

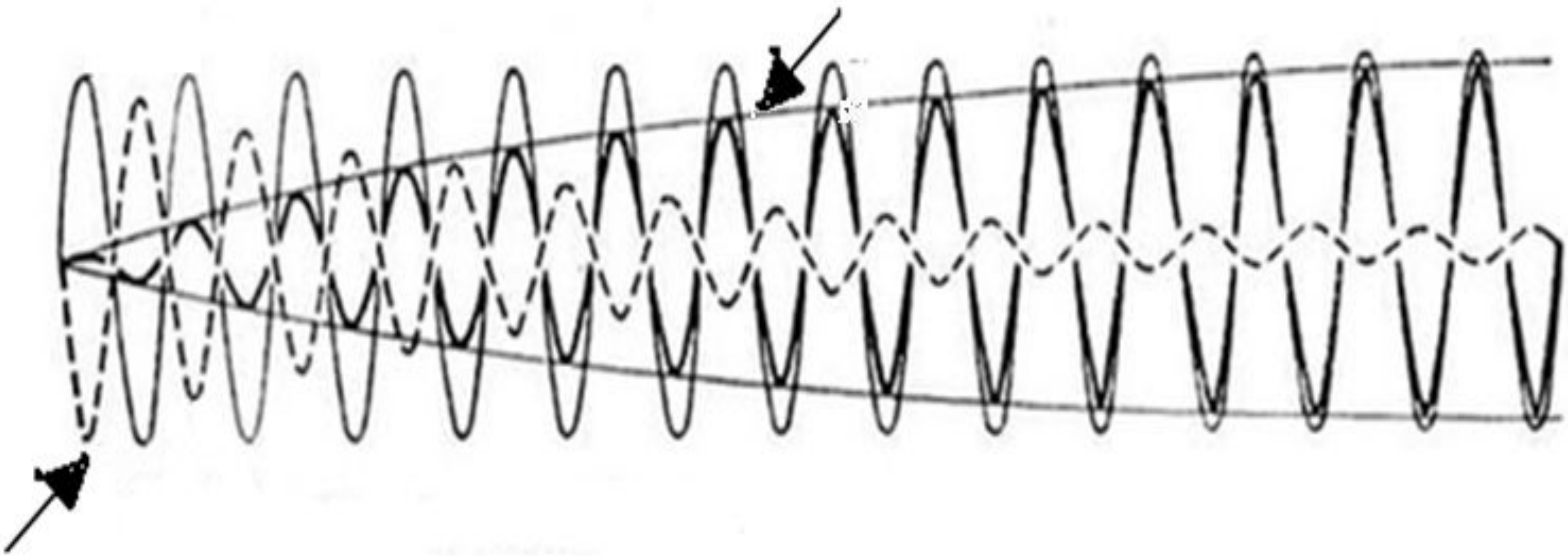
$$A = \frac{F_0/_m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \ 4\beta^2 w^2}},$$

