# 2. Основы автоматики и системы автоматического управления (ОА и САУ)

## **Часть 1.** ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

## Часть 1. Основы теории линейных непрерывных САУ.

## 1.1. Математические модели САУ

Для математического описания САУ по её функциональной схеме (рис. В1) определяется состав её звеньев, связанных друг с другом и с внешней средой. Основными формами представления операторов преобразования входных переменных $g(t)$ и $f(t)$ в переменные выхода $y(t)$ в конечномерных линейных непрерывных детерминированных моделях звеньев и САУ являются: *дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики*.

Происходящие в каждом звене процессы описываются *линейными дифференциальными уравнениями* зависимости выходной величины $x_2(t)$ от входного воздействия $x_1(t)$. Эти уравнения называются *математическими моделями звеньев* и для звеньев разной физической природы составляются по законам соответствующей науки (механики, электротехники, термодинамики и др.), нелинейные уравнения линеаризуются. Совокупность уравнений (математических моделей) взаимосвязанных звеньев САУ образуют систему уравнений САУ, называемую *математической моделью САУ*.

**Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения**, являющиеся математическими моделями звеньев и САУ, могут быть записаны (например, для второго порядка) в классической (1.1.1), символической (1.1.2) или операторной (1.1.3) формах в виде:

$$a_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 x_2(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t); \quad (1.1.1)$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_2(t) = (b_0 p + b_1) x_1(t); \quad (1.1.2)$$

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_2(p) = K(\tau p + 1) X_1(p), \quad (1.1.3)$$

где $p = \frac{d}{dt}$; $T_2^2 = \frac{a_0}{a_2}$; $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$; $K = \frac{b_1}{a_2}$; $\tau = \frac{b_0}{b_1}$.

Параметры $T_2$, $T_1$, $\tau$ называются *постоянными времени*, измеряемыми в секундах; $K=x_2/x_1$ называется коэффициентом передачи, имеющим размерность $|x_2|/|x_1|$ и характеризующим крутизну статической характеристики модели в установившихся режимах работы.

**Для описания математической модели САУ обычно используется три способа:**

- 1) **поэлементное описание САУ** с учётом взаимодействия каждого звена с другими звеньями и с внешней средой. При этом модель САУ описывают системой дифференциальных уравнений, учитывающих все параметры звеньев, входные и выходные величины (координаты) процессов управления, что обеспечивает возможность физической интерпретации всех процессов управления;

**Для описания математической модели САУ обычно используется три способа:**

- 2) **системное описание САУ** представляется одним уравнением, которое получается из поэлементного описания САУ методом подстановок для исключения промежуточных координат процесса управления и учитывает только зависимость выходного процесса (выходной величины) ***y(t)*** САУ от входного процесса (входной величины) ***x(t)*** при утрате возможности физической интерпретации процессов управления, происходящих внутри САУ;

**Для описания математической модели САУ обычно используется три способа:**

- **3) векторно-матричное описание САУ** в пространстве переменных состояния системы, позволяющее учитывать все параметры и переменные величины (координаты) САУ и вести расчёты с использованием ЭВМ при возможности физической интерпретации происходящих процессов управления в САУ.

- **Операторная функция передачи** (**ОФП**) является важнейшим математическим описанием звена или САУ, представляющим запись дифференциального уравнения в операторной форме в виде отношения изображений по Лапласу выходной $\boldsymbol{y(t)}$ и входной $\boldsymbol{x(t)}$ величин при нулевых начальных условиях, которая получается в виде:

$$W(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}} = \frac{\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt}{\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt} = \frac{y(p)}{x(p)}$$

- **Операторная функция передачи (ОФП)**

$$W(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}} = \frac{\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt}{\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt} = \frac{y(p)}{x(p)}$$

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_n y(t) =$$

$$= b_0\frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x(t)$$

Переводим дифференциальное уравнение в операторную форму, заменой:

$y(t) \Rightarrow y(p)$ $\quad \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow p^n$ $\quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \Rightarrow p^{n-1}$ и далее

$x(t) \Rightarrow x(p)$ $\quad \frac{d^m}{dt^m} \Rightarrow p^m$ $\quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \Rightarrow p^{m-1}$ и далее

# Операторная функция передачи (ОФП)

ОФП получается из дифференциального уравнения:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x(t)$$

После перехода к операторной форме:

$$a_0 p^n y(p) + a_1 p^{n-1} y(p) + a_2 p^{n-2} y(p) + \ldots + a_n y(p) =$$

$$= b_0 p^m x(p) + b_1 p^{m-1} x(p) + \ldots + b_m x(p)$$

# Операторная функция передачи (ОФП)

$$a_0 p^n y(p) + a_1 p^{n-1} y(p) + a_2 p^{n-2} y(p) + \ldots + a_n y(p) =$$

$$= b_0 p^m x(p) + b_1 p^{m-1} x(p) + \ldots + b_m x(p)$$

Вынесем y(p) и x(p) за скобки:

$$y(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n) =$$

$$= x(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m)$$

Запишем ОФП: $W(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}} = \frac{\int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt}{\int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt} = \frac{y(p)}{x(p)}$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n}$$

- **ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ** звена или САУ являются **переходная функция *h(t)*** и **функция веса *w(t)***

- **Переходной функцией (переходной характеристикой) *h(t)=y(t)*** звена или САУ называется её реакция на единичное ступенчатое входное воздействие ***x(t)=1*[*t*]** при нулевых начальных условиях.

- **Функцией веса (весовой функцией, импульсной переходной характеристикой) *w(t)=y(t)*** звена или САУ называется её реакция на единичное импульсное входное воздействие ***x(t)=δ(t)*** (дельта-функцию или функцию Дирака) при нулевых начальных условиях.

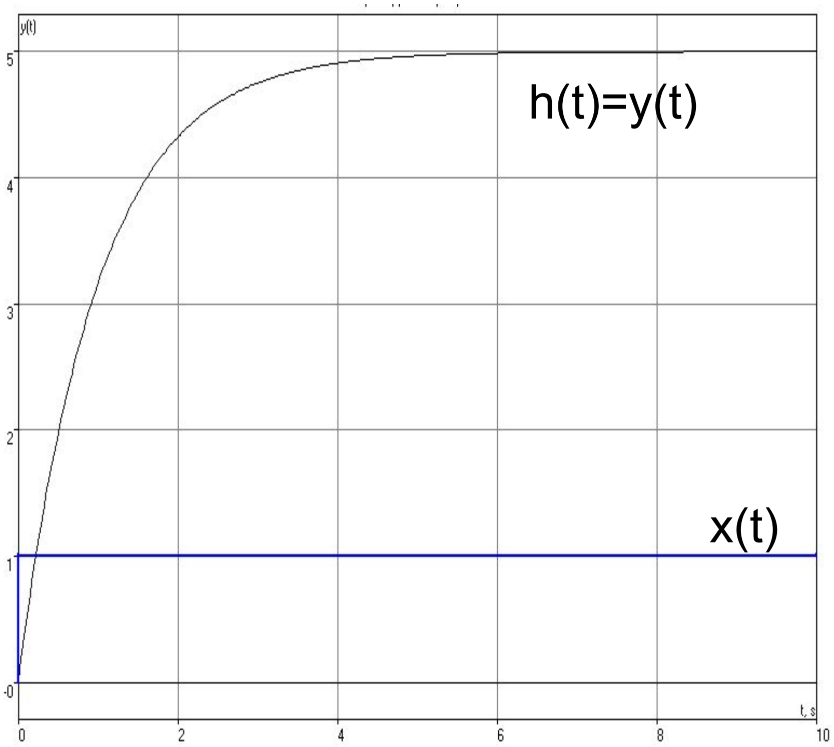
- Дельта-функция или функция Дирака получается при дифференцировании единичной ступенчатой функции $\boldsymbol{\delta(t)=d1[t]/dt}$, при этом $\boldsymbol{\delta(t)=0}$ в любой момент времени $\boldsymbol{t}$, кроме $\boldsymbol{t=0}$, где величина импульса стремится к бесконечности при бесконечно малой продолжительности импульса, а площадь импульса равна единице $\boldsymbol{\int\delta(t)dt=1}$.

- Функция веса $\boldsymbol{w(t)}$ связана с переходной функцией $\boldsymbol{h(t)}$ операцией дифференцирования $\boldsymbol{w(t)=dh(t)/dt}$.

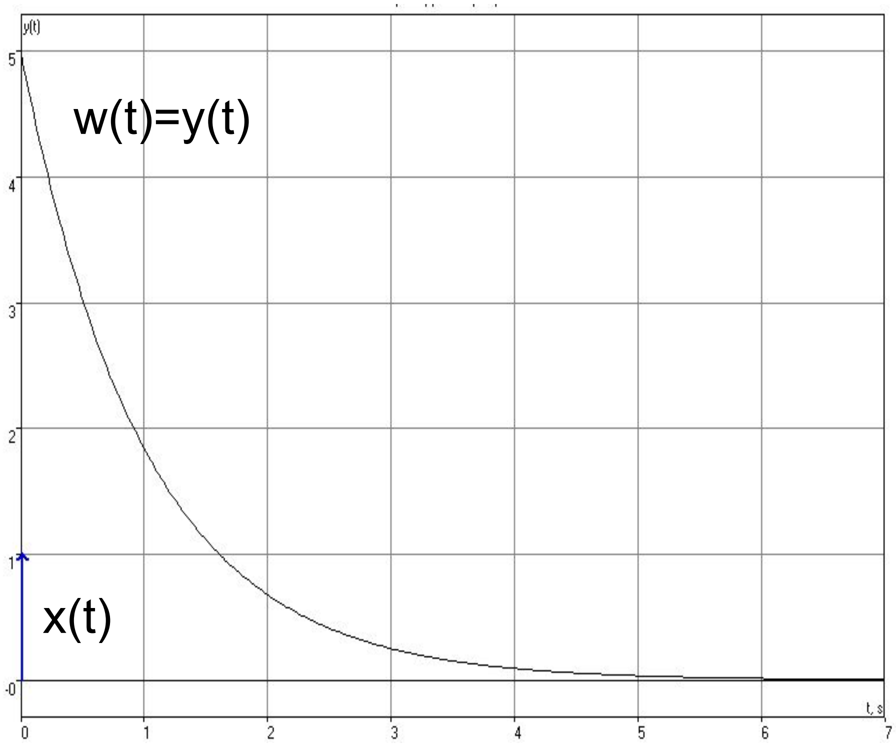
# Временные характеристики

- Например для САУ с ОПФ: $W(p) = \dfrac{y(p)}{x(p)} = \dfrac{5}{1+1p}$

Переходная характеристика:



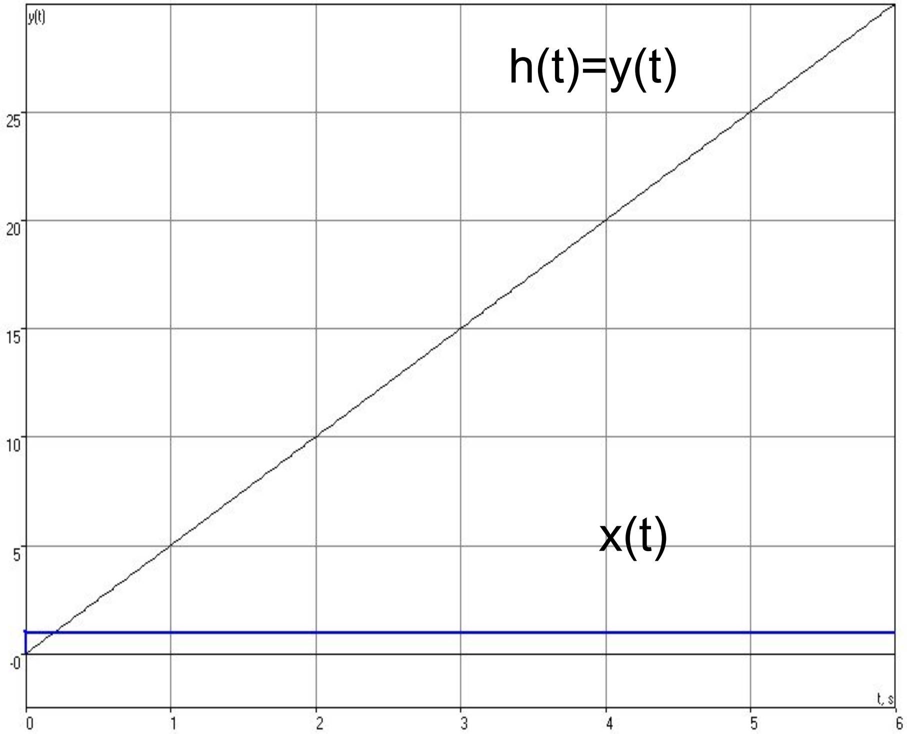

Импульсная характеристика:



