Неопределенный интеграл

Лекция 13.10.2016 г.

Элементы интегрального исчисления

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов
3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен
4. Интегрирование дробно-рациональных функций
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование некоторых иррациональностей

Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.
Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

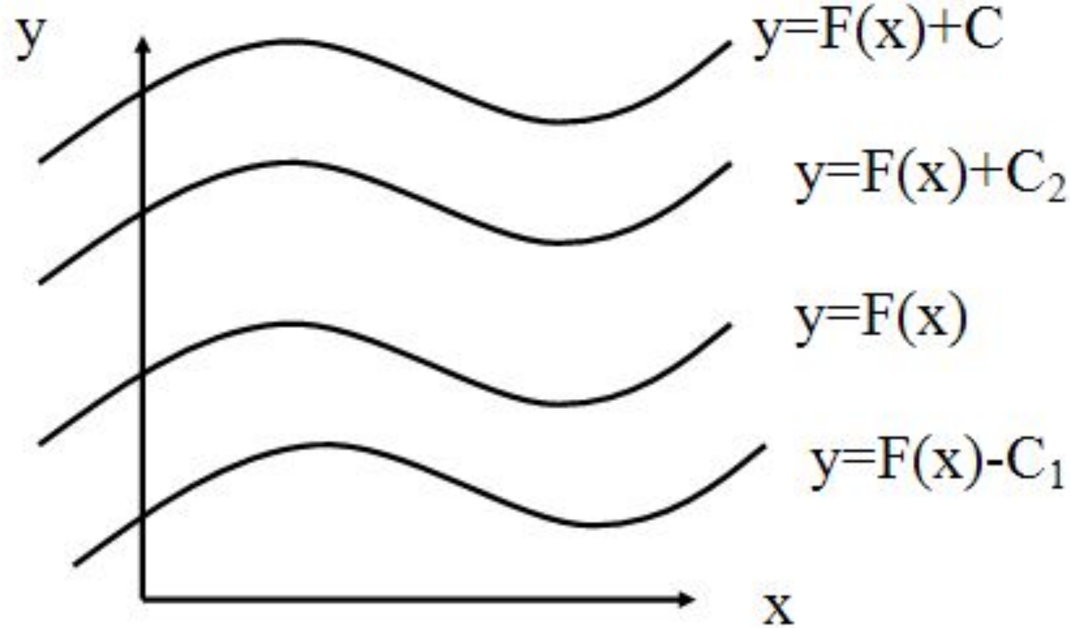
Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Геометрический смысл неопределенного интеграла



Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. \quad \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. \quad d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

3. $$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

так как $F(x)$ является первообразной для $F'(x)$.

Свойства интеграла

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем
$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx=f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

Использование свойств дифференциала

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Интеграл от сложной функции, аргумент которой является линейной функцией

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Пример

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Используя свойства неопределенного интеграла и формулы школьного курса, приводят подынтегральную функцию к табличному виду.

Замена переменной

Требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная.

Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал сложной функции. Предположить вид новой переменной поможет знание таблицы производных.

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1,2 ... k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2 ... k$;

в) $\int x^n arctgx dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm k$. ;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят

обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1} dx$, а, например

$\sin x dx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию

$arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Вспомогательная таблица для интегрирования по частям

Подынтегральное выражение udv	Обозначение в качестве u	Обозначение в качестве dv	Сколько раз?
$P_n(x)e^x dx$	$P_n(x)$	$e^x dx$	n
$P_n(x)\ln x dx$	$\ln x$	$P_n(x)dx$	1
$P_n(x)\cos x dx$	$P_n(x)$	$\cos x dx$	n
$P_n(x)\sin x dx$	$P_n(x)$	$\sin x dx$	n
$P_n(x) arctgx dx$	$arctgx$	$P_n(x)dx$	1
$e^x \cos x dx$	e^x $\cos x$	$\cos x dx$ $e^x dx$	2
$e^x \sin x dx$	e^x $\sin x$	$\sin x dx$ $e^x dx$	2

Примеры

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int \mathrm{xcosxdx} = \left[\begin{array}{l} \mathrm{u} = \mathrm{x}, \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \mathrm{cosxdx}, \mathrm{v} = \int \mathrm{cosxdx} \end{array}\right.$$

=

= $x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

***Пример*.** Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ \\ dv=xdx, v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C\,.$$