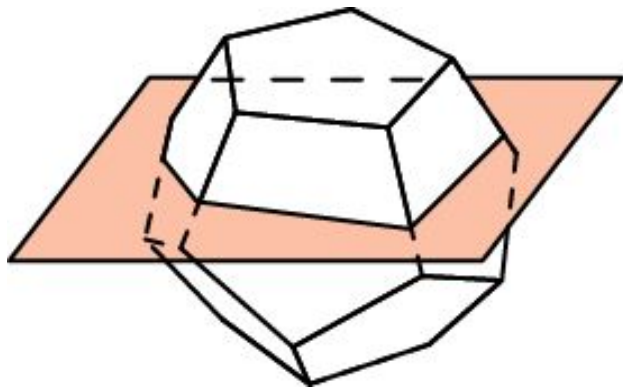
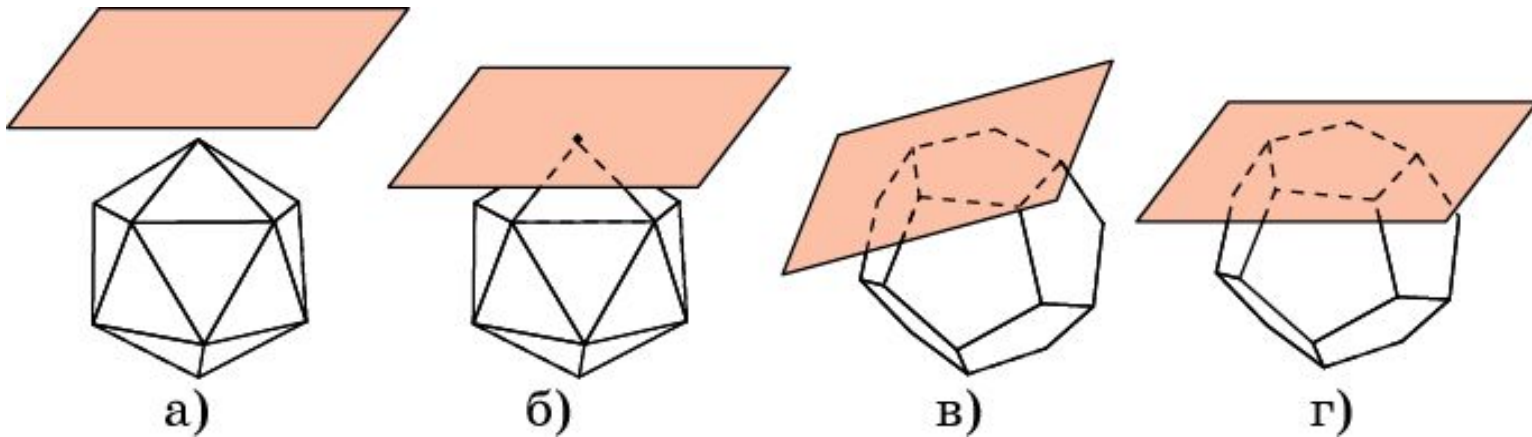


## СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки; б) иметь одну общую точку – вершину многогранника; в) иметь общий отрезок – ребро многогранника; г) иметь общий многоугольник – грань многогранника.

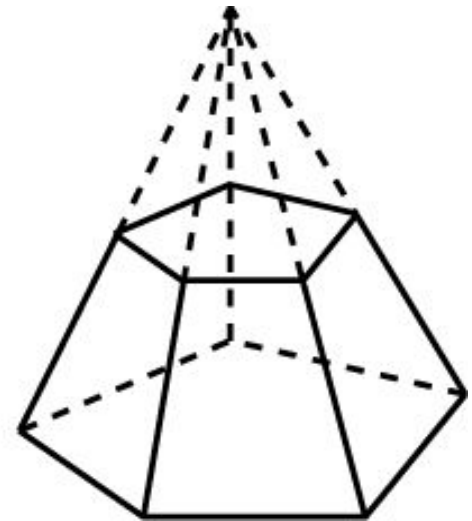
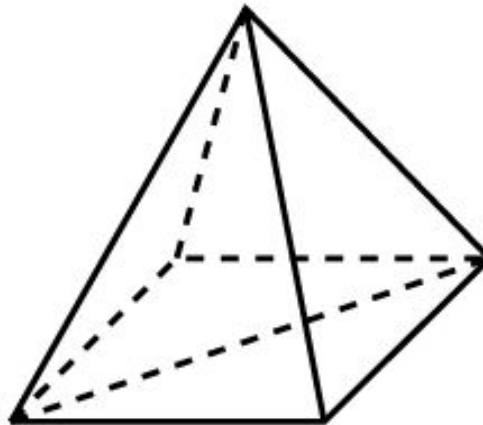
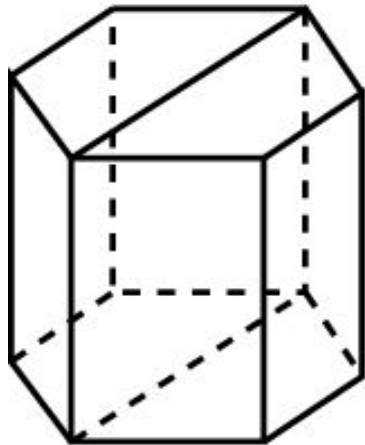


Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общая часть многогранника и плоскости называется **сечением** многогранника плоскостью.

## Диагональные сечения

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и два прилежащих к ней боковых ребра, называется **диагональным сечением** призмы.

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется **диагональным сечением** пирамиды.



Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна ее основанию. Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой**. Сечение пирамиды также называется **основанием** усеченной пирамиды.

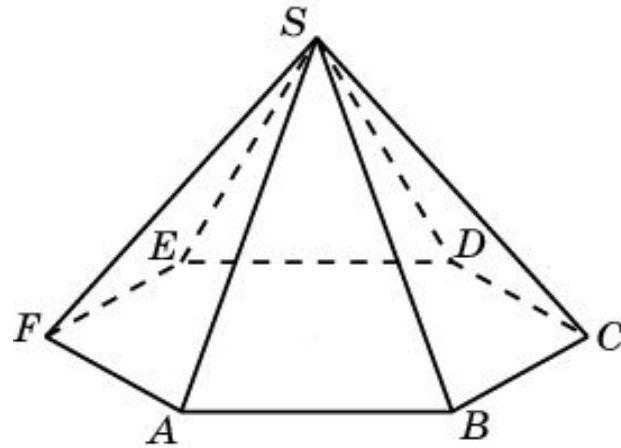
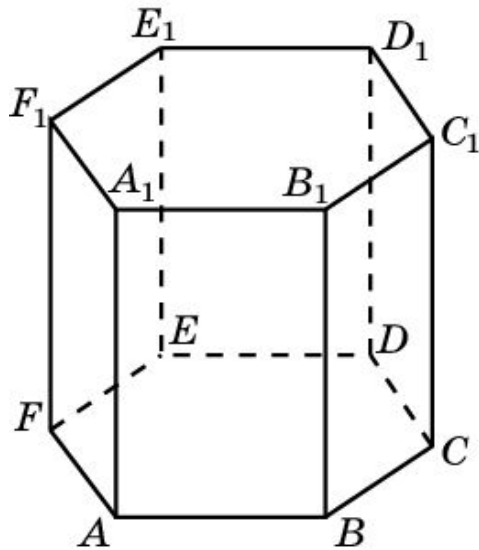
# Упражнение 1

Какой фигурой может быть сечение многогранника плоскостью?

**Ответ:** Многоугольником или объединением нескольких многоугольников.

## Упражнение 2

Сколько диагональных сечений имеет  $n$ -угольная: а) призма; б) пирамида?



Ответ: а)  $\frac{n(n-3)}{2}$ ; б)  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

## Упражнение 3

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

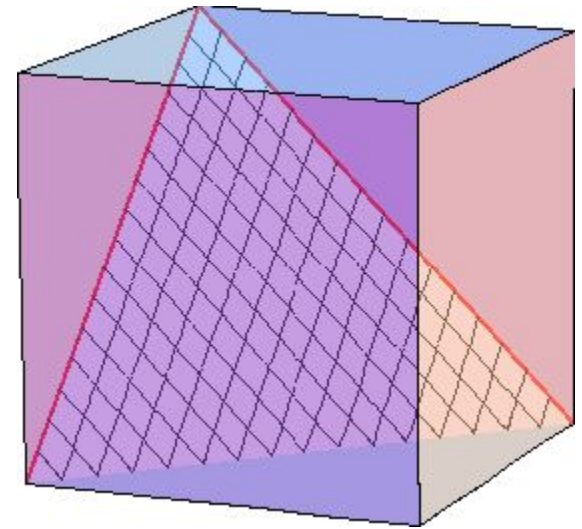
а) треугольник?

