

Лекция 14 Понятие о комплексных числах. Рациональные функции одной переменной

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекции 33, 34.

Понятие о комплексных числах. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Сложение, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня из комплексного числа.

Некоторые сведения о многочленах. Разложение многочлена на множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

33.1. Понятие о комплексных числах.

Алгебраическая форма комплексного числа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, x называется действительной частью комплексного числа $x = \operatorname{Re} z$, y – мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$:*

$$z = (x; y) \quad (33.1)$$

Действительная единица $1 = (1; 0)$, мнимая обозначается $i = (0; 1)$. Таким образом, множество действительных чисел $x = (x; 0)$ и множество чисто мнимых чисел $iy = (0; y)$ являются подмножествами комплексных чисел. Для мнимой единицы i справедливо равенство:

$$i^2 = -1. \quad (33.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.2. *Выражение $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.*

$$z = x + iy. \quad (33.3)$$

Рассмотрим свойства комплексных чисел и алгебраические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Для двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ справедливо:

- *Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если равны их действительные и мнимые части.*

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2. \quad (33.4)$$

- При сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) действительные и мнимые части.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (33.5)$$

- Умножение комплексных чисел проводится как умножение многочленов с учётом (33.2)

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (33.6)$$

- Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$ и их произведение согласно (33.6), равно

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (33.7)$$

Таким образом, сумма квадратов двух действительных чисел раскладывается на произведение сопряженных комплексных чисел.

- Частное от деления комплексных чисел $z = \frac{z_1}{z_2}$ ищется по следующей схеме: числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножается на число \bar{z}_2 , сопряжённое знаменателю, а затем выделяются действительная и мнимая части

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (33.8)$$

ПРИМЕР 33.1. Сложить, вычесть, умножить и поделить два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Решение: По формуле (33.5):

$$z_1 + z_2 = 5 + i, \quad z_1 - z_2 = -1 + 5i,$$

по формуле (33.6):

$$z_1 z_2 = 6 + 6 + i(9 - 4) = 12 + 5i,$$

по формуле (33.8):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6 - 6 + i(9 + 4)}{9 + 4} = i.$$

Как известно, квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ при дискриминанте

$D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ не имеет действительных корней. Уравнение

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{33.9}$$

имеет при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ два комплексных сопряженных корня

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \tag{33.10}$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Таким образом, в комплексной области квадратный трёхчлен $z^2 + pz + q$ раскладывается на множители при отрицательном дискриминанте

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = ((z - \alpha) - \beta i)((z - \alpha) + \beta i). \quad (33.11)$$

ПРИМЕР 33.2. *Найти корни уравнения $z^2 + 8z + 25 = 0$ и разложить квадратный трёхчлен на множители.*

Решение: По формуле (33.10) находим:

$$z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm 3i \text{ и } z^2 + 8z + 25 = ((z + 4) - 3i)((z + 4) + 3i).$$

33.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Будем откладывать действительную часть $Re z = x$ комплексного числа z на оси Ox , а мнимую $Im z = y$ на оси Oy декартовой системы координат Oxy (рис. 169).

Тогда каждому комплексному числу $z = x + iy$ будет соответствовать одна точка плоскости Oxy и наоборот каждой точке плоскости Oxy – одно комплексное число z . Поэтому вместо комплексного числа z можно говорить о точке z комплексной плоскости. Назовем эту плоскость комплексной плоскостью и будем обозначать её символом \boxed{z} .

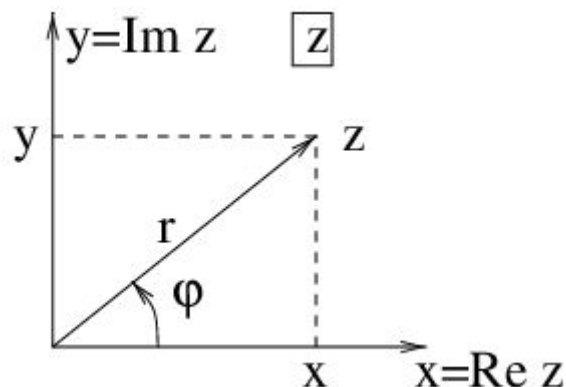


Рис. 169.