Фаза вынужденных колебаний

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta w}{w_0^2 - w^2}$$

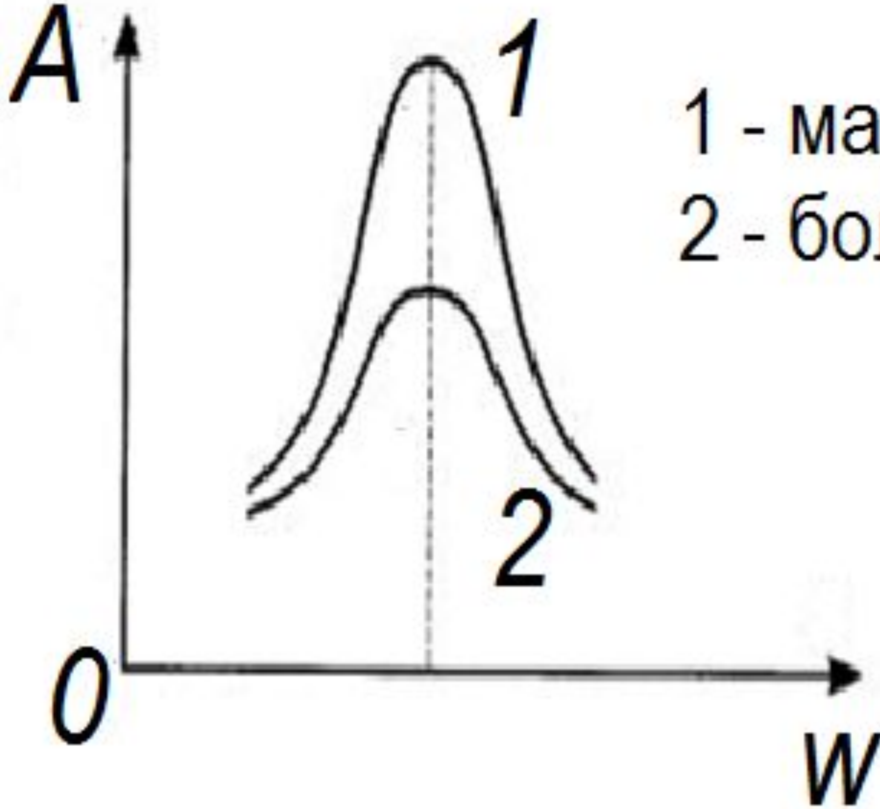
Первое слагаемое играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени из-за экспоненциального множителя роль первого слагаемого все больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое

Установившиеся вынужденные колебания



Собственные колебания

Установившиеся колебания – гармонические с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания также зависит от частоты вынуждающей силы.



1 - малая сила трения
2 - большая сила трения

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

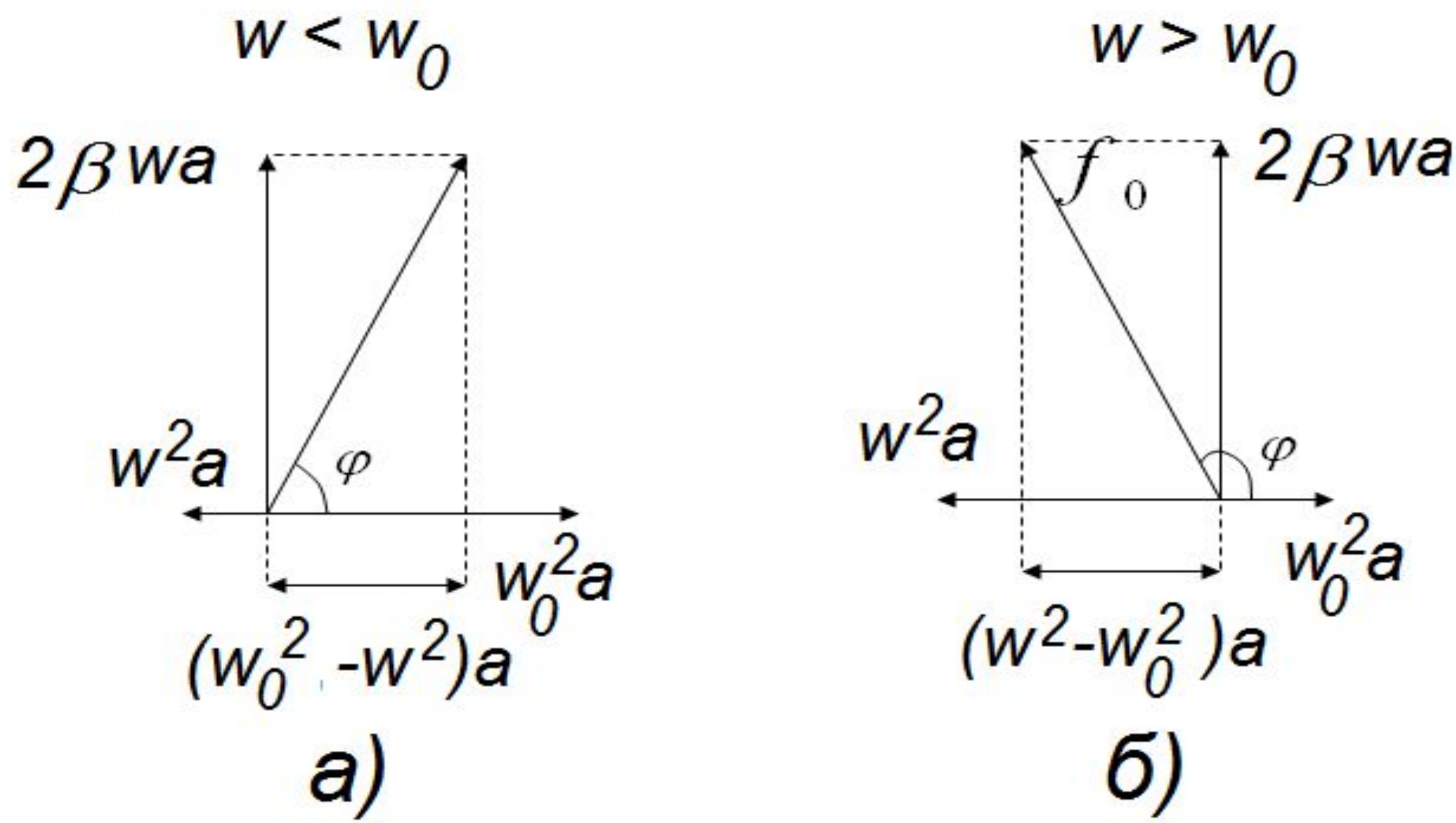
Частное решение уравнения вынужденных колебаний можно получить с помощью векторной диаграммы. Продифференцируем уравнение

