Определенный интеграл

Лекция 13.12.2016

Элементы интегрального исчисления

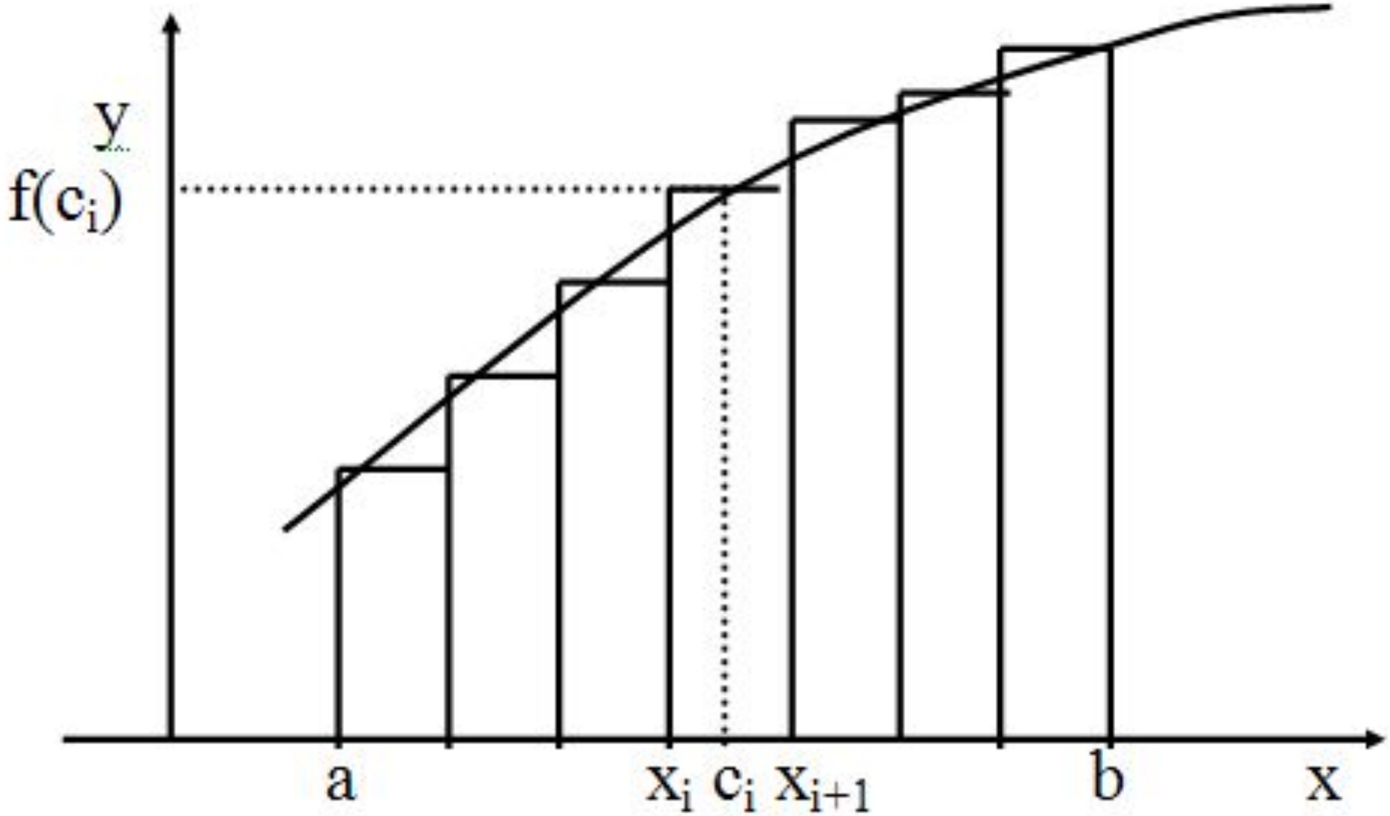
1. Определение определенного интеграла
2. Основные свойства определенного интеграла
3. Формула Ньютона-Лейбница
4. Методы интегрирования
5. Геометрические приложения определенного интеграла
6. Несобственные интегралы.