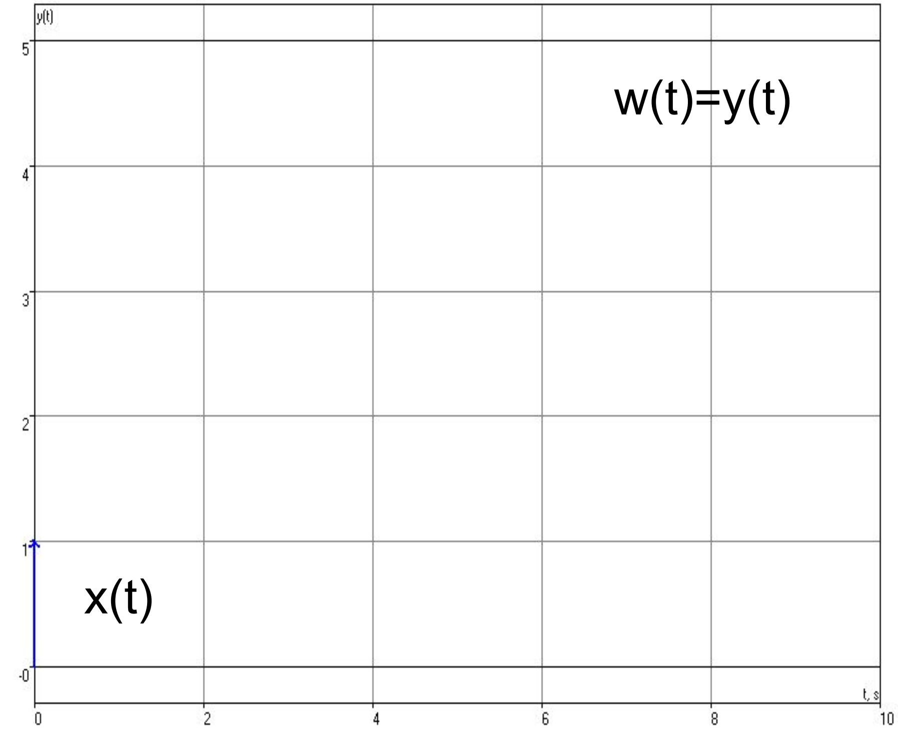
# Временные характеристики

- Например, для САУ с : $W(p)=\dfrac{y(p)}{x(p)}=\dfrac{5}{1p}$

Переходная характеристика:



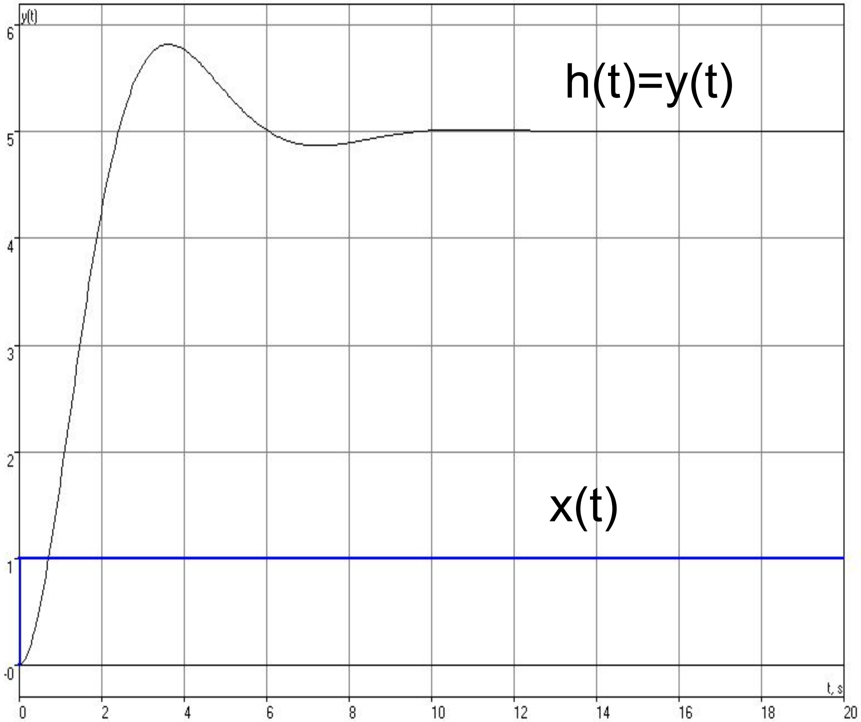

Импульсная характеристика:



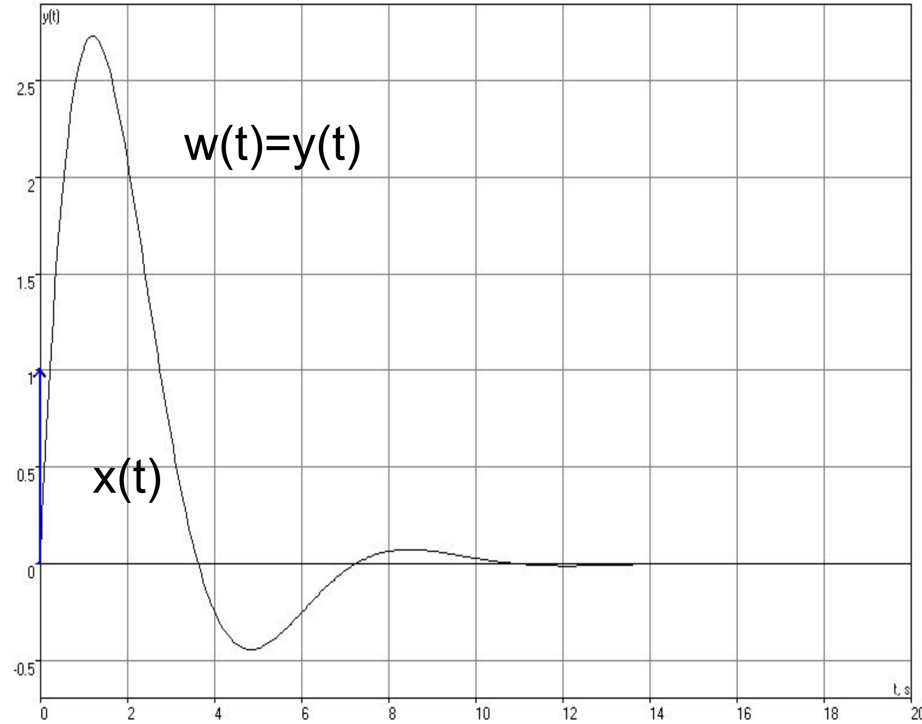
# Временные характеристики

- Например, для САУ с : $W(p) = \dfrac{y(p)}{x(p)} = \dfrac{5}{1 + 1p + 1p^2}$

Переходная характеристика:



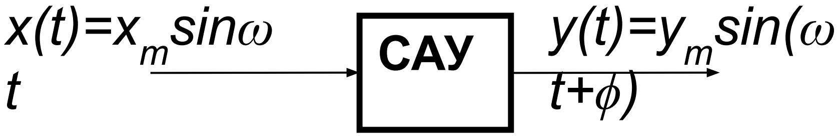

Импульсная характеристика:



# Частотные характеристики

- Частотные характеристики представляют собой зависимость амплитуды и фазы выходного сигнала звена или системы в установившемся режиме при гармоническом входном сигнале неизменной амплитуды и изменяемой частоты.
- Частотные характеристики имеют важное значение для исследования систем автоматического управления, так как они характеризуют передаточные свойства звеньев и систем управления.

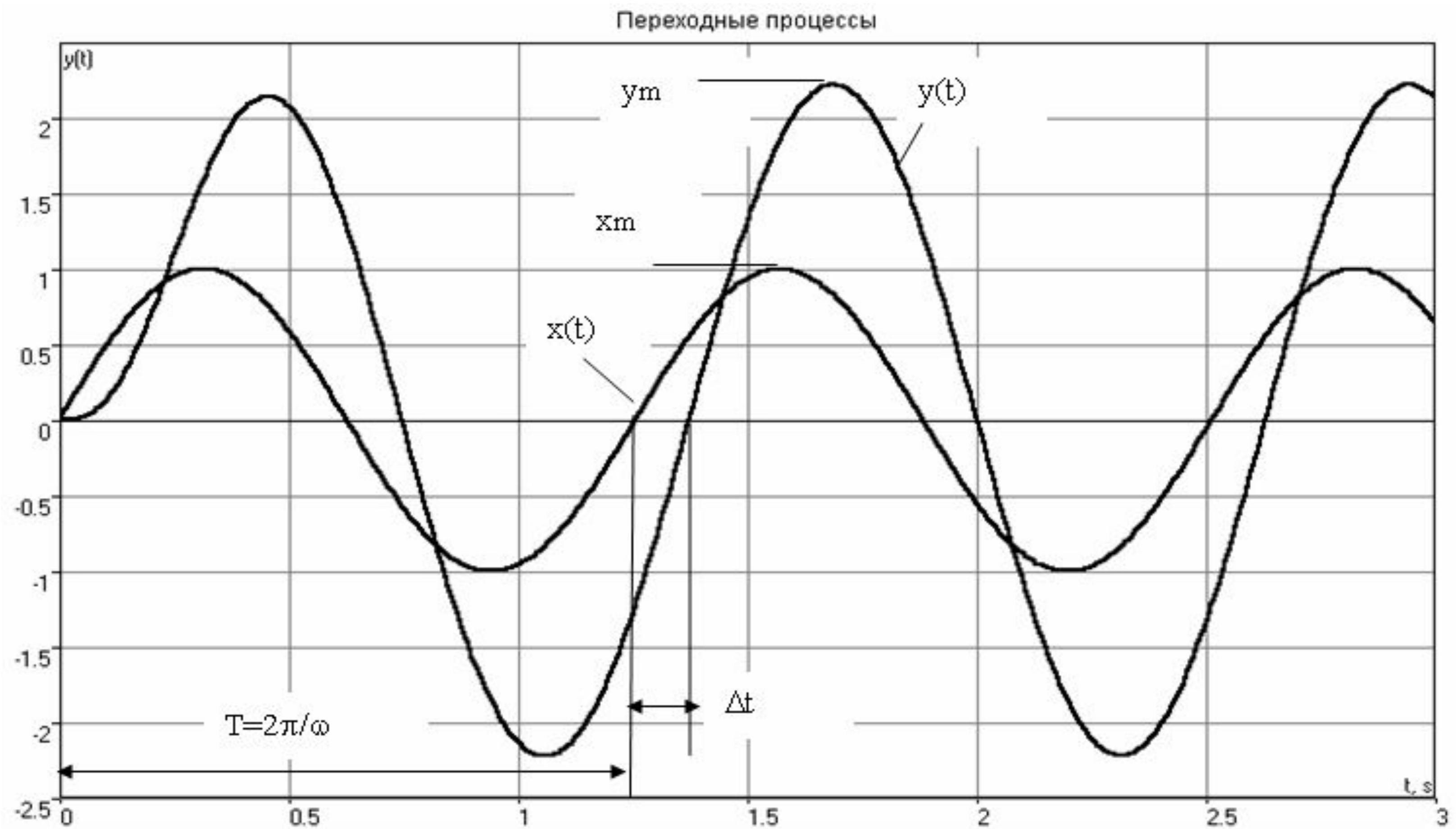
# Частотные характеристики




Если на вход САУ в момент времени $t=0$ приложено гармоническое воздействие ***x (t)*** определенной частоты $\omega$ $x(t)=x_m \sin\omega t$ **,** то после окончания переходного процесса в системе установится режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина ***y(t)*** будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой $\omega$, но с другой амплитудой $y_m$ и со сдвигом $\Delta t$ во времени: $y(t)=y_m \sin(\omega t+\phi)$**,** где $\phi = (\Delta t / T) \cdot 360$ – фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами в градусах.

# Частотные характеристики

$$x(t)=x_m \sin\omega t \longrightarrow \boxed{\text{САУ}} \longrightarrow y(t)=y_m \sin(\omega t+\phi)$$



# Частотные характеристики

- Изменяя частоту ***входного сигнала*** $\omega$ от **0** до ∝ при постоянном значении амплитуды $x_m$, можно установить, что амплитуда и фазовый сдвиг ***выходного сигнала*** зависят от частоты входного сигнала.