Комплексная плоскость

ЗАМЕЧАНИЕ 33.1. Отметим, что бесконечность считается одной точкой и обозначается $z = \infty$. При изображении комплексных чисел на комплексной плоскости $[z]$ это тяжело себе представить. Однако, если воспользоваться сферой для изображения комплексных чисел (рис. 170), расположив её так, чтобы она касалась плоскости $[z]$ в начале декартовой системы координат O и каждой точке z (комплексному числу z) поставит в соответствие точку z на сфере, являющуюся точкой пересечения прямой соединяющей точку z на плоскости $[z]$ и точку N диаметрально противоположную O , то бесконечности на плоскости $[z]$ будет соответствовать одна точка N на этой сфере.

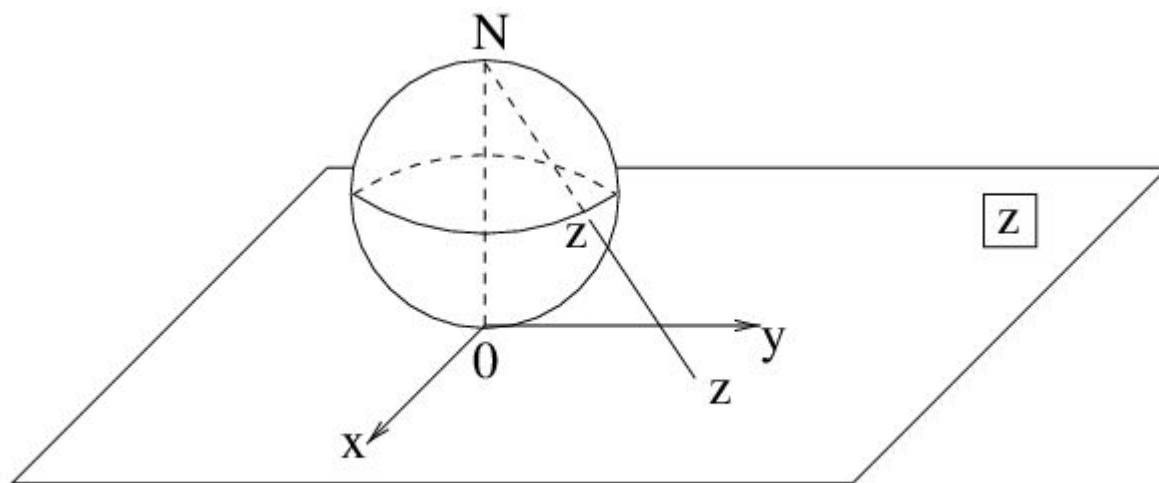


Рис. 170. Сфера комплексных чисел

33.3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.3. *Модулем комплексного числа $|z|$ называется квадратный корень из суммы квадратов его действительной и мнимой частей:*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (33.12)$$

Геометрически модуль комплексного числа равен длине радиуса-вектора \vec{r} точки z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.4. *Аргументом комплексного числа z называется угол между радиус-вектором \vec{r} точки z и осью Ox (рис. 169)*

$$\varphi^o = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{при } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } y > 0, x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } y < 0, x = 0. \end{cases} \quad (33.13)$$

ПРИМЕР 33.3. Определить модуль и аргумент комплексных чисел $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$ и $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение:

Для z_1 и z_3 отношение $\frac{y}{x}$ одинаково, однако точка z_1 расположена в I-ом квадранте и $\varphi_1^o = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$, точка z_3 расположена в III-ем квадранте и

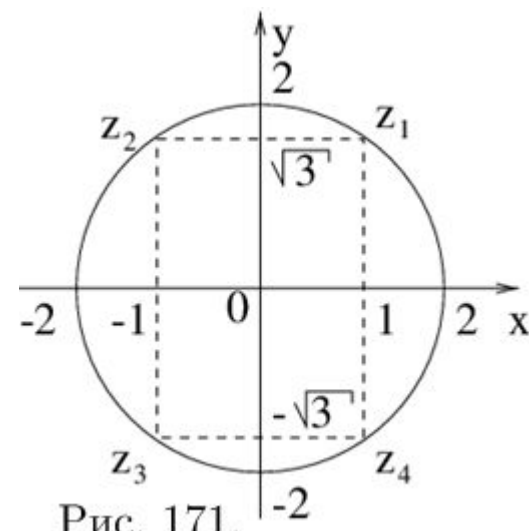
$\varphi_3^o = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \frac{4}{3}\pi$. для чисел z_2 и z_4 расположены соответственно во II-ом

и IV-ом квадрантах и аргументы $\varphi_2^o = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_4^o = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$.