$$x = f\cos(wt - \varphi)$$

и подставим результат в уравнение вынужденных колебаний. Получим:

$$w^2 a\cos(wt - \varphi + \pi) + 2\beta wa\left(wt - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + w_0^2 a(wt - \varphi) = f_0\cos wt$$

Вынужденные колебания



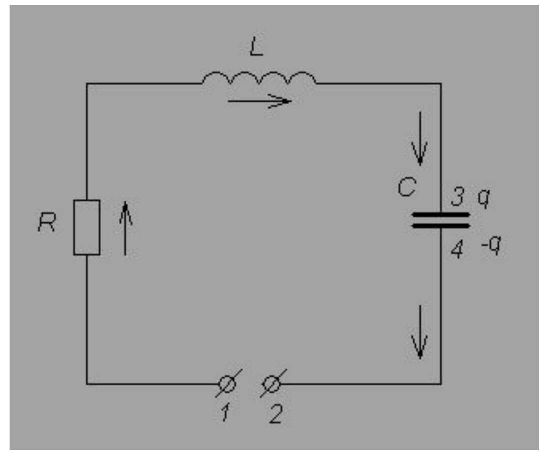
На рисунке показана векторная диаграмма.

Уравнение колебательного контура

$$U_R = RI$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$



$$\varepsilon = U_R + U_L + U_C$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Полное сопротивление колебательного контура

Реактивное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Из закона Ома для участка цепи переменного тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения (отношение реактивного сопротивления к активному):

$$tg\,\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

РЕЗОНАНС

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется ***резонансом***, соответствующая частота – ***резонансной частотой***.