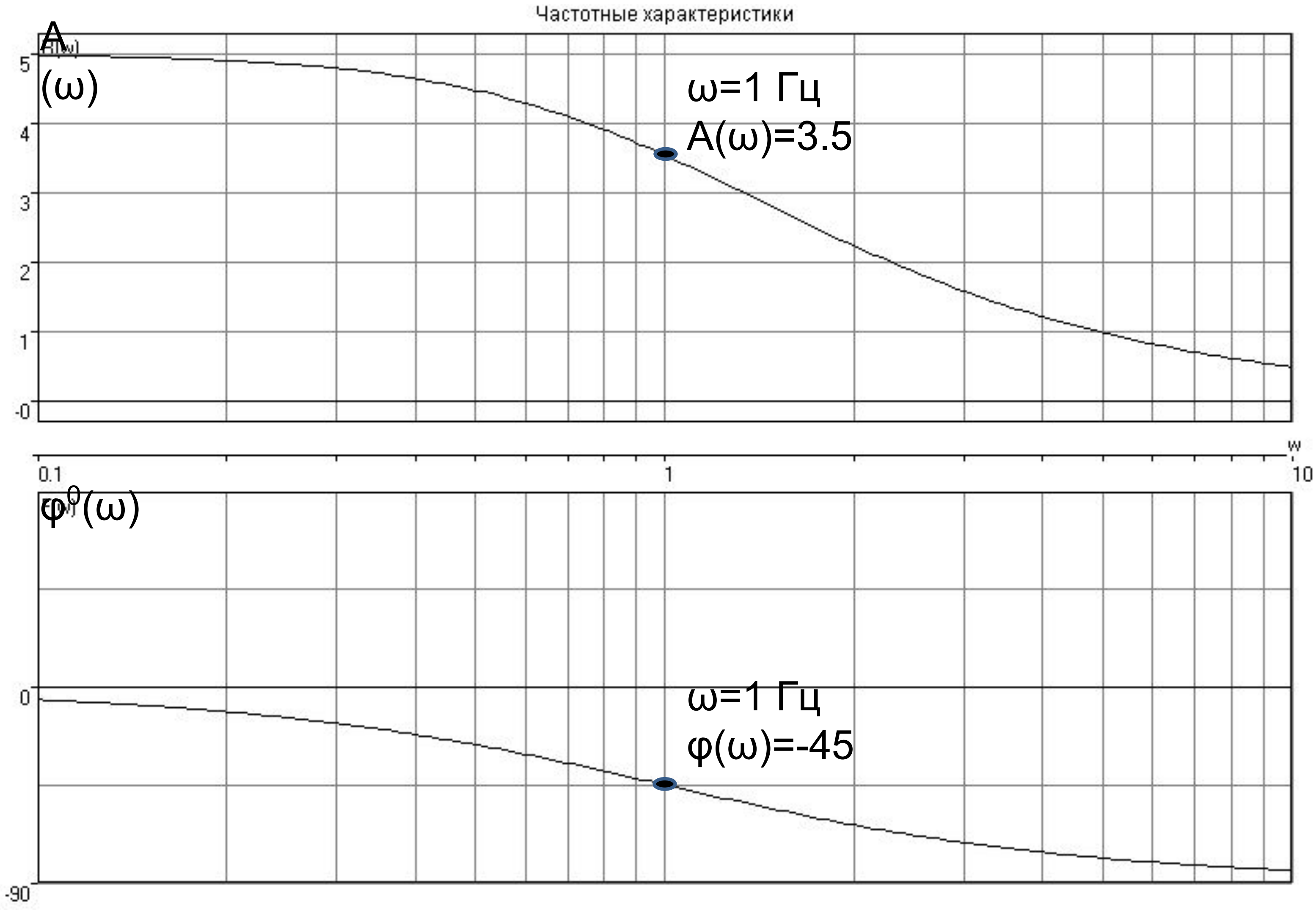
- Зависимости амплитуды $y_m$ и фазового сдвига $\phi$ от значений частоты $\omega$ характеризуют динамические свойства элементов и САУ.

- Так как амплитуда выходного сигнала определяется также значением амплитуды входного сигнала, то возникает необходимость рассматривать отношение амплитуд $y_m / x_m$.

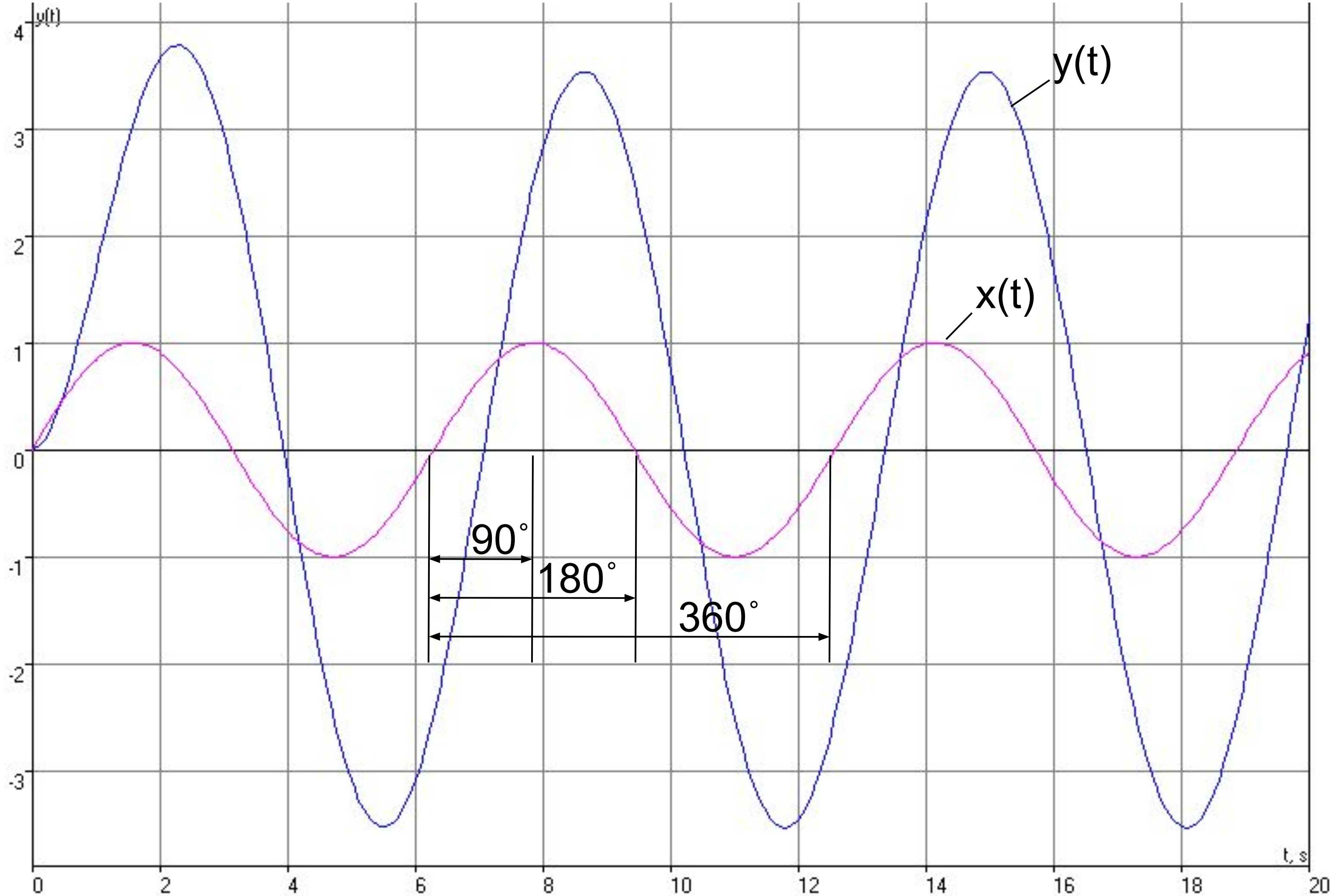
# Частотные характеристики

- Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигнала от частоты называют **амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)** и обозначают ***A (ω)*** .
- АЧХ характеризует полосу пропускание элементом или САУ сигналов различной частоты. Пропускание оценивается по отношению амплитуд $\mathbf{y_m / x_m}$.
- Зависимость фазового сдвига между выходным и входным сигналами от частоты называют **фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)** $\phi(\omega)$.
- Фазовый сдвиг <0 называется фазовым запаздыванием, фазовый сдвиг >0 называется фазовым опережением.

# Частотные характеристики



# Частотные характеристики



# Частотные характеристики

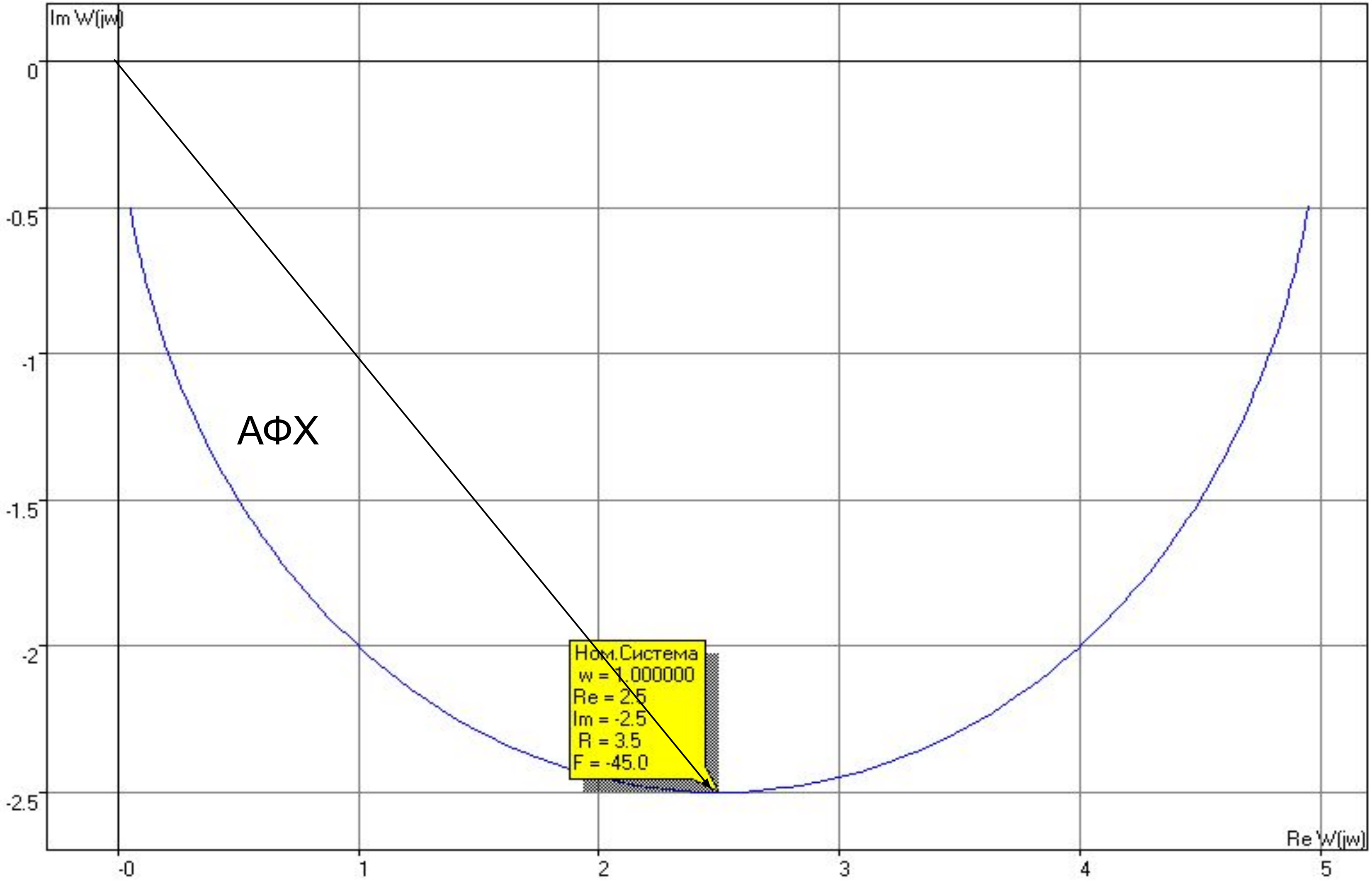
- **Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) (частотная передаточная функция, комплексный передачи)** $\boldsymbol{W(j\omega)}$ звена или САУ получается из **операторной функции передачи (ОФП)** $\boldsymbol{W(p)}$ этого звена или САУ **при замене** $\boldsymbol{p = j\omega}$ **и изменении частоты** $\boldsymbol{\omega}$ **от 0 до ∞.**