Модуль всех четырёх комплексных чисел

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Следовательно, все эти числа расположены на окружности радиуса $r = 2$ с найденными значениями аргументов (рис. 171).



Все точки комплексной плоскости $[z]$ с модулем, равным R , удовлетворяют уравнению

$$|z| = R, \quad (33.14)$$

которое таким образом является уравнением окружности радиуса R с центром в начале координат.

Множество комплексных точек, расположенных внутри этой окружности определяется неравенством

$$|z| < R, \quad (33.15)$$

вне её

$$|z| > R. \quad (33.16)$$

Очевидно, что если центр этой окружности сместить в точку z_0 (рис. 172), её уравнение будет

$$|z - z_0| = R \quad (33.17)$$

Множество всех точек, лежащих внутри этой окружности удовлетворяет неравенству

$$|z - z_0| < R, \quad (33.18)$$

вне её

$$|z - z_0| > R. \quad (33.19)$$

Области, определяемые неравенствами (33.15) и (33.18), заштрихованы на рис. 172.

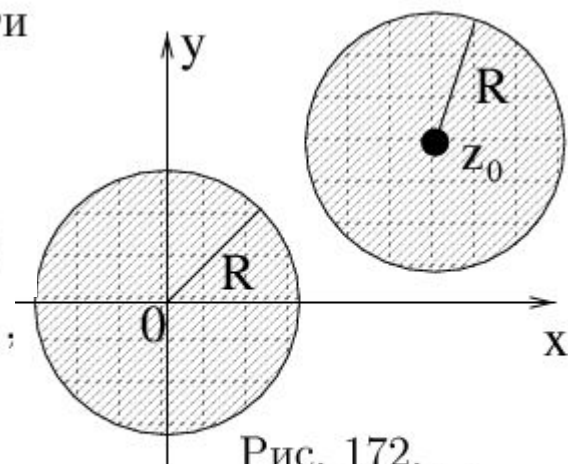


Рис. 172.
Множество точек $|z| < R$
и $|z - z_0| < R$.

Значения аргумента z , определяемое формулой (33.13) принято называть главным, что мы отмечаем верхним индексом «о» и прописной буквой а. Очевидно, что комплексное число z не изменится, если его аргумент изменить на $2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом более общее значение аргумента $\varphi = \text{Arg } z$ определяется формулой

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k = \varphi^o + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad (33.20)$$

которая при $k = 0$ определяет главное значение аргумента (33.13).

Из рис. 169 видно, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (33.21)$$

и, следовательно, комплексное число может быть определено через r и φ по формуле

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (33.22)$$

следующей из (33.3) с учётом (33.21).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.5. *Выражение (33.22) называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Можно показать, что между показательной и тригонометрической функциями имеется связь, устанавливаемая формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (33.23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.6. *Выражение*

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (33.24)$$

следующее из (33.22) с учётом (33.23) называется показательной формой комплексного числа.

Формулы (33.1), (33.3), (33.22) и (33.24) являются различной записью комплексного числа z , и переход от одной из них к другой не представляет сложности.

следующие комплексные числа z , заданные в алгебраической форме: 1) $z_1 = 3$; 2) $z_2 = -3$; 3) $z_3 = 3i$; 4) $z_4 = -3i$ и 5) $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$.

Решение: 1) Главное значение аргумента для любого положительного действительного числа $\varphi^o = 0$ и, следовательно, по формулам (33.22), (33.24) с учётом (33.12) и (33.20) $z_1 = 3 = 3(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = 3e^{i2\pi k}$.