Чтобы определить резонансную частоту $\boldsymbol{\omega_{рез}}$, нужно найти максимум функции определяющей зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

Продифференцировав выражение

$$A(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - w_0)^2 + 4\beta^2 w^2}}$$

по $\boldsymbol{\omega}$ и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\boldsymbol{\omega_{рез}}$:

$$-4(w_0^2 - w^2)w + 8\beta^2 w = 0$$

Данное уравнение имеет три решения: ***ω=0*** и

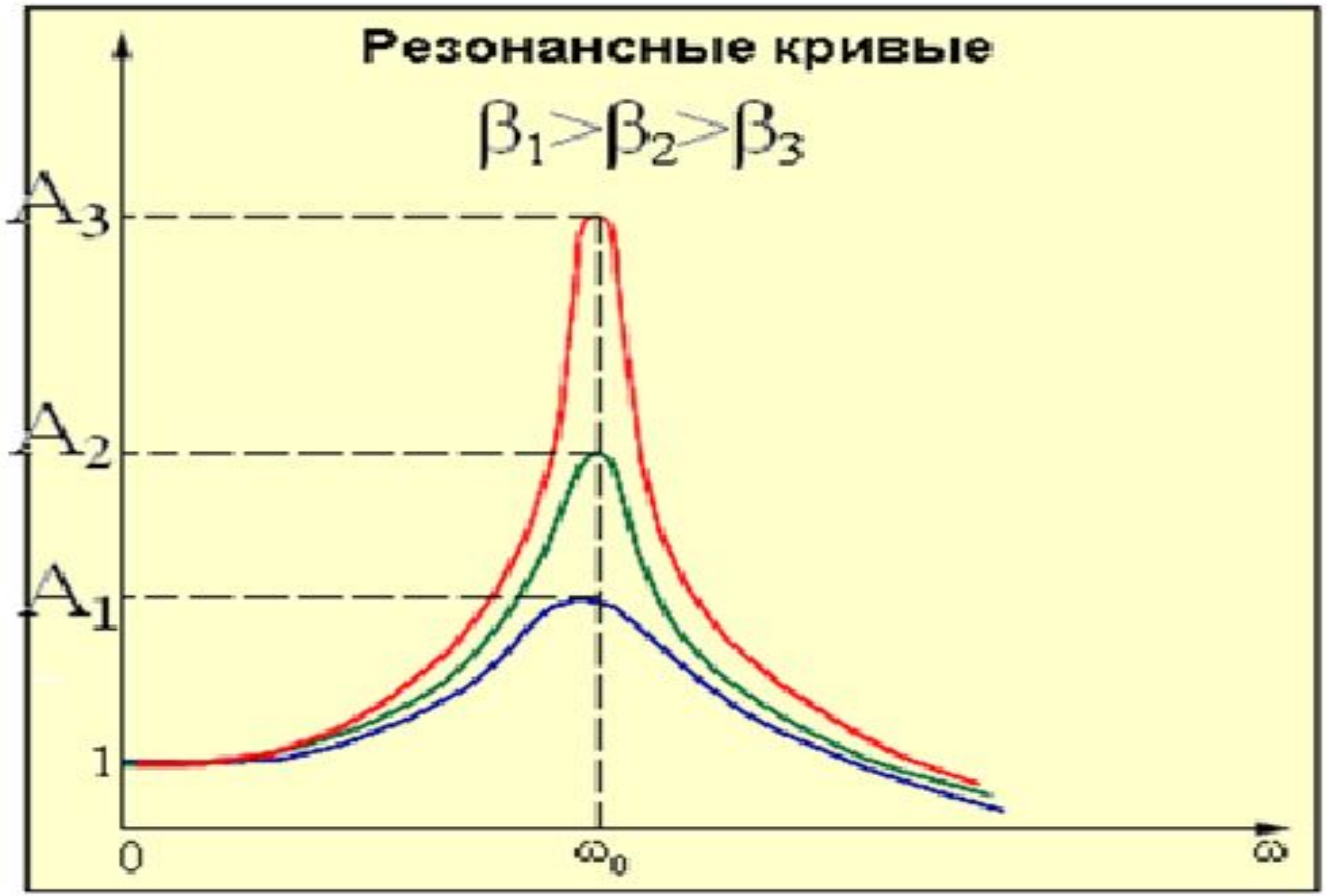
$$w = \pm\sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное не подходит, как не имеющее физического смысла. В результате, для резонансной частоты получается значение:

$$w_{\text{рез}} = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Если частота ω внешней силы приближается к собственной частоте ω_0, возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, то есть возникает ***резонанс***. Зависимость амплитуды ***А*** вынужденных колебаний от частоты ***ω*** вынуждающей силы называется ***резонансной характеристикой или резонансной кривой***.