# Частотные характеристики

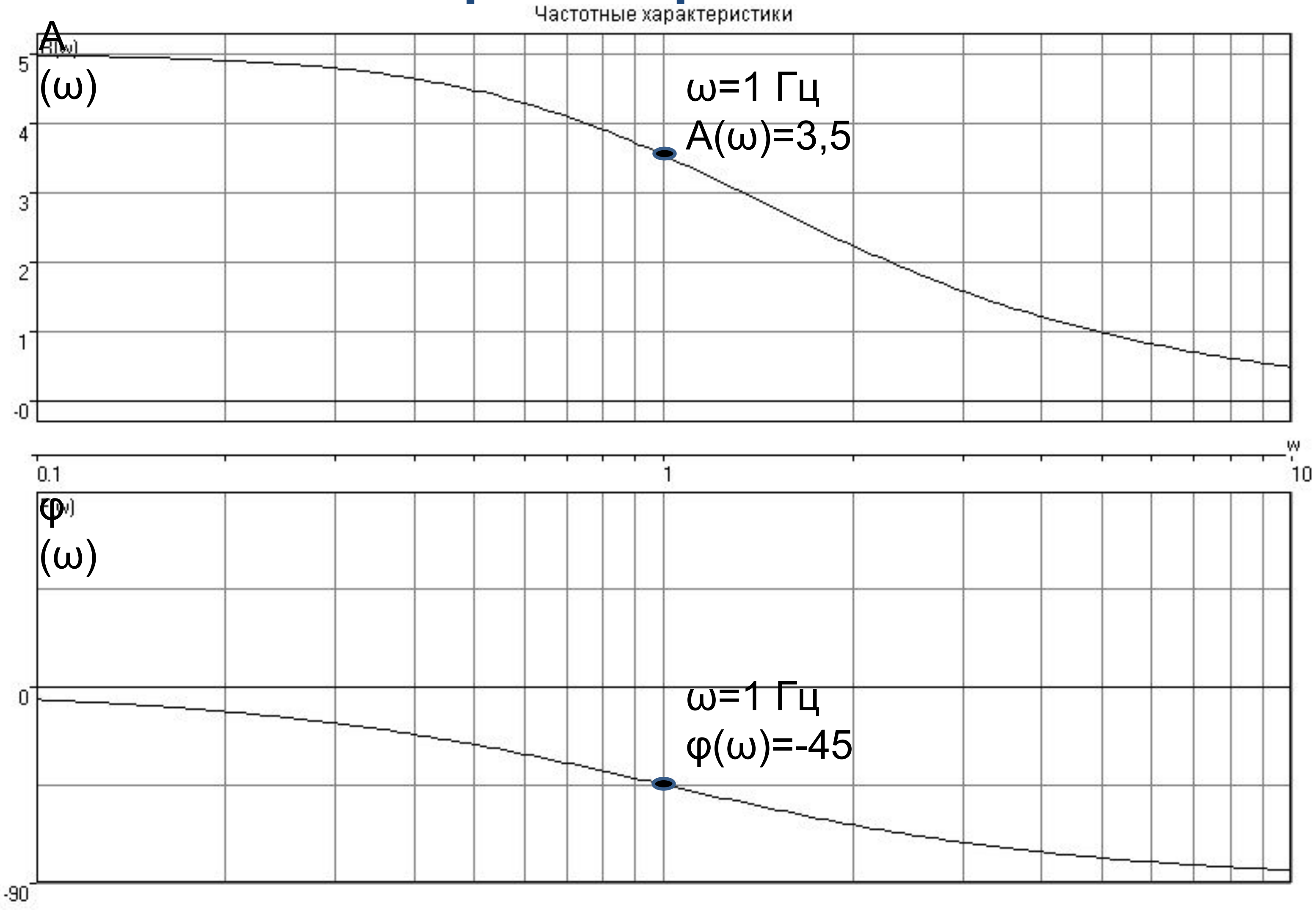
- Амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=\boldsymbol{A(\omega)e}^{j\varphi(\omega)}$ является функцией комплексного переменного $\boldsymbol{j\omega}$.

- Каждому значению частоты $\boldsymbol{\omega_i}$ соответствует комплексное число $\boldsymbol{W(j\omega_i)}$, представленное на комплексной плоскости изображающим вектором длиной $\boldsymbol{A(\omega_i)}$, расположенным к вещественной положительной оси под углом $\boldsymbol{\phi(\omega_i)}$.

# Частотные характеристики



# Частотные характеристики



# Частотные характеристики

- Выражение для амплитудно-фазовой характеристики конкретного элемента или САУ можно получить из его передаточной функции подстановкой $\boldsymbol{p=j\omega}$ :

$$\boldsymbol{W(j\omega)=W(p)}_{\,\boldsymbol{p=j\omega}} .$$

- АФХ $\boldsymbol{W(j\omega)}$ может быть представлена:
- **в алгебраической форме**

$$\boldsymbol{W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)};$$

- **в показательной форме**

$$\boldsymbol{W(j\omega) = A(\omega)e^{\,j\phi(\omega)}};$$

- **в тригонометрической форме** (по формуле Эйлера)

$$\boldsymbol{W(j\omega)=A(\omega)cos[\varphi(\omega)]+jA(\omega)sin[\varphi(\omega)]},$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ - вещественная и мнимая составляющие вектора $W(j\omega)$;

$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$\phi(\omega)=arc\ tg\ [V(\omega)/U(\omega)]$– фазовая частотная характеристика (ФЧХ).

# Частотные характеристики

- Рассмотрим пример.
- Пусть передаточная функция имеет вид: $W(\mathrm{p}) = \dfrac{5}{1 + 1p}$
- При замене $p = j\omega$ получим АФХ в комплексной форме:

$$W(\mathrm{jw}) = \frac{5}{1+1jw} = \frac{5}{1+1jw} * \frac{1-1jw}{1-1jw} = \frac{5-5jw}{1+1jw-1jw-1j^2w^2} = \frac{5-5jw}{1+w^2} = \frac{5}{1+w^2} - \frac{5w}{1+w^2}j$$

- Получим вещественную и мнимую составляющие АФХ:

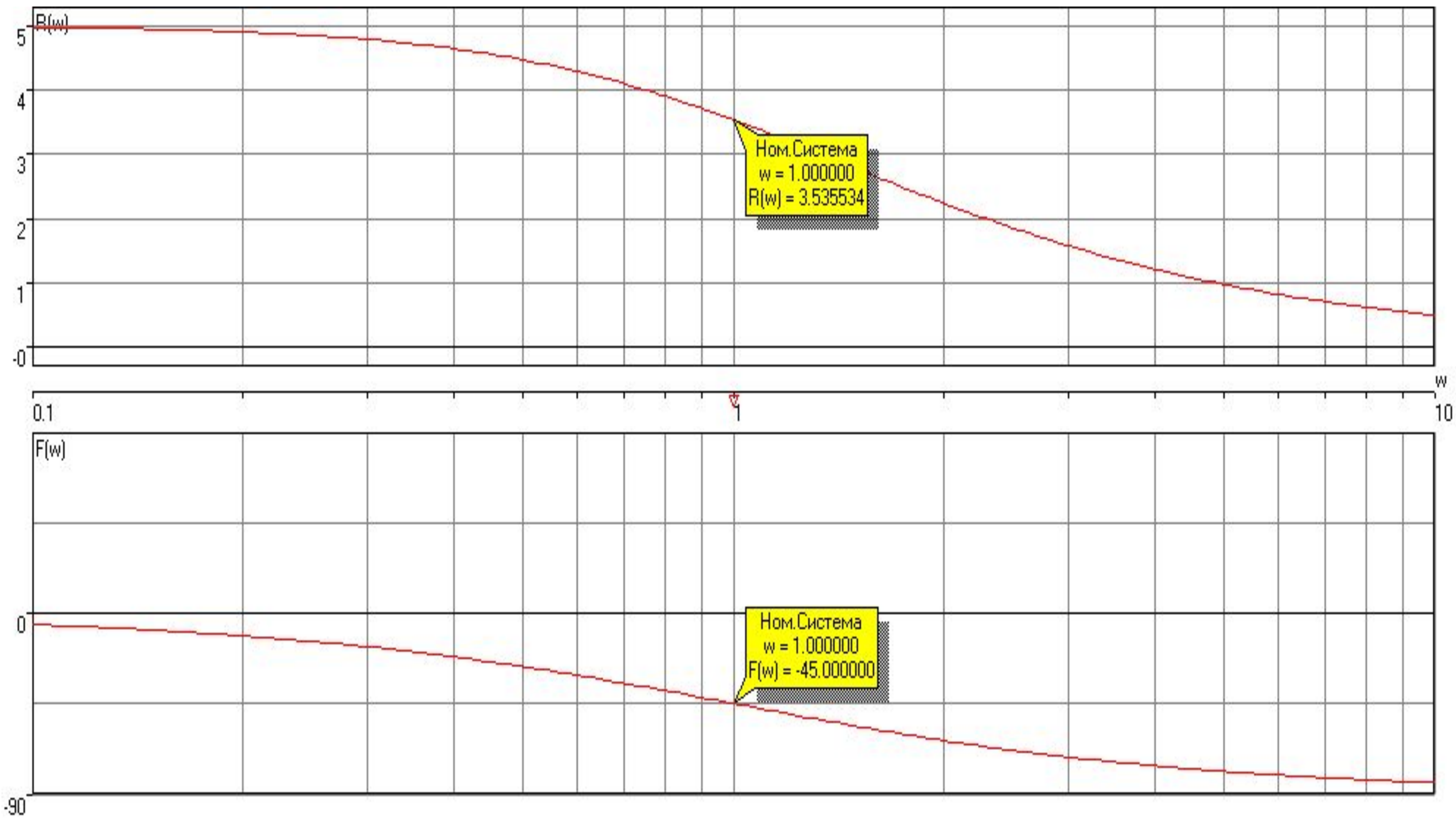
$$U(w) = \frac{5}{1+w^2} \qquad V(w) = -\frac{5w}{1+w^2}$$

# Частотные характеристики

| w | U(w) | V(w) | $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$ | φ(ω)=arc tg [V(ω)/U(ω)] |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| 0,1 | 4,950495 | -0,495050 | 4,975186 | -5,710593 |
| 0,2 | 4,807692 | -0,961538 | 4,902903 | -11,309932 |
| 0,3 | 4,587156 | -1,376147 | 4,789131 | -16,699244 |
| 0,4 | 4,310345 | -1,724138 | 4,642383 | -21,801409 |
| 0,5 | 4 | -2 | 4,472136 | -26,565051 |
| 0,6 | 3,676471 | -2,205882 | 4,287465 | -30,963757 |
| 0,7 | 3,355705 | -2,348993 | 4,096160 | -34,992020 |
| 0,8 | 3,048780 | -2,439024 | 3,904344 | -38,659808 |
| 0,9 | 2,762431 | -2,486188 | 3,716471 | -41,987212 |
| 1 | 2,5 | -2,5 | 3,535534 | -45 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

# Получаем АФХ

# Получаем АЧХ и ФЧХ



# Частотные характеристики

- В расчетах САУ широко используются логарифмические частотные характеристики.

- **Логарифмическая амплитудная частотная характеристика** (ЛАЧХ) звена или САУ строится в прямоугольной системе координат, где по оси ординат в линейном масштабе указывается величина ЛАЧХ в децибелах

$$L(\omega)=20\ lg\,|W(j\omega)|=20\ lg\ A(\omega),$$

а по оси абсцисс в логарифмическом масштабе указывается частота $\omega$ в $1/c$ (при этом равномерные изменения частоты в 10 раз представляются декадами).