2) Для любого отрицательного действительного числа $\varphi^o = \pi$ и, следовательно,

$$z_2 = -3 = 3(\cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi) = 3e^{i(2k+1)\pi}.$$

3) Для любого чисто мнимого числа $x = 0$ и при $y > 0 \rightarrow \varphi^o = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$z_3 = 3i = 3\left(\cos\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + i \sin\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3e^{i(2k+1/2)\pi}.$$

4) При $y < 0 \rightarrow \varphi^o = -\frac{\pi}{2}$

и

$$z_4 = -3i = 3\left(\cos\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi + i \sin\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3e^{i(2k-1/2)\pi}.$$

5) Для $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$ главное значение аргумента $\varphi^o = \arctg \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$

и, следовательно,

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi + i \sin\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi\right) = 2\sqrt{3}e^{i(2k-1/6)\pi}.$$

Наиболее удобно использование показательной и тригонометрической форм комплексных чисел при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корней.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z = r e^{i\varphi} = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (33.25)$$

$$z = r e^{i\varphi} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (33.26)$$

и, следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются $r = r_1 r_2$, а аргументы складываются $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, при делении – модули делятся $r = \frac{r_1}{r_2}$, а аргументы вычитаются $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Очевидно, при возведении в степень комплексного числа $z = r e^{i\varphi}$ имеем

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (33.27)$$

В тригонометрической форме формула (33.27) носит название *формулы Муавра*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (33.28)$$

Поскольку $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, а следовательно, согласно (33.24) и $e^{i\varphi}$ являются периодическими функциями с периодом 2π , в формулах (33.21)–(33.26), а при целом n и в формулах (33.27), (33.28) φ следует брать равным своему главному значению $\varphi^0 = \arg z$.

Формулы (33.27) и (33.28) справедливы и при дробном n , но при этом в этих формулах необходимо учитывать многозначность аргумента комплексного числа и в соответствии с формулой (33.20) положить $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$. В частности, при извлечении корня n -ой степени и комплексного числа $z = r e^{i\varphi}$ получаем

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} \right). \quad (33.29)$$

Придавая k последовательно значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$ с одинаковым модулем, но различными аргументами. На комплексной плоскости $[z]$ все эти значения расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n -угольника, вписанного в эту окружность. Если k принимает значения больше $n-1$, то эти точки повторяются.

Из сказанного очевидно, что уравнение n -ой степени

$$z^n - a = 0, \quad (33.30)$$

где $a = r e^{i\varphi}$ – комплексное число, имеет n корней $z = \sqrt[n]{a}$, определяемых по формуле (33.29).

ПРИМЕР 33.5. Возвести в 6-ую степень и извлечь корень 6-ой степени из 16 комплексного числа $z = 3 - i\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е: Модуль и главное значение аргумента числа $z = 3 - i\sqrt{3}$ мы нашли в примере 33.4. Они равны соответственно $2\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

Следовательно, по формуле (33.27)

$$\begin{aligned}(3 - i\sqrt{3})^6 &= (2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 = \\ &= 2^6 3^3 e^{i11\pi} = 1728(\cos \pi - i \sin \pi) = 1728(-1 - i0) = -1728,\end{aligned}$$

а по формуле (33.29)

$$\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)}\right)^{1/6} = \sqrt[6]{2} \sqrt[12]{3} e^{i\frac{(-1+12k)\pi}{36}}.$$

Придавая k значения $0, 1, \dots, 5$ получим 6 разных значений $\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}z_1 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_1 = \sqrt[12]{12}e^{-i\frac{\pi}{36}}, & z_2 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_2 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{11}{36}\pi}, \\ z_3 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_3 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{23}{36}\pi}, & z_4 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_4 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{35}{36}\pi}, \\ z_5 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_5 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{47}{36}\pi}, & z_6 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_6 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{59}{36}\pi}.\end{aligned}$$

Все эти значения на комплексной плоскости \boxed{z} расположены в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[12]{12}$ (рис. 173).

