

Определенный интеграл

Лекция 13.12.2016

Элементы интегрального

исчисления

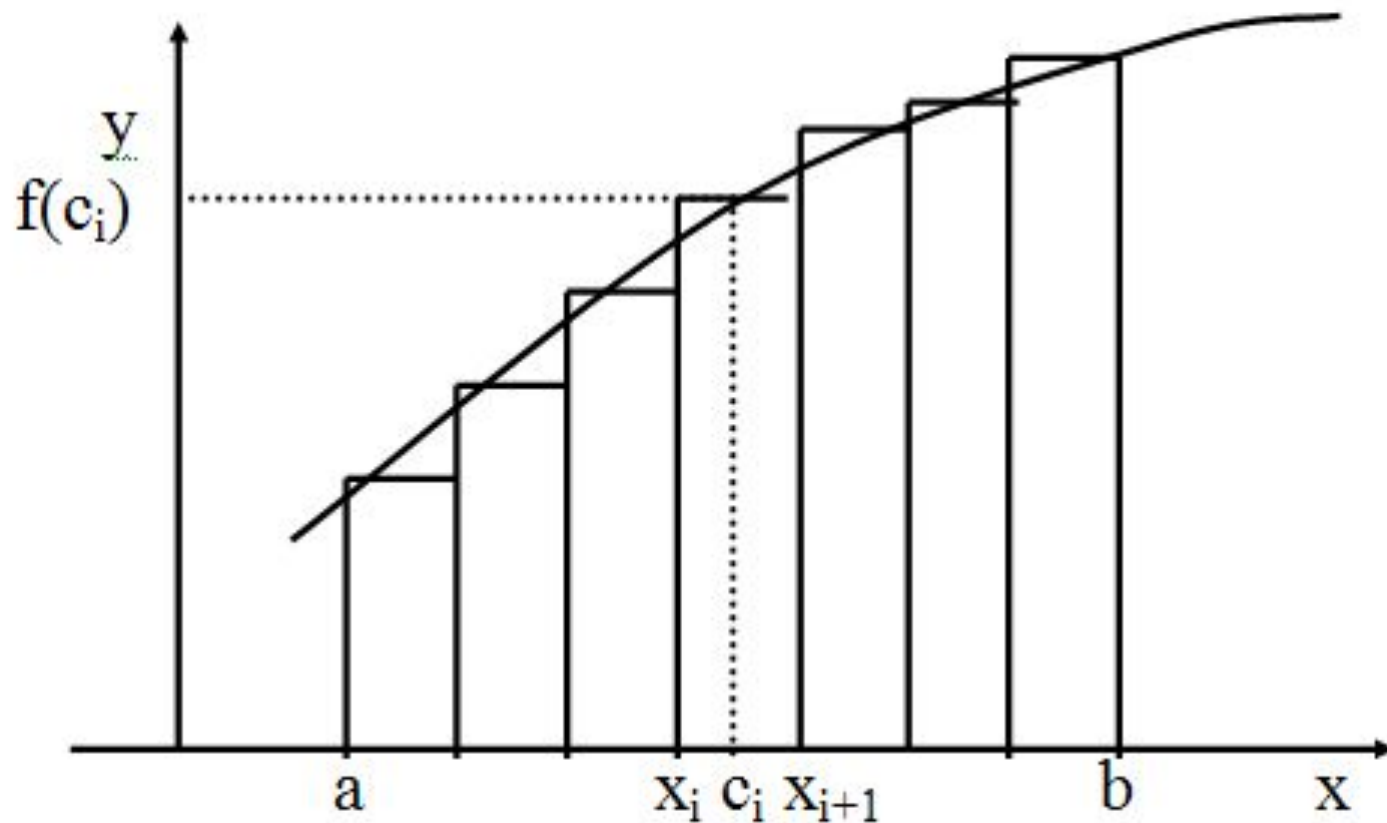
- 1. Определение определенного интеграла**
- 2. Основные свойства определенного интеграла**
- 3. Формула Ньютона-Лейбница**
- 4. Методы интегрирования**
- 5. Геометрические приложения определенного интеграла**
- 6. Несобственные интегралы.**

Определенный интеграл, его свойства и вычисление

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную и ограниченную на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ на n элементарных отрезков Δx_i произвольной длины, возьмем на каждом отрезке Δx_i произвольную точку c_i и вычислим значение функции $f(c_i)$ в этих точках.