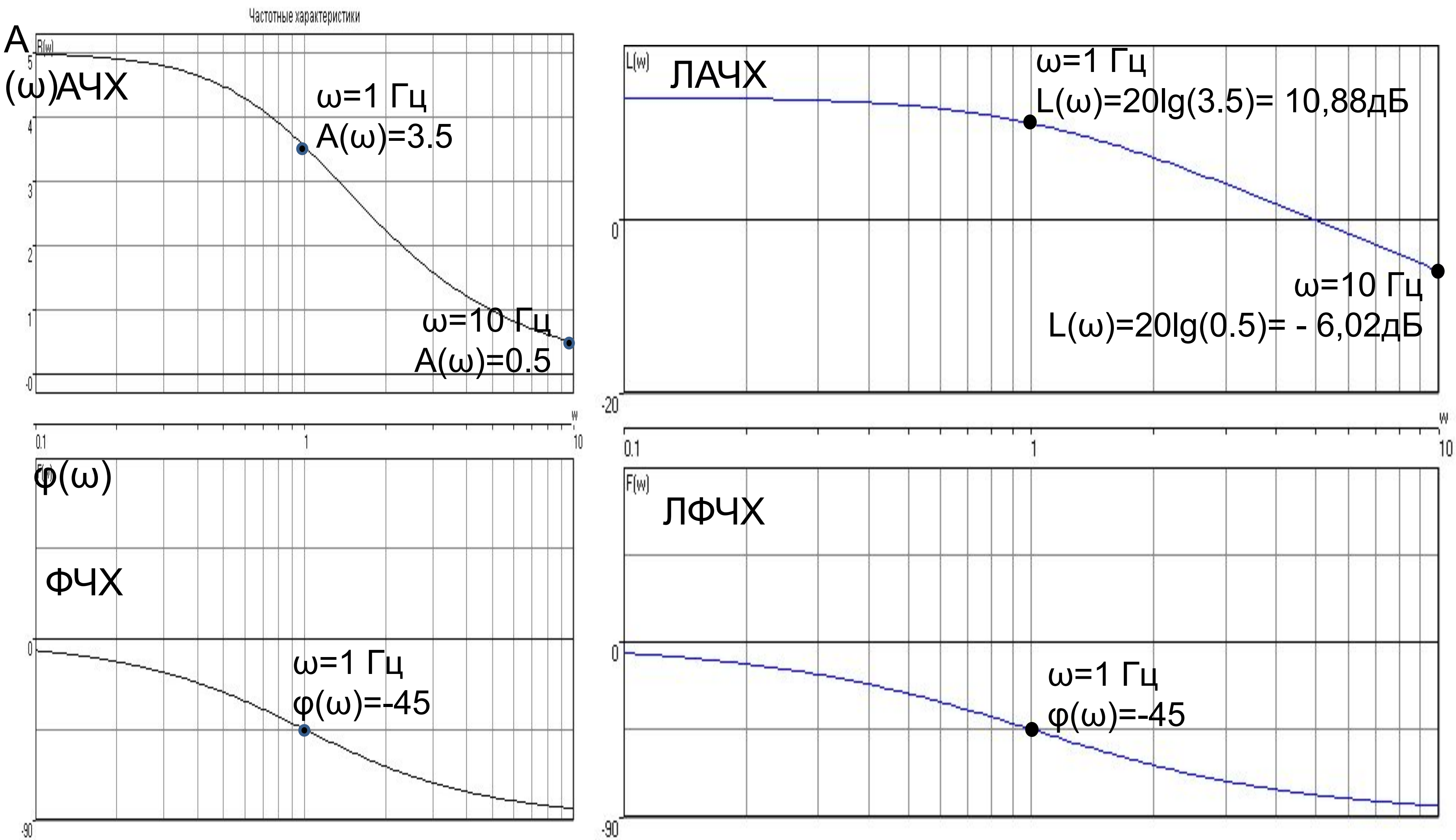
# Частотные характеристики

- Децибел равен 1/10 бела.
- Бел равен десятичному логарифму отношения мощностей на выходе и входе звена или САУ, пропорциональному отношению квадратов напряжений, токов, скоростей или других величин ($1 бел = lgP_2/P_1 = lgU_2^2/U_1^2$).
- Поэтому множитель $20=2\cdot10$, где $2$ отражает логарифмирование квадрата отношения выходной и входной величин, а $10$ – перевод белов в децибелы.

# Частотные характеристики

- **Логарифмическая фазовая частотная характеристика** (ЛФЧХ) $\boldsymbol{\varphi(\omega)} = arctg[V\boldsymbol{(\omega)/U(\omega)}]$ звена или САУ строится по оси ординат
  **в линейном масштабе**, где указывается угол фазового сдвига $\boldsymbol{\phi(\omega)}$ в радианах или угловых градусах, а по оси абсцисс указывается частота $\boldsymbol{\omega}$ **в логарифмическом масштабе** в *1/с*.

# Частотные логарифмич. характеристики



## Вопросы по разделу 1.1 «Математические модели САУ»

1. Как разбивается САУ на звенья для математического описания?
2. Какие основные формы преобразования входных переменных в переменные выхода используются в математических моделях САУ?
3. Что называется передаточной функцией или ОФП звена или САУ?
4. Что представляют собой временные характеристики звена или САУ?
5. Что представляют собой частотные характеристики звена или САУ?
6. Как строятся логарифмические частотные характеристики?

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Звенья с математическим описанием обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка называются **типовыми динамическими звеньями**.
- Из типовых динамических звеньев составляются алгоритмические структурные схемы САУ.
- Знание характеристик типовых звеньев облегчает изучение свойств САУ.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Классификацию типовых звеньев удобно осуществить, рассматривая различные частные случаи общего дифференциального уравнения:

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t)$$

В операторной форме:

$$a_0 p^2 y(p) + a_1 p y(p) + a_2 y(p) = b_0 p x(p) + b_1 x(p)$$

## 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Вынесем *x(p)* и *y(p)* за скобки:

$$y(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = x(p)(b_0p + b_1)$$

- Передаточная функция в общем виде для типовых звеньев САУ:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_0p + b_1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$$

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Принято уравнение:

$$y(p)(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = x(p)(b_0 p + b_1)$$

- записывать в виде (разделив на $a_2$):

$$y(p)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) = x(p)K(1 + \tau p)$$

- где $T_2^2 = \dfrac{a_0}{a_2}, \quad T_1 = \dfrac{a_1}{a_2}, \quad K = \dfrac{b_1}{a_2}, \quad \tau = \dfrac{b_0}{b_1}.$
- Параметры $T_2$, $T_1$, $\tau$ называются ***постоянными времени***, измеряемыми в секундах;
- *K* называется ***коэффициентом передачи***.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Передаточная функция из уравнения:

$$y(p)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) = x(p)K(1 + \tau p)$$

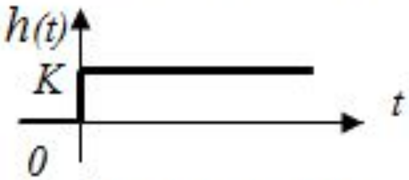
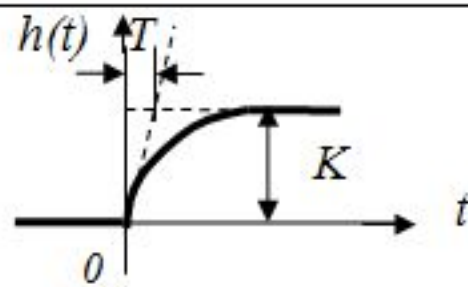
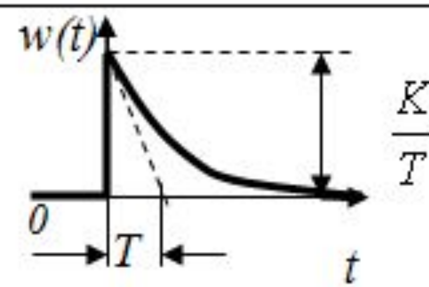
- в общем виде для типовых звеньев САУ:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K(1 + \tau p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

- **Типовые динамические звенья** делятся по зависимостям выходной величины $\boldsymbol{y}$ от входного воздействия $\boldsymbol{x}$ в установившихся режимах работы на **4 типа:**
- **1) позиционные**, в которых выходная величина пропорциональна входному воздействию $\boldsymbol{y=Kx}$;
- **2) интегрирующие,** в которых выходная величина пропорциональна интегралу от входной величины $\boldsymbol{y=K\int xdt}$;
- **3) дифференцирующие**, в которых выходная величина пропорциональна дифференциалу (первой производной по времени) от входного воздействия $\boldsymbol{y=K\,dx/dt}$;
- **4) запаздывающие**, в которых выходная величина равна входной величине, сдвинутой в текущем времени на время запаздывания $\boldsymbol{\tau}$ $\boldsymbol{y=x(t-\tau)}$.

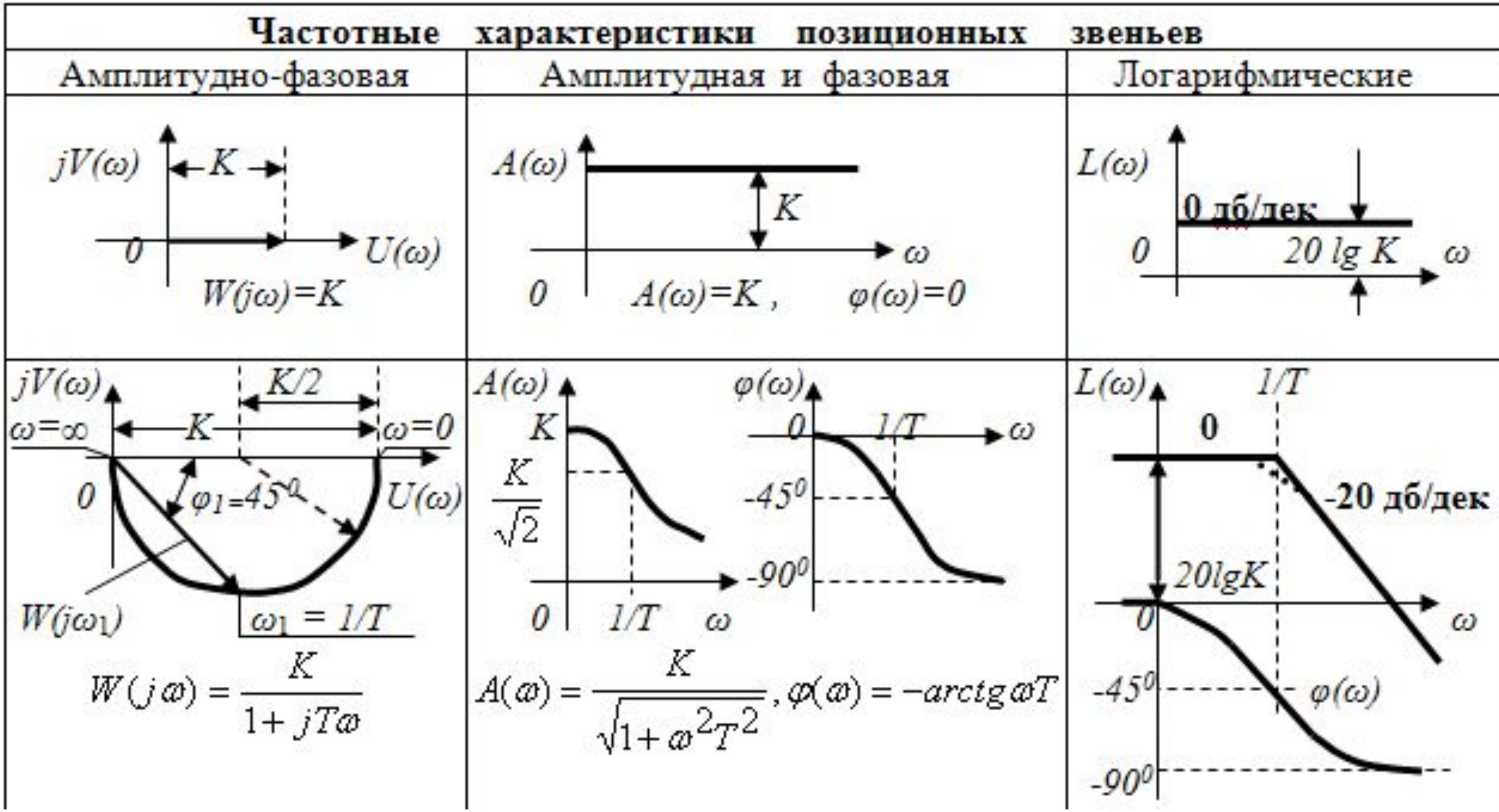
# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Пример:

| Тип звена и его передаточная функция | Временные характеристики позиционных звеньев | |
|---|---|---|
| | Переходная функция ***h(t)*** | Функция веса ***w(t)*** |
| 1. Безынерционное<br>$W(p) = K$ | <br>$h(t) = K \cdot 1(t)$ | <br>$w(t) = K \cdot \delta(t)$ |
| 2. Апериодическое 1-го порядка<br>$W(p) = \dfrac{K}{1 + Tp}$ | <br>$h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$ | <br>$w(t) = \dfrac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$ |

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Пример:



# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Рассмотрим **методику получения временных и частотных характеристик** на примере позиционного апериодического (инерционного) звена первого порядка имеющего передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{Tp+1},$$

- где $T$ – постоянная времени звена; $K$ – коэффициент передачи звена.