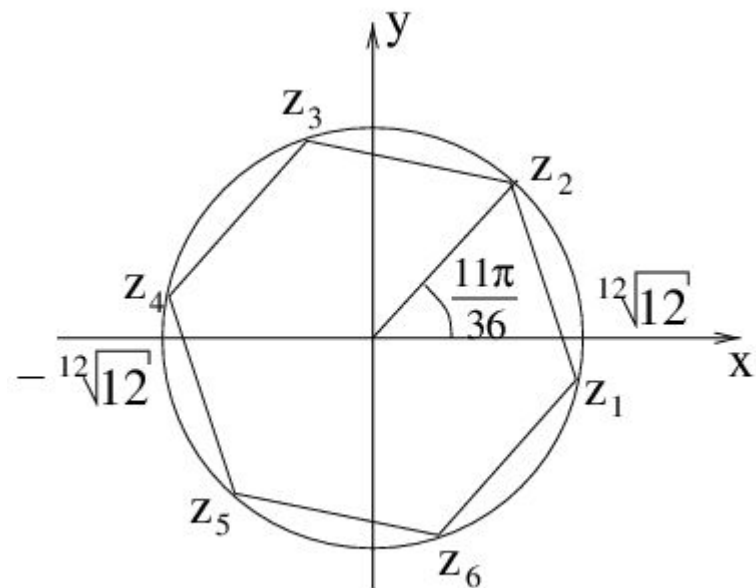


Рис. 173. К примеру 33.5

ПРИМЕР 33.6. Найти все корни уравнения $z^4 + 1 = 0$.

Решение: $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$.

Поскольку для любого отрицательного действительного числа

$$\arg z = \pi, \quad -1 = 1e^{i(\pi+2\pi k)}$$

и, следовательно,
$$z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}.$$

Находим четыре корня, положив k равным 0,1,2,3:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

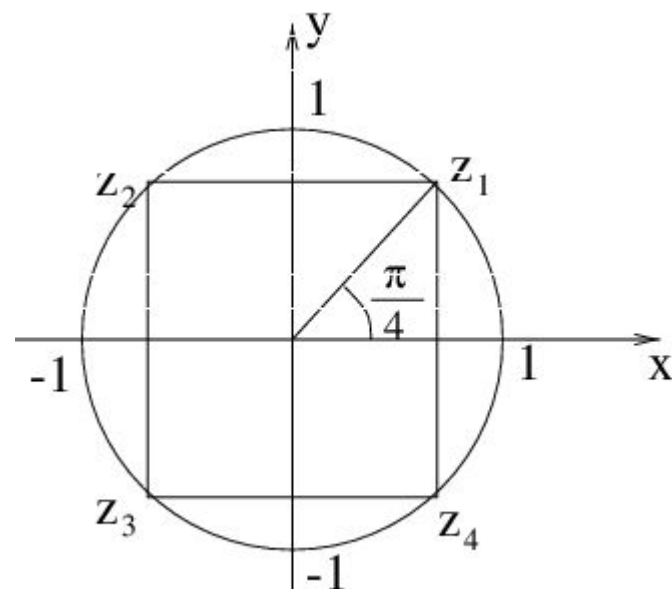


Рис. 174. К примеру 33.6

На плоскости \boxed{z} эти корни расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 174).

ПРИМЕР 33.7. *Определить расположение всех корней уравнения $z^5 - 32 = 0$ на плоскости $[z]$.*

Решение:

Поскольку $z^5 = 32 = 2^5$, один из корней легко находится, и он равен $z_1 = 2$.
Остальные четыре корня расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (рис. 175).