РЕЗОНАНС


Резонансные кривые
$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$
A_3
A_2
A_1
1
0
ω_0
ω

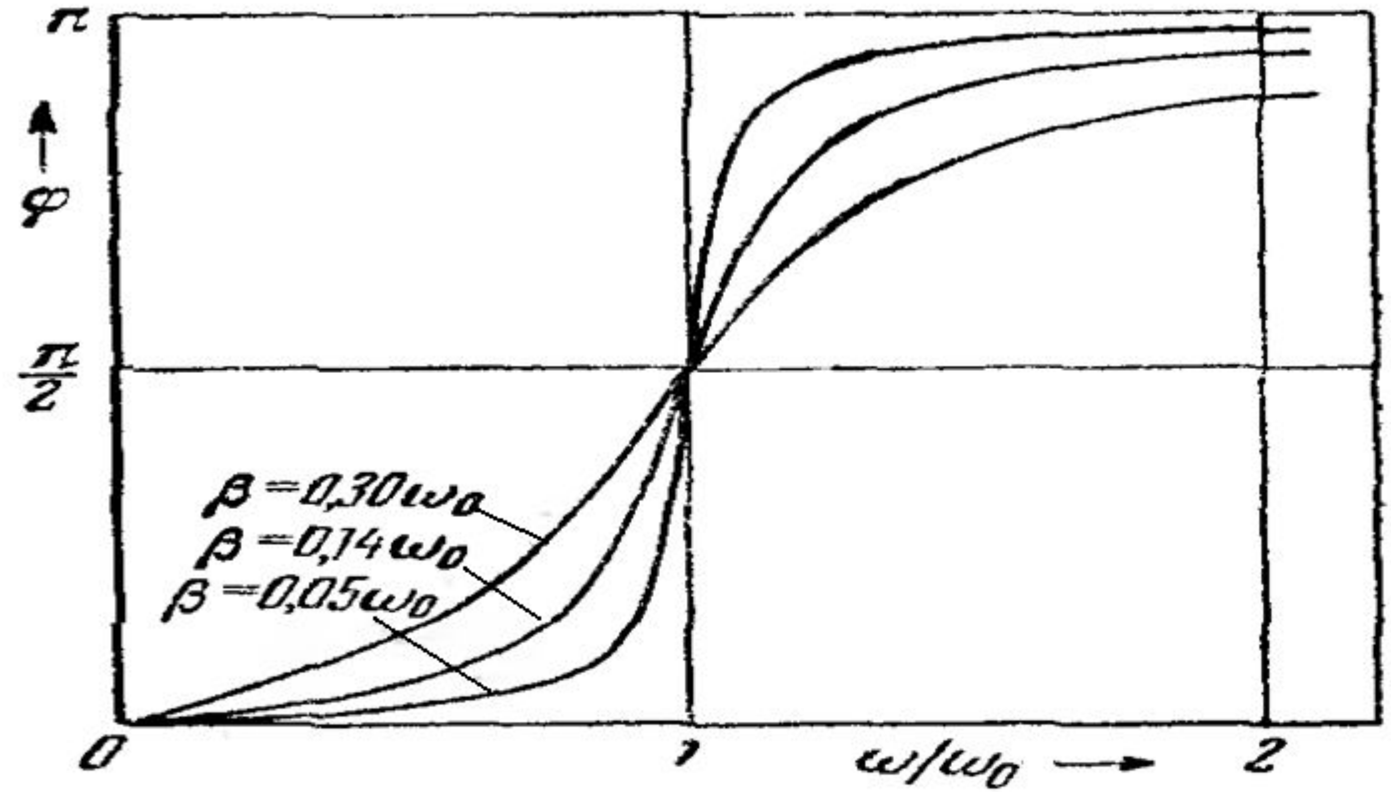
При очень большом затухании выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается – <u>с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает.</u>

При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному f_0 / w_0^2

то есть F_0 / k . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины $\boldsymbol{F_0}$.