- Дифференциальное уравнение процесса управления:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Переходная функция звена *h(t)=y(t)*** получается в виде суммы общего и частного решений дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях и подаче на вход единичного ступенчатого воздействия $x(t)=1[t]$:

$$h(t)=y(t)=Ce^{pt}+y(t=\infty)=-K\cdot 1[t]\cdot e^{-\frac{t}{T}}+K\cdot 1[t]=K(1-e^{-\frac{t}{T}})\cdot 1[t],$$

- где $p=-1/T$ – корень характеристического уравнения $Tp+1=0$; $C=-K\cdot 1[t]$ – постоянная интегрирования при нулевых начальных условиях $y(t)_{t=0}=Ce^{-0/T}+K\cdot 1[t]=0$.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Весовая функция звена** определяется дифференцированием *h(t)* по времени:

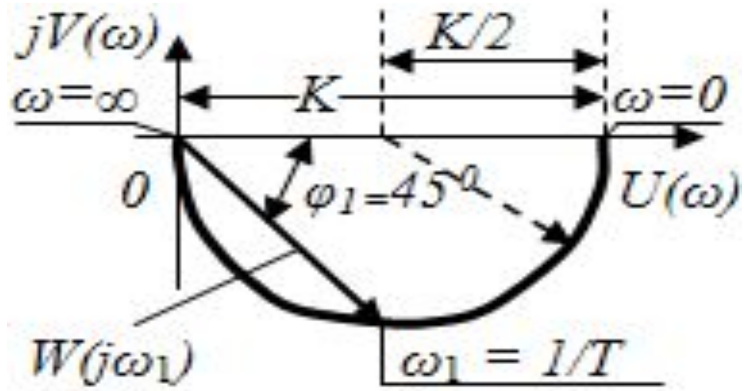
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\{K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1[t]\}}{dt} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1[t].$$

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Частотная амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) получается** из уравнения ОПФ: $W(p)=\dfrac{y(p)}{x(p)}=\dfrac{K}{Tp+1}$,
- при $p=j\omega$ **АФХ** опишется уравнением:

$$W(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}=\frac{K}{T^2\omega^2+1}-j\frac{K\omega T}{T^2\omega^2+1}=U(\omega)-jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- при изменении $\omega$ от 0 до бесконечности **АФХ** имеет вид полуокружности с радиусом $K/2$.




$$W(j\omega)=\frac{K}{1+jT\omega}$$

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Амплитудная *A(ω)* и фазовая *φ(ω)* частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ)** определяются из:

$$W(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}=\frac{K}{T^2\omega^2+1}-j\frac{K\omega T}{T^2\omega^2+1}=U(\omega)-jV(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- и имеют вид:

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},$$

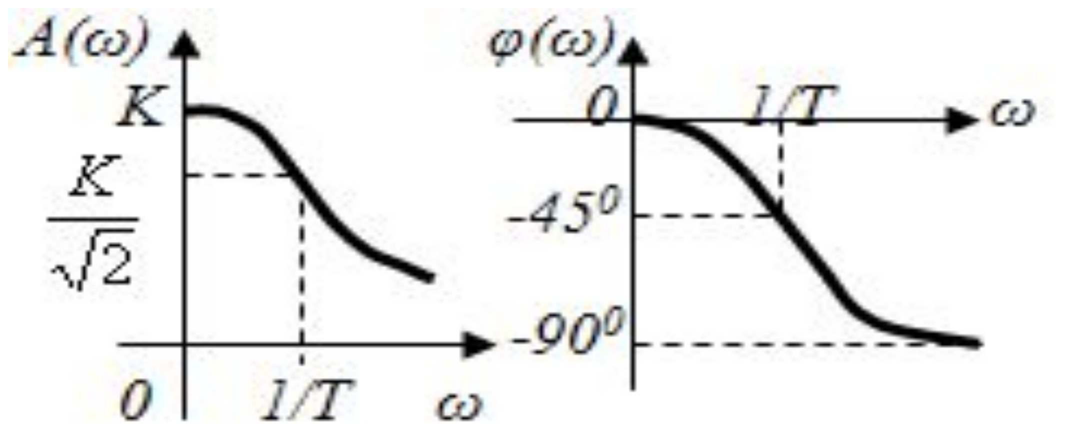
- при $\omega=0$ $A(\omega)=K$, при $\omega=1/T$ $A(\omega)=K/\sqrt{2}$, при $\omega=\infty$ $A(\omega)=0$.

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{-V(\omega)}{U(\omega)}=-arctg\,\omega T,$$

- фазовый сдвиг при изменении частоты от 0 до ∞ изменяется от $0^o$ до $-90^o$ и $\phi(\omega)=-45^o$ при $\omega=1/T$.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Амплитудная *A(ω)* и фазовая *φ(ω)* частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ)** :




$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \varphi(\omega) = -arctg\,\omega T$$

- при $\omega$=0 $A(\omega)=K$, при $\omega=1/T$ $A(\omega)=K/\sqrt{2}$ , при $\omega=\infty$ $A(\omega)$= 0;
- фазовый сдвиг при изменении частоты от 0 до ∞

изменяется от $0^o$ до $-90^o$ и $\phi(\omega)= -45^o$ при $\omega=1/T$.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ)** описывается выражением:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

- ЛАЧХ, построенная по данному уравнению имеет две асимптоты:
- а) при частотах $\omega<1/T$ в $\omega^2T^2<<1$, тогда $\omega^2T^2+1\approx1$ и асимптота ЛАЧХ представляется горизонтальной прямой;
- б) при частотах $\omega>1/T$ в $\omega^2T^2>>1$, тогда и асимптота ЛАЧХ $L(\omega)_Б=20lgK–20lg\omega T$ представляется прямой линией с наклоном минус 20 децибел на декаду (дб/дек) относительно оси абсцисс.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

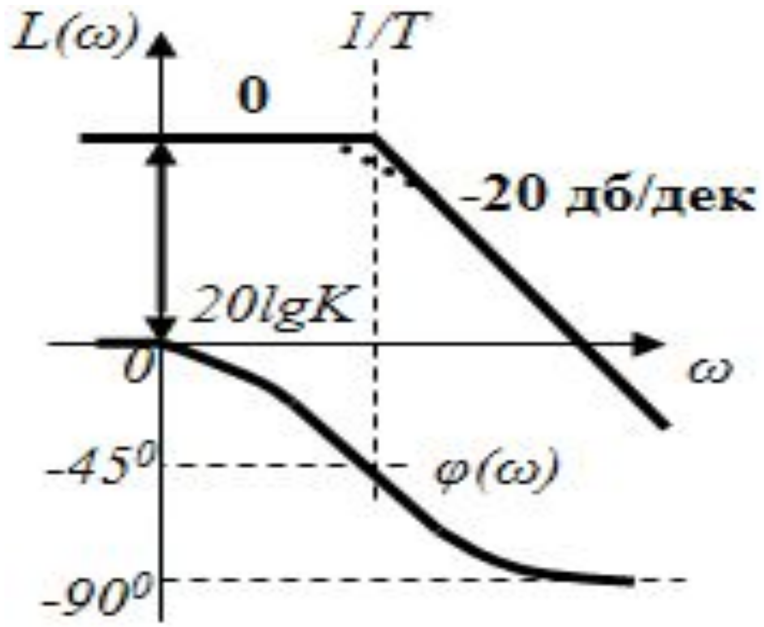
- Эти асимптоты сопрягаются при частоте сопряжения $\omega_C=1/T$, при этой частоте асимптотическая ЛАЧХ имеет превышение коэффициента передачи по сравнению с непрерывной ЛАЧХ на величину:

$$\Delta L(\omega_C) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 T^2 + 1} = 3{,}01\ \partial б,$$

- которой в расчётах, ввиду малости, можно пренебречь и считать, что асимптотическая ЛАЧХ состоит из горизонтальной и наклонной прямых, образованных отрезками асимптот *А* и *Б*, сопрягающихся при $\omega_C=1/T$.

# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- **Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ)** звена имеет такое же расчетное выражение как и ФЧХ, но строится совместно с ЛАЧХ этого звена в логарифмическом масштабе частот и в линейном масштабе угла фазового сдвига, измеряемого в радианах или угловых градусах.



# 1.2. Типовые звенья САУ и их характеристики

- Аналогичным путем получаются временные и частотные характеристики других типовых звеньев САУ, математические модели которых представлены линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

- Линеаризация дифференциальных уравнений обычно осуществляется способом их разложения в степенной ряд Тейлора с отбрасыванием членов выше второго порядка.

# Вопросы по разделу 1.1 «Математические модели САУ»

1. Как разбивается САУ на звенья для математического описания?
2. Какие основные формы преобразования входных переменных в переменные выхода используются в математических моделях САУ?
3. Что называется передаточной функцией или ОФП звена или САУ?
4. Что представляют собой временные характеристики звена или САУ?
5. Что представляют собой частотные характеристики звена или САУ?
6. Как строятся логарифмические частотные характеристики?

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Изображение САУ в виде совокупности однонаправленных типовых звеньев с указанием связей между ними и с внешней средой называется **структурной схемой САУ** (алгоритмической структурной схемой или просто структурой САУ), которая является графической интерпретацией описания математической модели САУ операторными функциями передачи (ОФП).

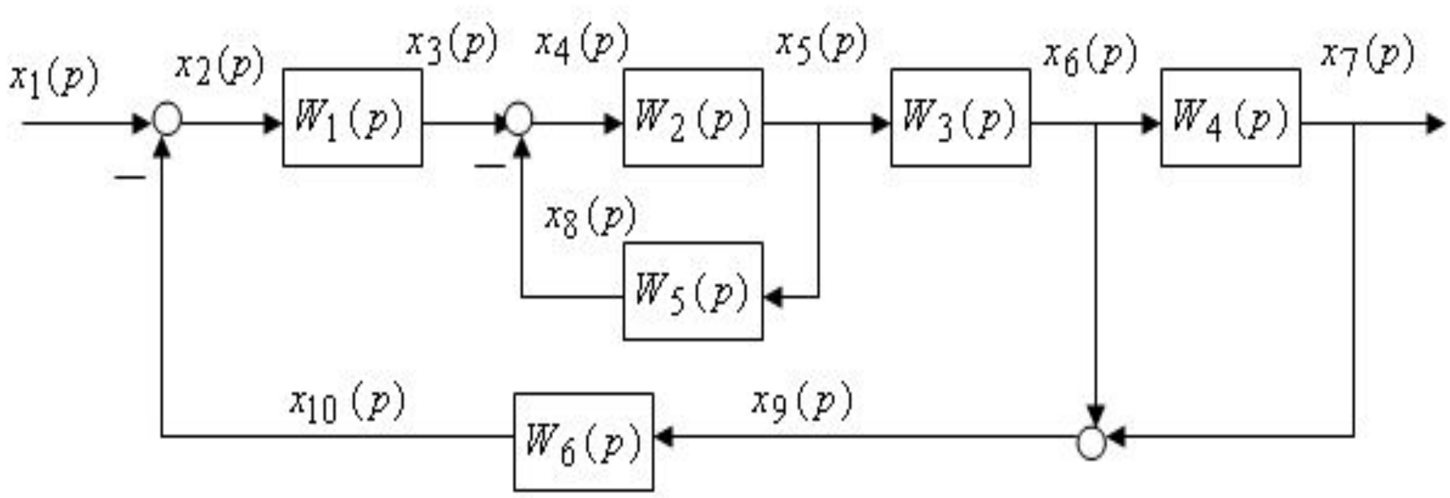
- Данный способ составляет сущность ***структурного метода*** представления САУ различной физической природы, который дает наглядное представление взаимосвязи элементов, звеньев и частей САУ и позволяет оценивать основные свойства переходных и установившихся процессов в САУ.

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- На структурных схемах САУ каждое звено обозначается прямоугольником, в котором записывается ОФП звена или её обозначение.
- Входные воздействия обозначаются стрелками, направленными в звено, выходные величины – стрелками, направленными из звена.
- Сумматоры обозначаются кружком, в который направлены стрелки суммируемых величин (вычитаемые величины обозначаются с минусом около стрелки), а результирующая величина обозначается стрелкой, выходящей из кружка.
- Устройства САУ, в которых имеется обратная связь, представляется в структурной схеме контуром с обратной связью.