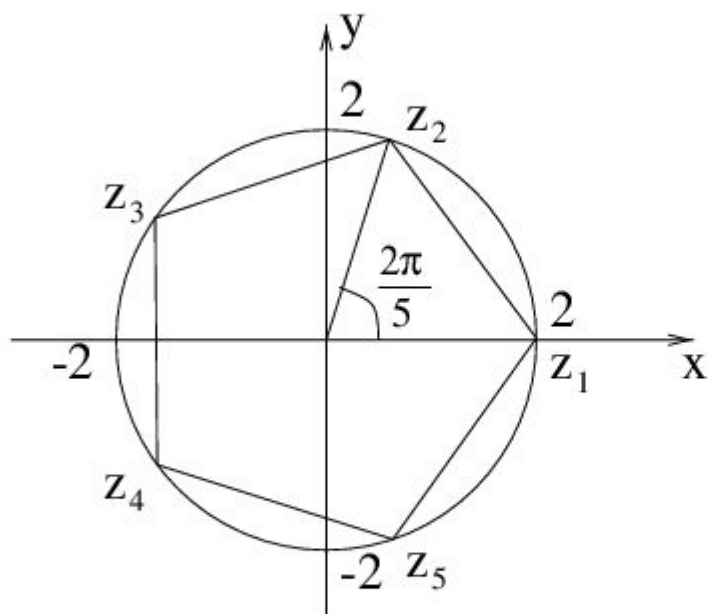


Рис. 175. К примеру 33.7

Интересно отметить, что из формулы Муавра (33.28) можно получить тригонометрические формулы, выражающие $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Рациональной функцией или рациональной дробью, называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \quad (34.1)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (34.2)$$

где

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^m b_k x^k. \quad (34.3)$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильной – в противном случае.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

ПРИМЕР 34.1. Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби следующую неправильную дробь: 21

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Решение: Разделив числитель на знаменатель, получим в частном $x + 3$ и в остатке $-6x^2 - 5x + 8$, т.е.

$$R(x) = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ можно найти, не выполняя самого процесса деления на основании следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 34.1. (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$.

ПРИМЕР 34.2. Найти остаток от деления многочлена $P(x) = 3x^9 - 2x^5 + 3x^2 + 4x - 8$ на двучлен $x + 1$.

Решение:

Здесь $a = -1$. Поэтому искомый остаток равен:

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3(-1)^9 - 2(-1)^5 + 3(-1)^2 + 4(-1) - 8 = \\ &= -3 + 2 + 3 - 4 - 8 = -10. \end{aligned}$$

Рассмотрим кратко некоторые сведения о многочленах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Корнем многочлена (34.2)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

называется всякое число γ (действительное или комплексное), которое обращает многочлен в нуль, т.е. такое, что $P_n(\gamma) = 0$.

ПРИМЕР 34.3. Проверить, что $\gamma = 1$ является корнем многочлена $x^3 + 5x^2 - 2x - 4$.

Решение: Действительно: $1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$.

2. Имеет место следующая теорема, принимаемая без доказательства:

ТЕОРЕМА 34.2. *Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n множителей вида $x - \gamma$ и множителя при старшей степени x , т.е.*

$$P_n(x) = a_n(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)\dots(x - \gamma_n). \quad (34.4)$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ очевидно являются корнями многочлена.

Если в разложении 34.4 раскрыть скобки, то свободный член многочлена будет равен произведению корней многочлена $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n$.

Отсюда вытекает следующее правило: *Если многочлен $P_n(x)$ имеет целые корни, то эти корни являются делителями свободного члена.*

Так как любое число имеет конечное множество целых делителей, то это правило позволяет решать алгебраические уравнения степени выше двух при условии, что хотя бы один корень – целое число.

ПРИМЕР 34.4. Решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Решение:

Если у него есть целые корни, то только ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 . Подставив в уравнение, например, $x = 1$, получим тождество. Следовательно, на основании теоремы Безу многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ делится на разность $x - 1$ без остатка.

Выполнив это деление, получим:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - 5x - 6).$$

Решив квадратное уравнение

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

найдем корни: -3 и 2 . Следовательно, корни данного уравнения:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2.$$

ПРИМЕР 34.5. Легко проверить, что $5x^4 - 4x^3 + 115x^2 - 140x + 60 = 5(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3)$.

ПРИМЕР 34.6. Многочлен $x^3 + x = x(x - i)(x + i)$.

3. Среди линейных множителей в (34.4) могут быть одинаковые. Объединяя их, можем записать разложение многочлена на множители в виде:

$$P_n(x) = a_n(x - a)^{k_1}(x - b)^{k_2} \dots (x - p)^{k_s}, \quad (34.5)$$

где все корни $a, b \dots p$ различны, и сумма показателей степени равна n .

Корни $a, b \dots p$ называются кратными корнями многочлена, а именно a – корень кратности k_1 , b – корень кратности k_2 , p – корень кратности k_s .