Геометрическое изображение определения



Определение интегральной СУММЫ

Интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма произведений длин элементарных отрезков Δx_i на значения функции $f(c_i)$ в произвольных точках этих отрезков

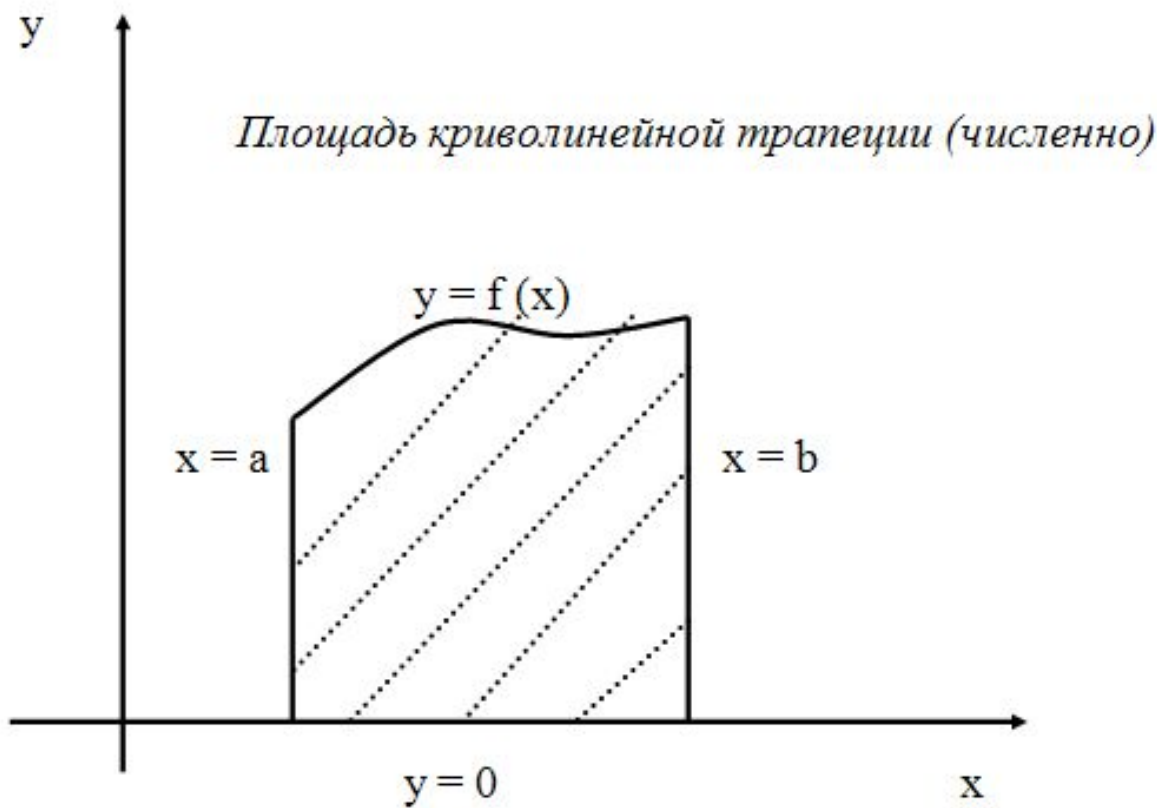
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Определение определенного интеграла

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел (если он существует) интегральной суммы для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i , найденный при условии, что длины элементарных отрезков (включая и максимальный Δx_{\max}) стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} S_n = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \right)$$

Геометрический смысл определенного интеграла



Основные свойства определенного интеграла

1⁰ Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования (инвариантность):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2⁰ При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный (перестановочность):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Основные свойства определенного интеграла

3⁰ Если промежуток интегрирования $[a, b]$ разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку $[a, b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам (*аддитивность*):

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b] \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Основные свойства определенного интеграла

4⁰ Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций (*линейность*):

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n k_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \left(k_i \int_a^b f_i(x) dx \right)$$

Основные свойства определенного интеграла

5⁰. Если подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то определенный интеграл представляет собой число того же знака, что и функция, при условии $b > a$ (*монотонность*):

если $\text{sgn}(f(x)) = \text{const}$, то и $\text{sgn} \int_a^b f(x) dx = \text{sgn}(f(x))$.