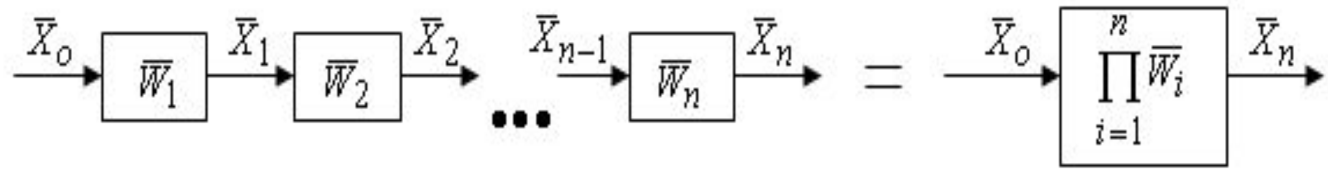
# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

производится с целью получения упрощенного эквивалентного звена или структуры САУ, точно учитывающих математическое описание физических процессов в реальных звеньях исходной САУ, например, в САУ со структурной схемой:



# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Для этого используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:
- 1. Преобразование **последовательно соединенных звеньев**:

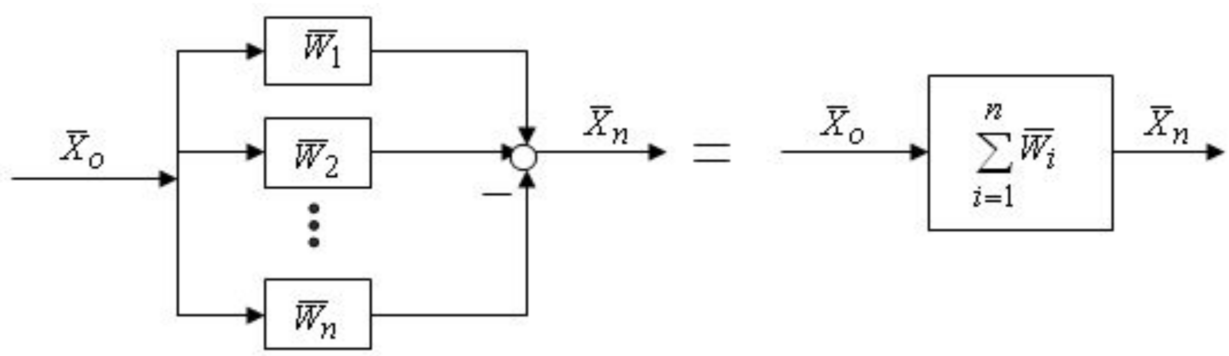



$$\overline{X}_n = (\overline{W}_1 \cdot \overline{W}_2 \cdots \overline{W}_n)\overline{X}_0 = (\prod_{i=1}^{n}\overline{W}_i)\overline{X}_0.$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- 2. Преобразование **параллельно соединенных звеньев**:

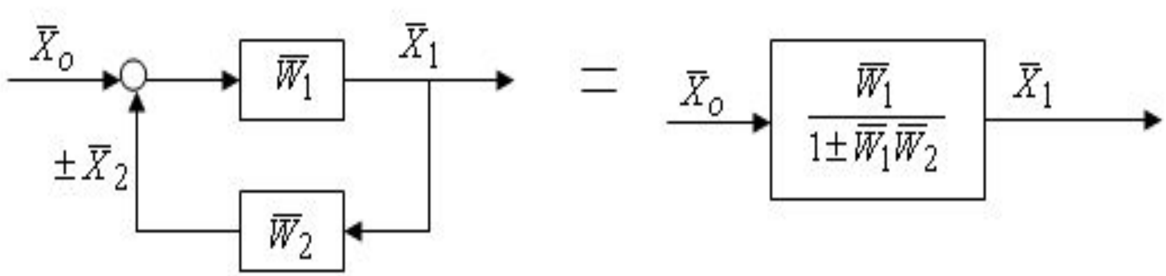



$$\overline{X}_n = (\overline{W}_1 + \overline{W}_2 \ldots - \overline{W}_n)\overline{X}_0 = (\sum_{i=1}^{n} \overline{W}_i)\overline{X}_0.$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **3.** Правило преобразования **контура с обратной связью:**



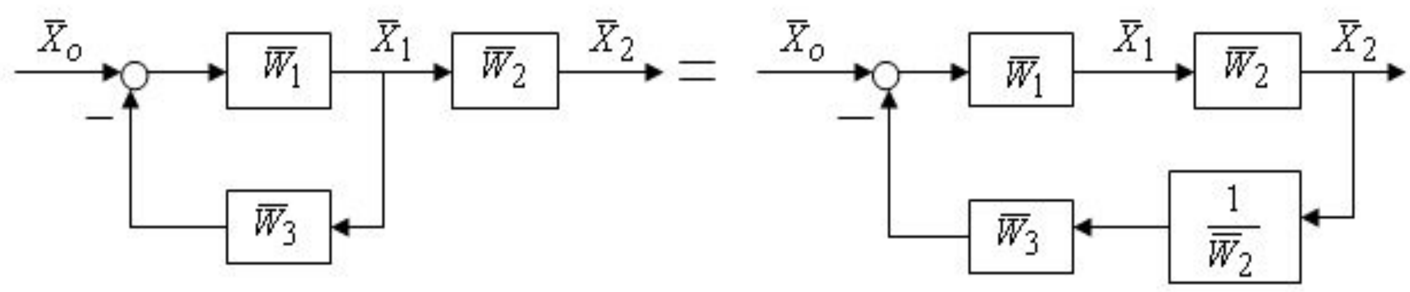

$$\overline{X}_1 = \overline{W}_1(\overline{X}_0 \pm \overline{X}_2) = \overline{W}_1\overline{X}_0 \pm \overline{W}_1\overline{W}_2\overline{X}_1; \quad \overline{X}_1 = \frac{\overline{W}_1}{1 \mp \overline{W}_1\overline{W}_2}\overline{X}_0.$$

- \+ для отрицательной обратной связи;
- \- для положительной обратной связи.

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **4.** Правила **переноса узла разветвления сигнала**:
- а) по направлению распространения сигнала

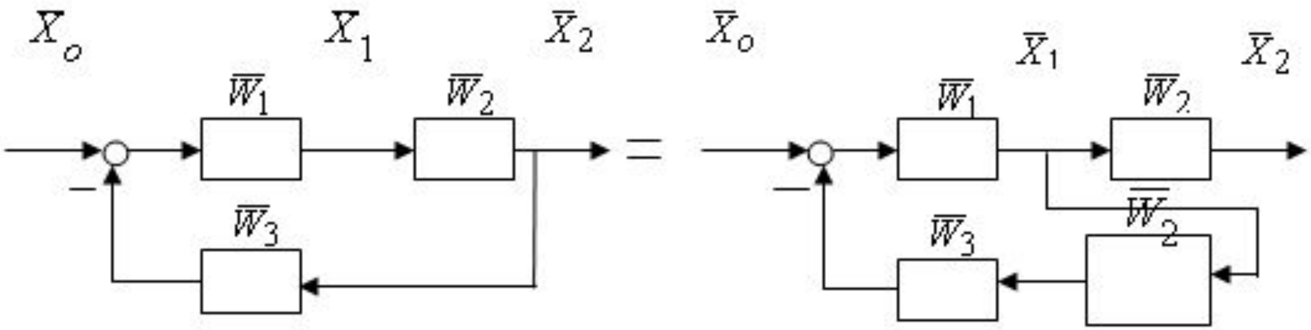



$$\overline{X}_2 = \overline{W}_2 \frac{\overline{W}_1}{1+\overline{W}_3\overline{W}_1}\overline{X}_0; \qquad \overline{X}_2 = \frac{\overline{W}_1\overline{W}_2\overline{X}_0}{1+\overline{W}_3\frac{1}{\overline{W}_2}\overline{W}_1\overline{W}_2} = \frac{\overline{W}_1\overline{W}_2\overline{X}_0}{1+\overline{W}_3\overline{W}_1}.$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **4.** Правила **переноса узла разветвления сигнала**:
- б) против направления распространения сигнала

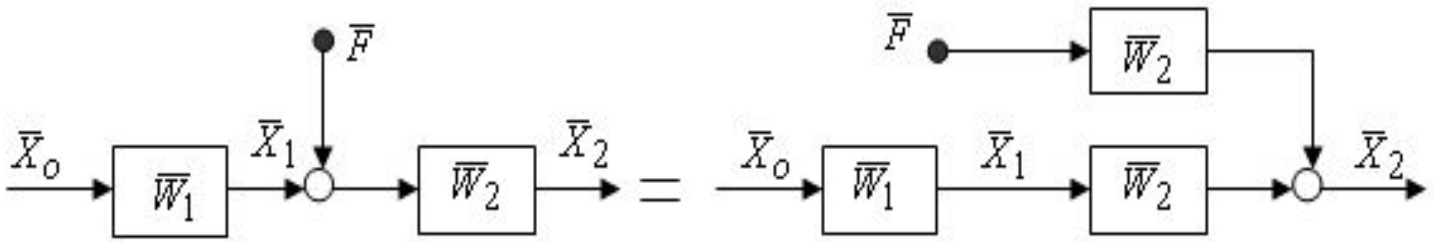



$$\overline{X}_2 = \frac{\overline{W}_1\overline{W}_2}{1+\overline{W}_1\overline{W}_2\overline{W}_3}\overline{X}_0; \quad \overline{X}_2 = \overline{W}_2\frac{\overline{W}_1}{1+\overline{W}_1\overline{W}_2\overline{W}_3}\overline{X}_0.$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **5.** Правила **переноса сумматора сигналов**:
- а) по направлению распространения сигнала

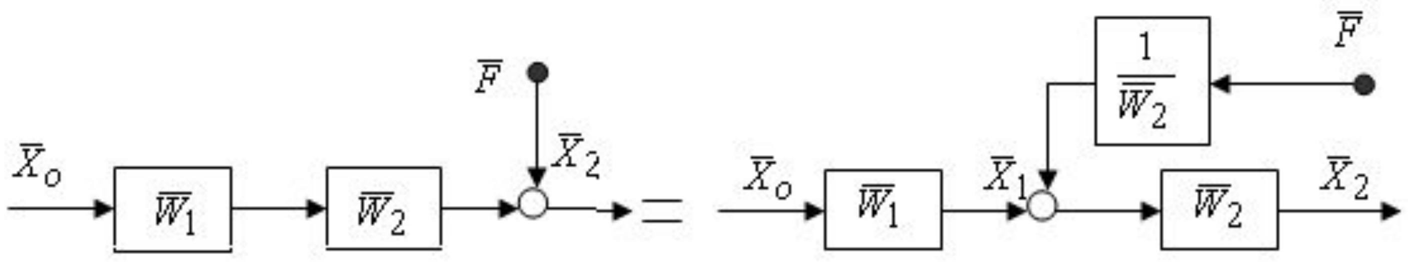



$$\overline{X}_2 = \overline{W}_2(\overline{F} + \overline{W}_1\overline{X}_0); \quad \overline{X}_2 = \overline{W}_2\overline{F} + \overline{W}_2\overline{W}_1\overline{X}_0.$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **5.** Правила **переноса сумматора сигналов**:
- б) против направления распространения сигнала




$$\overline{X}_2 = \overline{F} + \overline{W}_1\overline{W}_2\overline{X}_0; \quad \overline{X}_2 = \overline{W}_2\left(\frac{1}{\overline{W}_2}\overline{F} + \overline{W}_1\overline{X}_0\right).$$

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

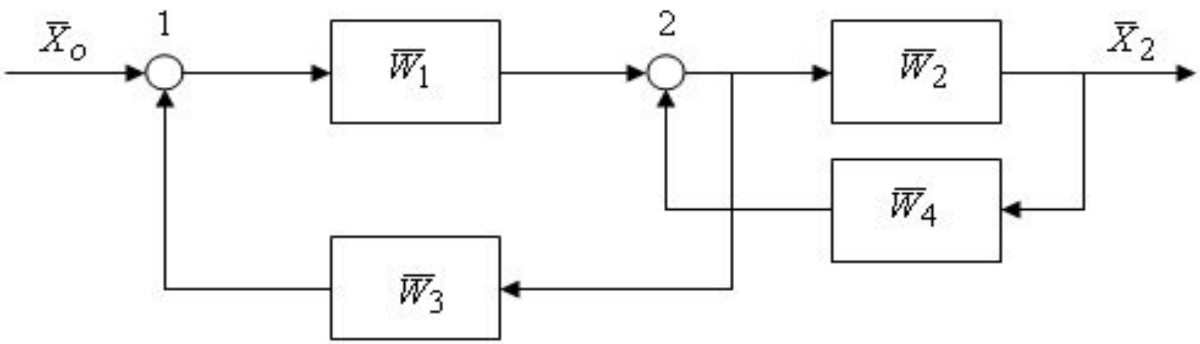
- Используются следующие **шесть основных правил эквивалентных преобразований структурных схем** без изменений ОФП САУ:

- **6.** Правила **перестановка сумматоров в структурных схемах с перекрещивающимися обратными связями** для выделения явно выраженных замкнутых контуров управления.