4. Среди корней в разложении (34.4) могут быть комплексные $\alpha \pm \beta i$. В алгебре доказывается: если $\alpha + \beta i$ является корнем многочлена кратности k , то и сопряжённое число $\alpha - \beta i$ также является корнем этого же многочлена той же кратности.

5. Поэтому, если в разложении (34.5) есть множитель $(x - (\alpha + \beta i))^k$, то в этом разложении присутствует множитель $(x - (\alpha - \beta i))^k$.

Перемножив два множителя, соответствующие комплексным сопряженным корням, получим (см. 33.7):

$$\begin{aligned} (x - (\alpha + \beta i))^k (x - (\alpha - \beta i))^k &= ((x - \alpha) - \beta i)^k ((x - \alpha) + \beta i)^k = \\ &= ((x - \alpha)^2 + \beta^2)^k = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^k = (x^2 + px + q)^k, \end{aligned}$$

где $p = -2\alpha, q = \alpha^2 + \beta^2$.

Обратите внимание, что трёхчлен $x^2 + px + q$, равный сумме двух квадратов, имеет отрицательный дискриминант.

6. Все вышесказанное позволяет сформулировать утверждение: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n(x - a)^{k_1}(x - b)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots \quad (34.6)$$

В формуле (34.6) $n = k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m)$.

В нём линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратные трёхчлены, имеющие по два корня – комплексным корням многочлена.

34.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.1. *Дроби*

$$I. \frac{A}{x - a},$$

$$II. \frac{A}{(x - a)^n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$III. \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (D = p^2 - 4q < 0),$$

$$IV. \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \quad (D = p^2 - 4q < 0, n = 2, 3, \dots)$$

называются простейшими дробями первого, второго, третьего и четвёртого типов.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 34.3. Правильную рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где

$P_n(x) = (x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^l \cdots$, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k} + \cdots \quad (34.7)$$

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}, \cdots,$$

где A_i, B_i, M_i, N_i ($i = 1, 2, \dots$) – действительные числа.

В формуле (34.7) первое слагаемое в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители соответствует другим, кроме a , действительным корням, а второе – комплексным.

Из формулы (34.7) следует, что линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым при любом числе линейных и квадратичных множителей в разложении знаменателя $P_n(x)$.

34.3.1. Метод неопределённых коэффициентов.

Этот метод основан на следующем утверждении, принимаемом без доказательства: если два многочлена тождественно равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной в обеих частях тождества.

Поэтому приводя в правой части разложения (34.7) к общему знаменателю, получаем тождественное равенство двух рациональных дробей с равными знаменателями.

Следовательно, числители тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, \dots

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 34.7. Разложить на простейшие дроби: $\frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$.

Решение:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 2}. \quad (34.8)$$

Приводим правую часть этого тождества к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x(x + 3)(x - 2)} = \frac{A(x + 3)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 3)}{x(x + 3)(x - 2)}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} x^2 : A + B + C = 1, \\ x : A - 2B + 3C = 2, \\ \text{свободные члены: } -6A = -6. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система всегда имеет единственное решение. Это решение следующее:

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{5}.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение (34.8), окончательно получим:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{5(x + 3)} + \frac{1}{5(x - 2)}. \quad (34.9)$$

ПРИМЕР 34.8. Разложить на простейшие дроби: $\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}$.

Решение:

$$\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5}. \quad (34.10)$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} &= \\ &= \frac{A(x - 1)(x^2 + 2x + 5) + Bx(x^2 + 2x + 5) + (Mx + N)(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}. \end{aligned}$$

Приравнивая числители, получаем:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= A(x^3 + x^2 + 3x - 5) + B(x^2 + 2x + 5) + \\ &+ M(x^3 - 2x^2 + x) + N(x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= (A + M)x^3 + (A + B - 2M + N)x^2 + \\ &+ (3A + 2B + M - 2N)x + (-5A + 5B + N). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем систему:

$$\begin{cases} x^3 : A + M = 0, \\ x^2 : A + B - 2M + N = 3, \\ x : 3A + 2B + M - 2N = 0, \\ \text{свободные члены: } -5A + 5B + N = 5. \end{cases}$$

Её решение: $A = \frac{1}{4}$, $B = 1$, $M = -\frac{1}{4}$, $N = \frac{5}{4}$.