Определенный интеграл, его свойства и вычисление

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную и ограниченную на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ на n элементарных отрезков Δx_i произвольной длины, возьмем на каждом отрезке Δx_i произвольную точку c_i и вычислим значение функции $f(c_i)$ в этих точках.

Геометрическое изображение определения



Определение интегральной суммы

Интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма произведений длин элементарных отрезков Δx_i на значения функции $f(c_i)$ в произвольных точках этих отрезков

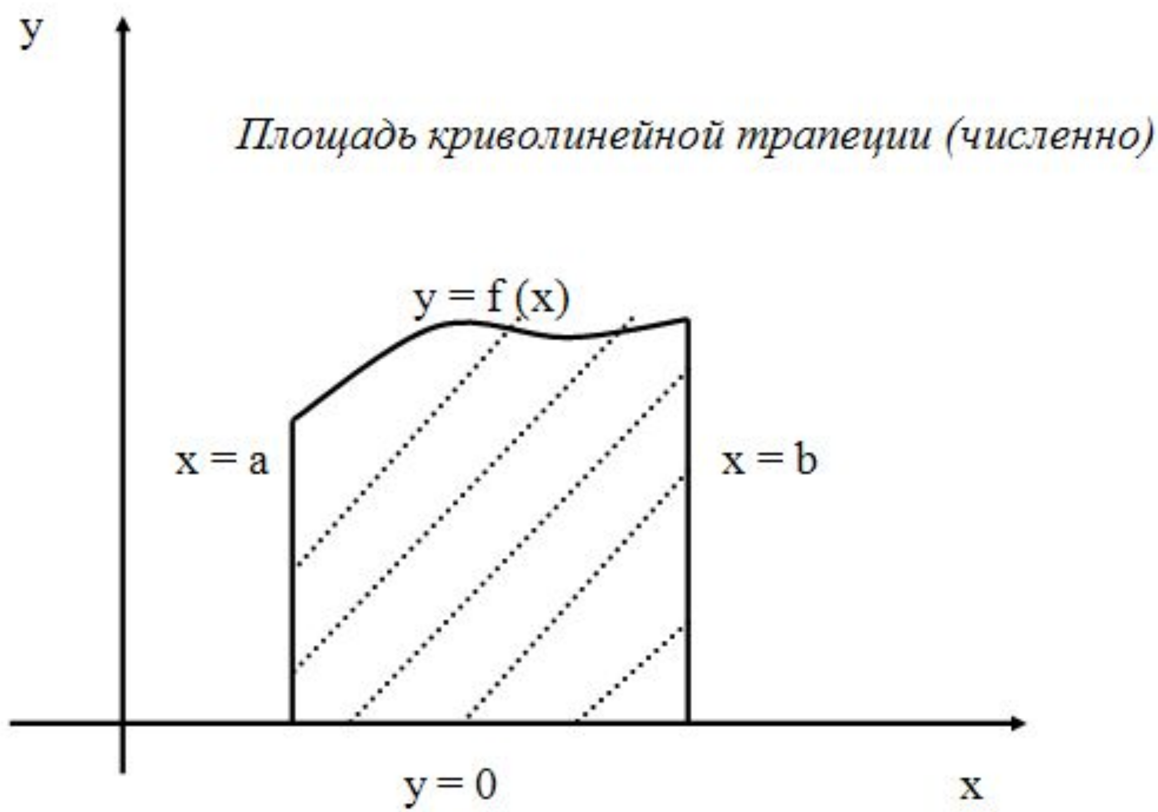
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Определение определенного интеграла

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] называется предел (если он существует) интегральной суммы для функции f(x) на отрезке [a,b], не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек c_i, найденный при условии, что длины элементарных отрезков (включая и максимальный Δx_{max}) стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} S_n = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right)$$

Геометрический смысл определенного интеграла



Основные свойства определенного интеграла

1^0 Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования *(инвариантность):*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2^0 При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный *(перестановочность)*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Основные свойства определенного интеграла

3^0 Если промежуток интегрирования [a,b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [a,b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам (*аддитивность*):

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] \cup [\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}] \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

4^0 Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций (*линейность*):

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(k_i \int_a^b f_i(x) dx \right)$$

Основные свойства определенного интеграла

5^0. Если подынтегральная функция f(x) на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то определенный интеграл представляет собой число того же знака, что и функция, при условии b>a (*монотонность*):

если sgn(f(x))=const, то и sgn $\int\limits_a^b f(x)dx$ = sgn(f(x)).