6⁰. Модуль интеграла функции не превосходит интеграл от модуля функции (*неравенство по модулю*)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

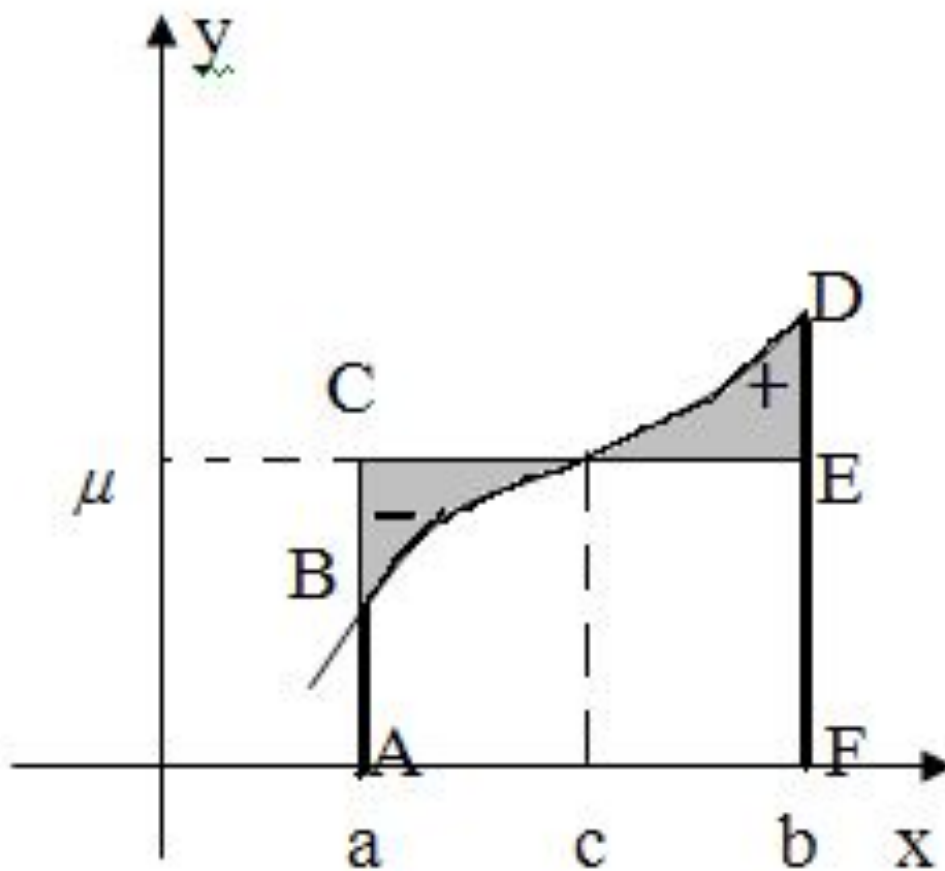
Основные свойства определенного интеграла

7⁰. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке $x=c$ отрезка интегрирования $[a,b]$ на длину отрезка $b-a$ (*теорема о среднем значении функции*):

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad \mu = f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Значение $f(c)$ называется средним значением функции на отрезке $[a,b]$

Теорема о среднем значении функции



Формула Ньютона-Лейбница.

Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } \Big|_a^b \text{ - знак двойной подстановки}$$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот способ основан на использовании свойств определенного интеграла, приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем тождественных преобразований и применении формулы Ньютона-Лейбница.

Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^2 |1-x| dx$$

$$\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \int_1^0 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^0 + \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Замена переменной

Для решения определенного интеграла $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ методом подстановки заменяют $g(x)=t$; $dt=g'(x)dx$ и находят пределы изменения переменной t при изменении x от a до b из соотношений: $g(a)=\alpha$ и $g(b)=\beta$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha),$$

где $F(t)$ -первообразная функции $f(g(x))=f(t)$.

Вычислить

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left[\begin{array}{l} t = 4 - x \quad \text{новые пределы} \\ dt = -dx \quad \text{при } x = 0 \quad t = 4 \\ \text{при } x = 2 \quad t = 2 \end{array} \right] = -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_2^4 t^{-1/2} dt =$$

$$= 2t^{1/2} \Big|_2^4 = 2\sqrt{t} \Big|_2^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{2}) = 2(2 - \sqrt{2}).$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Вычислить

$$\int_1^2 \ln x dx$$

$$\int_1^2 \ln x dx = (x \ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{dx}{x} = 2 \ln 2 - \ln 1 - x \Big|_1^2 =$$

$$2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

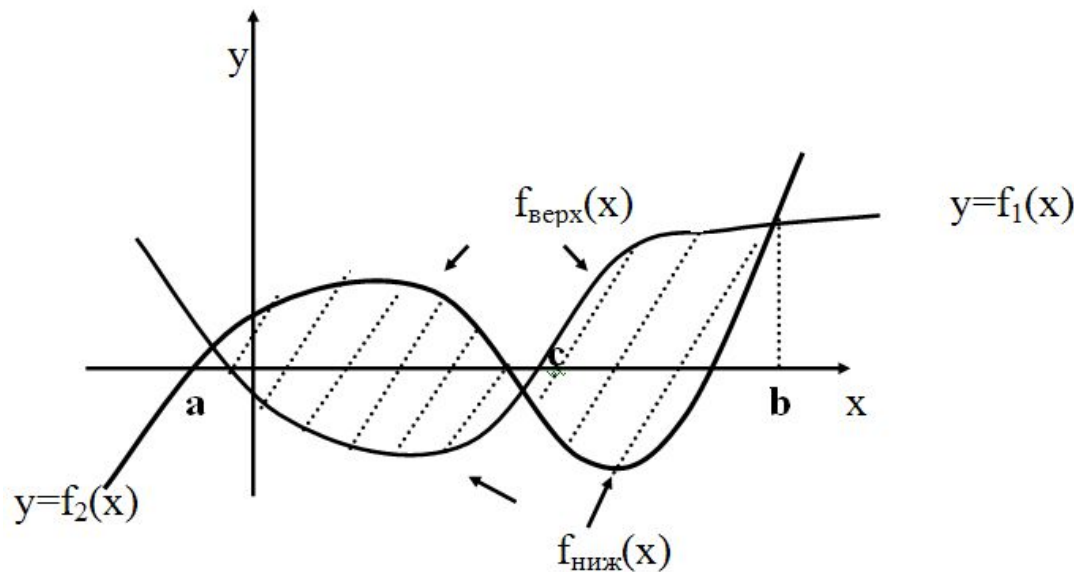
Вспомогательная таблица для интегрирования по частям

Подынтегральное выражение $u dv$	Обозначение в качестве u	Обозначение в качестве dv	Сколько раз?
$P_n(x)e^x dx$	$P_n(x)$	$e^x dx$	n
$P_n(x) \ln x dx$	$\ln x$	$P_n(x) dx$	1
$P_n(x) \cos x dx$	$P_n(x)$	$\cos x dx$	n
$P_n(x) \sin x dx$	$P_n(x)$	$\sin x dx$	n
$P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P_n(x) dx$	1
$e^x \cos x dx$	e^x $\cos x$	$\cos x dx$ $e^x dx$	2
$e^x \sin x dx$	e^x $\sin x$	$\sin x dx$ $e^x dx$	2

Основные приложения определенного интеграла.

Площадь плоской

фигуры:



$$S = \int_a^b \left(f_{\text{верх}}(x) - f_{\text{ниж}}(x) \right) dx = \int_a^c \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx + \int_c^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$$