Следовательно, подставив найденные коэффициенты в (34.10), получим:

$$\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 2x + 5}.$$

Этот метод основан на очевидном утверждении: если два многочлена тождественно равны: $P(x) \equiv Q(x)$, то они равны при любом значении независимой переменной $x = a$: $P(a) = Q(a)$, где a - произвольное число.

Поэтому вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях неизвестной в разложении (34.7) можно подставлять туда вместо x несколько произвольных чисел.

Этот метод особенно эффективен, когда многочлен $P_n(x)$, стоящий в знаменателе имеет, различные действительные корни и в качестве произвольных значений берутся числа, равные действительным корням знаменателя.

ПРИМЕР 34.9. Разложить на простейшие дроби функцию из примера 34.7. 34

Решение: Ранее, при использовании метода неопределённых коэффициентов, было получено:

$$x^2 + 2x - 6 = A(x + 3)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 3).$$

Подставим в это тождество последовательно три значения x :

$$x = 0 : -6 = -6A \implies A = 1,$$

$$x = 2 : 2 = 10C \implies C = \frac{1}{5},$$

$$x = -3 : -3 = 15B \implies B = -\frac{1}{5}.$$

Опять получаем соотношение (34.10).

Рассмотрим теперь пример, в котором для разложения знаменателя на множители можно использовать операцию извлечения корня из комплексного числа.

ПРИМЕР 34.10. Разложить на простейшие дроби $\frac{1}{x^4 + 1}$.

Решение:

Многочлен $x^4 + 1$, стоящий в знаменателе имеет лишь комплексные корни, которые мы нашли ранее:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Таким образом,

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Объединив первую скобку с последней, вторую с третьей, получим:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \cdot \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (34.7) и методом неопределённых коэффициентов, находим:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \tag{34.11}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{x^4 + 1}$$

и, следовательно,

$$Ax^3 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B + Cx^3 -$$

$$-C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D = 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных A, B, C, D :

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \\ A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0, \\ B + D = 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения C через A , а из последнего D через B и подставив $C = -A$ и $D = 1 - B$ во второе и третье уравнения системы, получим:

$$A\sqrt{2} + B + A\sqrt{2} + 1 - B = 0 \Rightarrow 2A\sqrt{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C = -A = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$A + B\sqrt{2} - A - \sqrt{2} + B\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$2B\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения A , B , C , D в (34.11), найдем разложение дроби $\frac{1}{x^4 + 1}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \quad (34.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 34.1. Разложение (34.12) многочлена $P_4(x) = x^4 + 1$ на множители можно было бы получить и методом неопределённых коэффициентов.

Учитывая, что комплексные корни входят в разложение многочлена на множители как корни квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ при $D < 0$, запишем:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) = \\ &= x^4 + p_1x^3 + q_1x^2 + p_2x^3 + p_1p_2x^2 + p_2q_1x + q_2x^2 + p_1q_2x + q_1q_2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в полученном тождестве, получим уравнения для определения p_1, p_2, q_1, q_2 и найдем их так:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -p_1 \Rightarrow p_2 = -\sqrt{2}, \\ q_1 + p_1 p_2 + q_2 = 0 \Rightarrow p_1 p_2 = -q_1 - q_2 = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1^2 = 2 \Rightarrow p_1 = \sqrt{2}, \\ p_2 q_1 + p_1 q_2 = 0 \Rightarrow -p_1 q_1 + p_1 q_2 = p_1 (q_2 - q_1) = 0 \Rightarrow q_1 = q_2, \\ \text{т.к. } p_1 \neq 0, \\ q_1 q_2 = 1 \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 = 1 \Rightarrow q_1 = q_2 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что $q_1 = q_2 \neq -1$, так как в этом случае из второго уравнения следовало бы, что $p^2 = -2$, что невозможно. Таким образом, мы получили опять разложение (34.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 34.2. Разложить $x^4 + 1$ на множители можно ещё и так. Прибавим и вычтем $2x^2$ и воспользуемся формулой сокращённого умножения:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x). \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что нестандартные приемы решения часто очень эффективны!

Спасибо за внимание