6^0. Модуль интеграла функции не превосходит интеграл от модуля функции (*неравенство по модулю*)

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

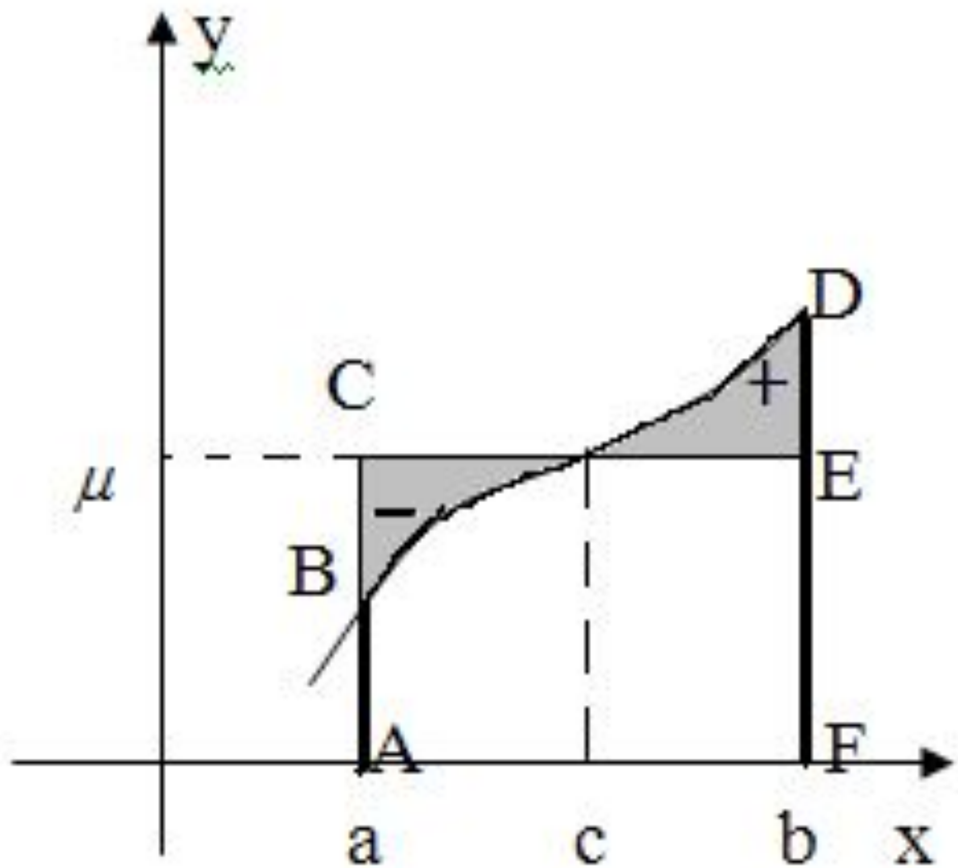
<u>Основные свойства определенного интеграла</u>

7^0. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке x=c отрезка интегрирования [a,b] на длину отрезка b-a (*теорема о среднем значении функции*):

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad \mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Значение f(c) называется средним значением функции на отрезке [a,b]

Теорема о среднем значении функции



Формула Ньютона-Лейбница.

Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $\Big|_a^b$ - знак двойной подстановки

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот способ основан на использовании свойств определенного интеграла, приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем тождественных преобразований и применении формулы Ньютона-Лейбница.

Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2 |1-x|dx$

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \int_1^0 (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^0 + \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Замена переменной

Для решения определенного интеграла $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ методом подстановки заменяют **g(x)=t; dt=g'(x)dx** и находят пределы изменения переменной **t** при изменении x от ***a*** до ***b*** из соотношений: ***g(a)=α*** и ***g(b)=β***.

Тогда $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$,

где ***F(t)***-первообразная функции f***(g(x))=f(t)***.

Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \begin{bmatrix} t = 4 - x & \text{новые пределы} \\ dt = -dx & \text{при } x = 0 \;\; t = 4 \\ \text{при } x = 2 & t = 2 \end{bmatrix} = -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_2^4 t^{-1/2} dt =$$

$$= 2t^{1/2}\Big|_2^4 = 2\sqrt{t}\Big|_2^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{2}) = 2(2 - \sqrt{2}).$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Вычислить $\int_1^2 \ln x\,dx$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = (x\ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 =$$

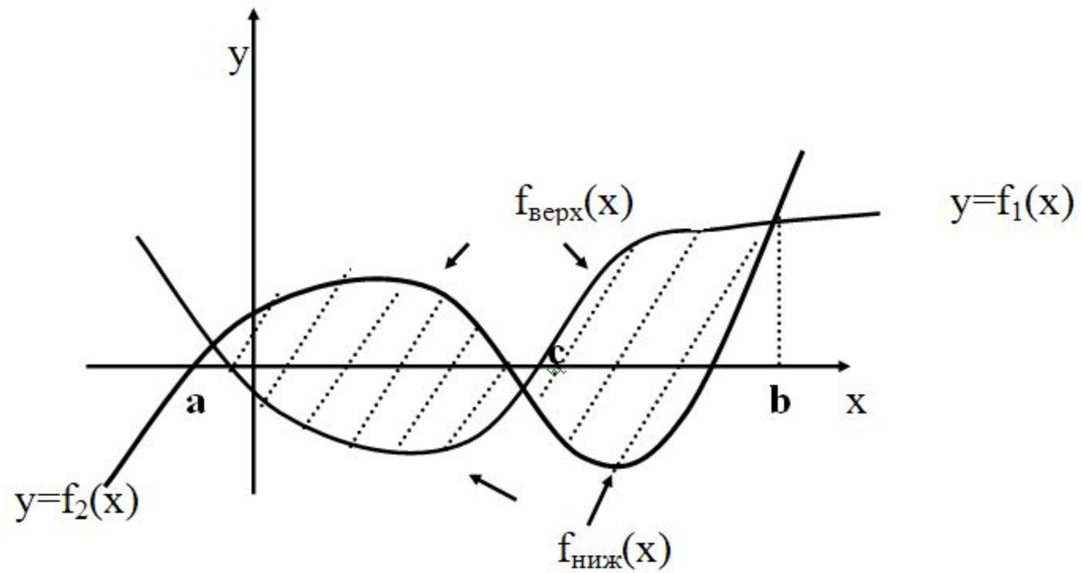
$$2\ln 2 - (2-1) = 2\ln 2 - 1$$

Вспомогательная таблица для интегрирования по частям

Подынтегральное выражение udv	Обозначение в качестве u	Обозначение в качестве dv	Сколько раз?
$P_n(x)e^x dx$	$P_n(x)$	$e^x dx$	n
$P_n(x)\ln x dx$	$\ln x$	$P_n(x)dx$	1
$P_n(x)\cos x dx$	$P_n(x)$	$\cos x dx$	n
$P_n(x)\sin x dx$	$P_n(x)$	$\sin x dx$	n
$P_n(x)\operatorname{arctg} x dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P_n(x)dx$	1
$e^x \cos x dx$	e^x $\cos x$	$\cos x dx$ $e^x dx$	2
$e^x \sin x dx$	e^x $\sin x$	$\sin x dx$ $e^x dx$	2

Основные приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры



$$S=\int_a^b\left(f_{верх}(x)-f_{ниж}(x)\right)dx=\int_a^c\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx+\int_c^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx$$