Числовые последовательности

В сберегательном банке по номеру лицевого счета вкладчика можно легко найти этот счет и посмотреть, какой вклад на нем лежит. Пусть на счете №1 лежит вклад a_1 рублей, на счете №2 - a_2 рублей и т.д. Получается ***числовая последовательность:***

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_N,$$

где N – число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n,$$

Число a_1 называют первым членом последовательности

a_2 - вторым членом последовательности и т.д.

a_n - n-ым членом последовательности

Примеры числовых последовательностей

1. Последовательность положительных четных чисел:

   2, 4, 6, 8, 10, … 2n,…

2. Последовательность квадратов натуральных чисел:

   1, 4, 9, 16, 25, ….., n^2 ,…

Виды последовательностей:

1. **Конечные:**

Пример: последовательность положительных двузначных чисел:

10,11,12,….98,99.

2. **Бесконечные:**

Пример: положительные четные числа:

2,4,6,8,10,…

Способы задания числовых последовательностей:

1. Перечислением ее членов:

1, 3, 5, 7, 9. – последовательность нечетных однозначных чисел.

2. Формулой n-ого члена последовательности:

$a_n = 2n$ **2, 4, 6, 8, …2n,…**

$x_n = (-1)^n$ **-1, 1, -1, 1, -1, 1,…**

$c_n = 5$ **5, 5, 5, 5,…**

3. Формулой, выражающей любой член последовательности через предыдущий, зная один или несколько первых членов – реккурентный способ:

$x_n = x_{n-1} + 10$ **1, 11, 21, 31, 41,…**

$x_1 = 1,\ x_2 = 11$

Рассмотрим последовательность:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29,…

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

Определение: Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Т.е. последовательность – арифметическая прогрессия, если для любого натурального *n* выполняется условие:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

d – разность арифметической прогрессии

Нахождение n-ого члена арифметической прогрессии:

По определению арифметической прогрессии:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d \ = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d \ = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

- формула n-ого члена арифметической прогрессии

Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии:

Обозначим сумму n первых членов арифметической прогрессии через S_n

Запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания:

(1) $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$

(2) $$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1$$

Сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна $a_1 + a_n$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d)$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$
$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

Число таких пар равно n.

(1) $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots\dots + a_{n-1} + a_n$$

(2) $$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_1$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) * n$$

Разделив обе части равенства на 2, получим:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$$

- формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Если задан первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, где вместо a_n **стоит выражение** $a_1 + d(n-1)$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$