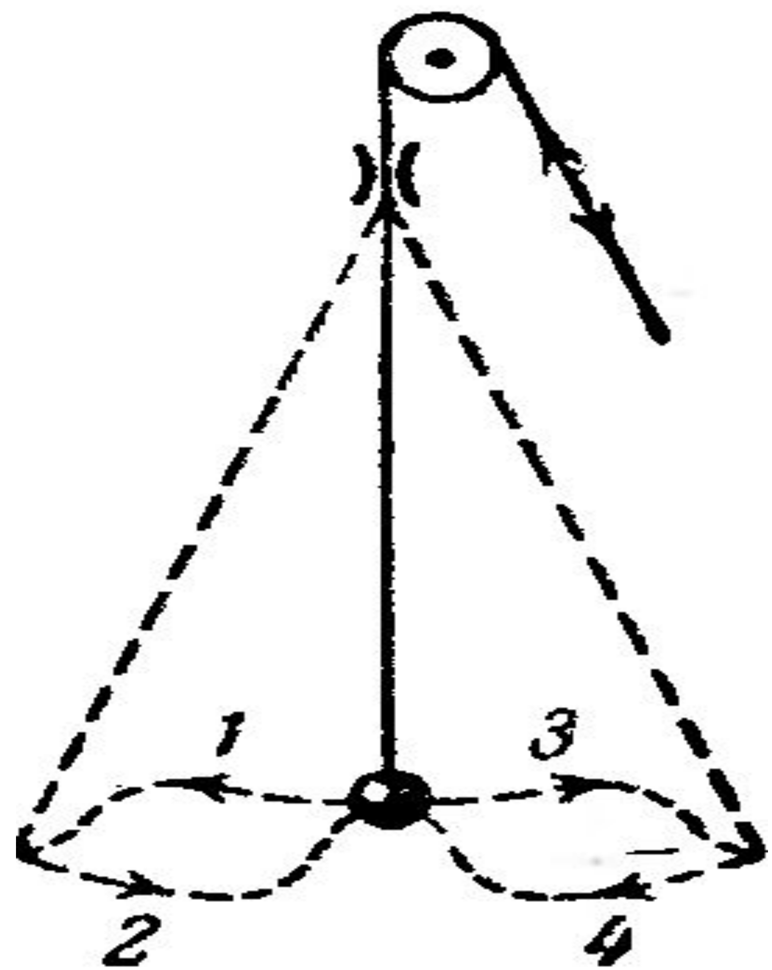
При резонансе амплитуда $\boldsymbol{A}_{\textbf{\textit{рез}}}$ колебания может во много раз превосходить амплитуду А колебаний свободного конца пружины, вызванного внешним воздействием. В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать.

В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: ***работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения.*** Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность **Q** колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе. У колебательных систем с не очень высокой добротностью (< 10) резонансная частота несколько смещается в сторону низких частот



Зависимость φ от ω при различных значения коэффициента затухания β. Частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$.

Параметрический резонанс заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом. Пример – маятник с изменяющейся нитью.



Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить.

Сила натяжения нити при колебаниях маятника непостоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна.

Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника.

В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.

Вынужденные колебания следует отличать от автоколебаний.
В случае **автоколебаний** в системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии. Тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают. В случае автоколебаний система как бы сама себя подталкивает.

Контрольные вопросы

1. Определение вынужденных колебаний.
2. Амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний: формулы.
3. Зависимость амплитуды от частоты вынуждающей силы.
4. Определение резонанса
5. Резонансные кривые
6. Параметрический резонанс
7. Автоколебания