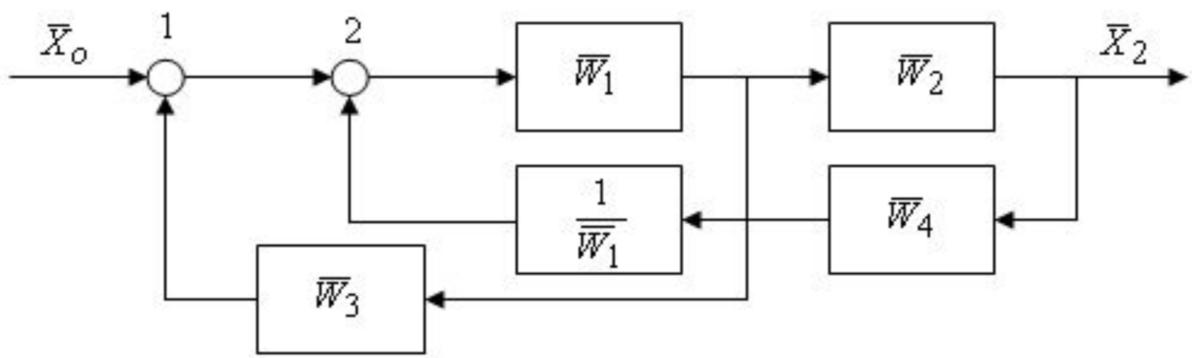
- Перестановка сумматоров выполняется в два этапа.

# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- В структурных схемах с перекрещивающимися обратными связями:

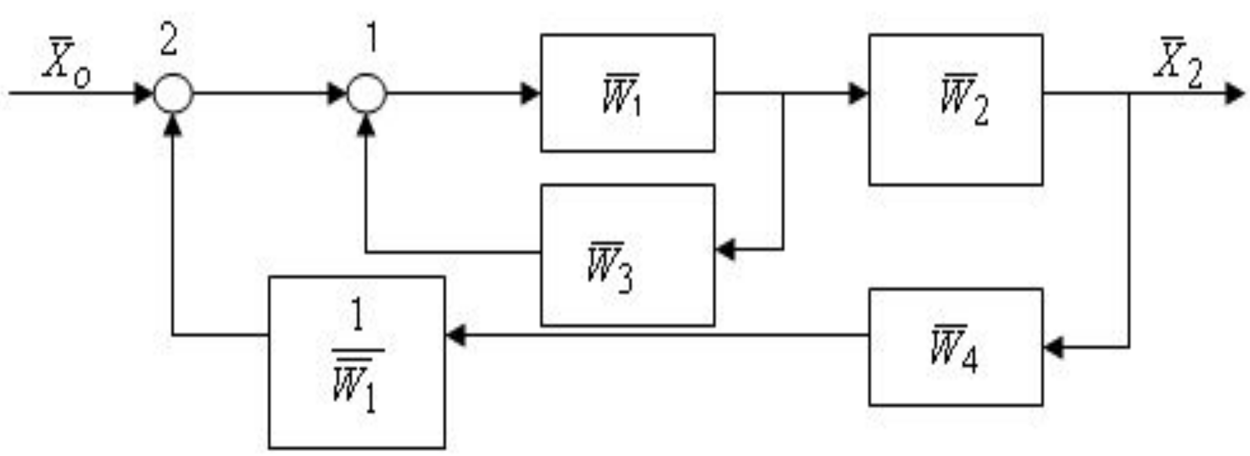



а) на первом этапе преобразования сумматоры совмещают в ближайшем к входу канале по правилу **5**,б (правилу переноса сумматора сигналов против направления распространения сигнала):



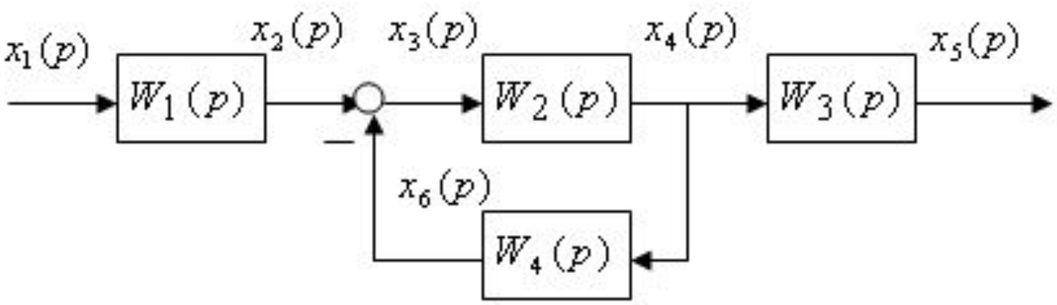
# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- б) на втором этапе преобразования сумматоры переставляют местами в совмещенном канале так, чтобы образовались явно выраженные замкнутые контуры с обратной связью, которые преобразуются по правилу **3** (правилу преобразования контура с обратной связью):



# 1.3. Преобразование структурных схем САУ

- **Пример.**




$$W(p) = W_1(p) * \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) * W_4(p)} * W_3(p) = \frac{W_1(p) * W_2(p) * W_3(p)}{1 + W_2(p) * W_4(p)}$$

**Вопросы по разделу 1.3 «Преобразование структурных схем»**

1. Как составляется алгоритмическая структурная схема САУ?
2. Как осуществляются эквивалентные преобразования структурных схем САУ без изменения их ОФП?
3. Запишите ОФП последовательно соединенных звеньев.
4. Запишите ОФП параллельно соединенных звеньев.
5. Запишите эквивалентную ОФП контура с обратной связью.
6. Запишите условия эквивалентного переноса узла разветвления сигнала по направлению распространения сигналов в САУ от входа к выходу.
7. Запишите условия эквивалентного переноса узла разветвления сигнала против направления распространения сигналов в САУ.
8. Запишите условия эквивалентного переноса сумматора по направлению распространения сигналов в САУ.
9. Запишите условия эквивалентного переноса сумматора против направления распространения сигналов в САУ.
10. Как преобразуют структурные схемы САУ с перекрещивающимися обратными связями?

## 1.4. Передаточные функции замкнутых САУ

В большинстве случаев одномерные линейные замкнутые САУ имеют одну выходную управляемую величину $y(t)$ и два входных воздействия, задающее $g(t)$ и возмущающее $f(t)$. Для расчётов таких САУ ***для каждого входного воздействия*** составляются ***отдельные ОФП*** для частных случаев отсутствия других входных воздействий. По каждой полученной ОФП исследуется устойчивость и качество замкнутой САУ при данном входном воздействии, а при необходимости учета одновременного влияния нескольких входных воздействий переходный процесс в линейной САУ определяется суммой переходных процессов от каждого воздействия по принципу суперпозиции.

Для получения ОФП замкнутой САУ необходимо с использованием правил преобразования структурных схем составить алгоритмическую структурную схему САУ с выделенным каналом влияния возмущающего воздействия ***f(t)*** на выходную управляемую величину ***y(t)*** (рис. 1.4.1):

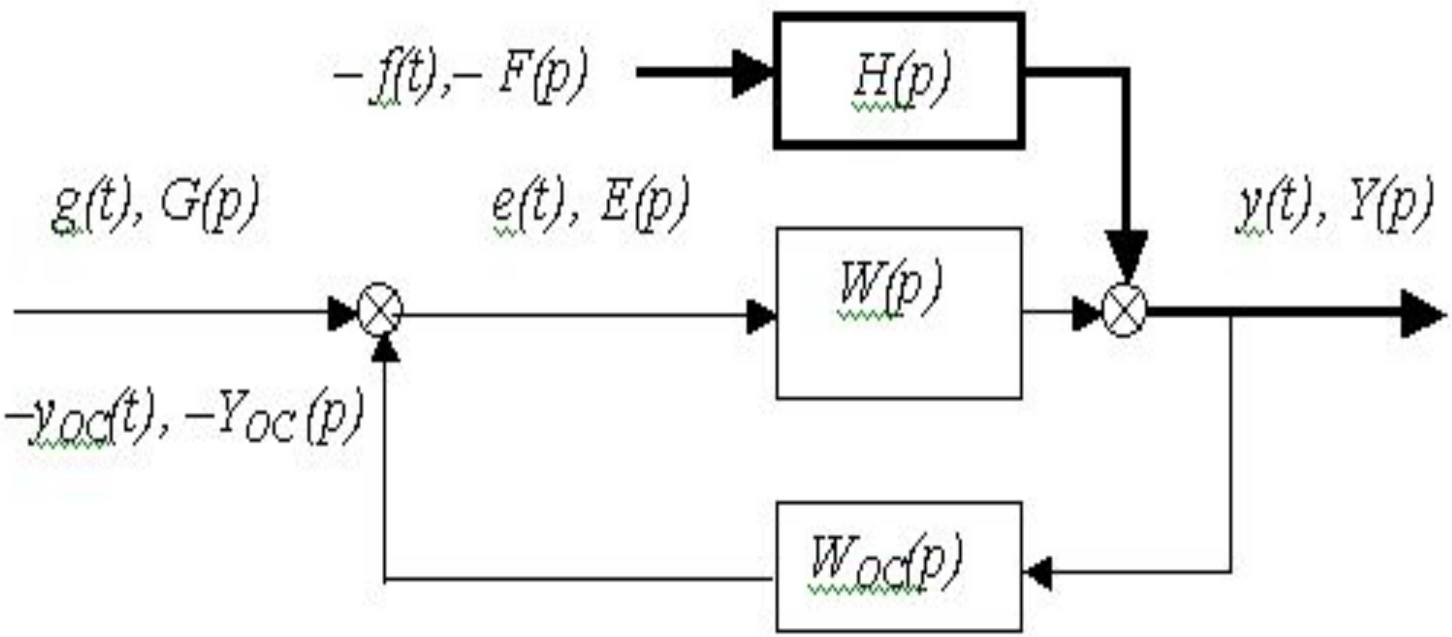



Рис. 1.4.1. Структура САУ с выделенным каналом возмущения.

Для каждого возмущающего воздействия $f(t)$ для расчётов САУ используются **три типовых передаточных функции** замкнутой САУ с выделенным каналом влияния возмущения $f(t)$ на выходную величину $y(t)$.

1. ОФП замкнутой САУ **по задающему воздействию** $\boldsymbol{g(t)}$ (при отсутствии возмущающих воздействий $f(t)=0$):

$$\Phi(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\frac{W(p)}{1+W_{OC}(p)W(p)}. \qquad (1.4.1)$$

2. ОФП замкнутой САУ **по ошибке управления** $\boldsymbol{e(t)}$ (при отсутствии возмущающих воздействий $f(t)=0$):

$$\Phi_e(p)=\frac{E(p)}{G(p)}=\frac{G(p)-W_{OC}(p)Y(p)}{G(p)}=1-W_{OC}(p)\Phi(p)=$$

$$=1-W_{OC}(p)\frac{W(p)}{1+W_{OC}(p)W(p)}=\frac{1}{1+W_{OC}(p)W(p)}. \qquad (1.4.2)$$

3. ОФП замкнутой САУ **по возмущающему воздействию** $\boldsymbol{f(t)}$ (при отсутствии задающего воздействия $g(t)=0$):

$$\Phi_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{1}{F(p)}\frac{F(p)H(p)}{1+W_{OC}(p)W(p)}=\frac{H(p)}{1+W_{OC}(p)W(p)}. \qquad (1.4.3)$$

## Вопросы по разделу 1.4 «Передаточные функции замкнутых САУ»

1. Как построить структурную схему САУ для исследования процессов управления по каждому входному воздействию в отдельности?
2. Как получить ОФП замкнутой САУ по задающему воздействию?
3. Как получить ОФП замкнутой САУ по ошибке управления?
4. Как получить ОФП замкнутой САУ по возмущающему воздействию?
5. Как оценить качество процесса управления в САУ при одновременном влиянии задающего и возмущающего воздействий?