б) правильный треугольник?

в) равнобедренный треугольник?

г) прямоугольный треугольник?

д) тупоугольный треугольник?

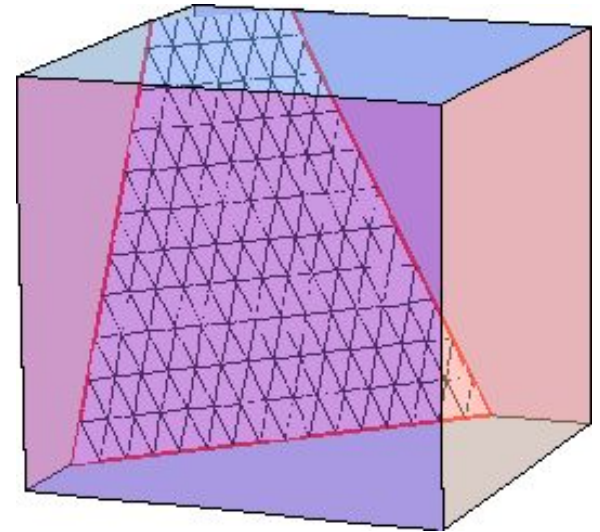


**Ответ:** а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) нет.

## Упражнение 4

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

- а) квадрат;
- б) прямоугольник;
- в) параллелограмм;
- г) ромб;
- д) трапеция;
- е) прямоугольная трапеция?



**Ответ:** а) Да; б) да; в) да; г) да; д) да; е) нет.

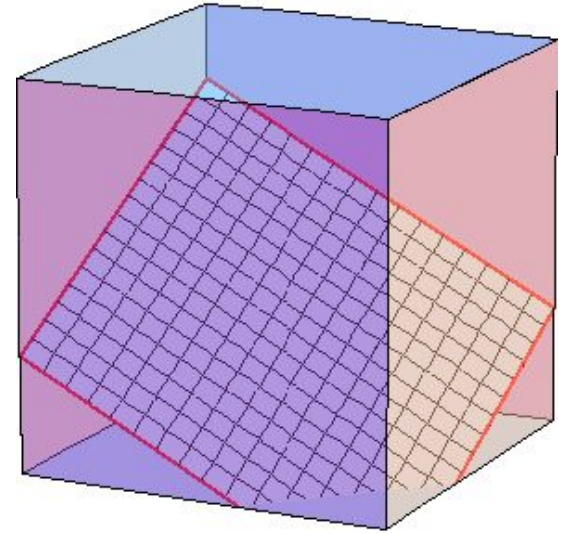
## Упражнение 5

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

- а) пятиугольник;
- б) правильный пятиугольник?

**Ответ:** а) Да;

б) нет. У пятиугольников, которые получаются в сечении куба, имеются две пары параллельных сторон, а у правильного пятиугольника таких сторон нет.



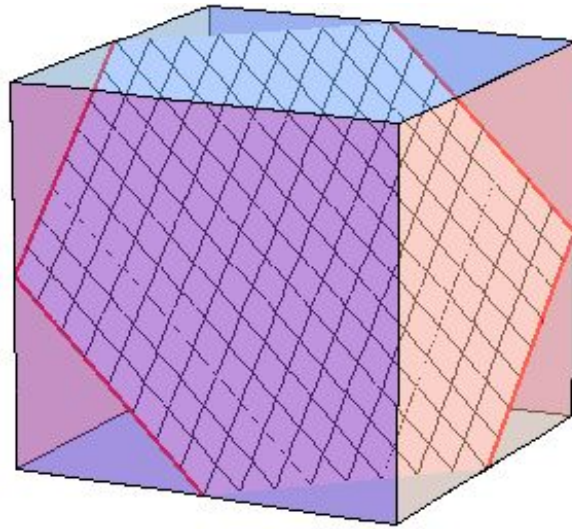
## Упражнение 6

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) шестиугольник;

б) правильный шестиугольник;

в) многоугольник с числом сторон больше шести?



**Ответ:** а) Да; б) да; в) нет.

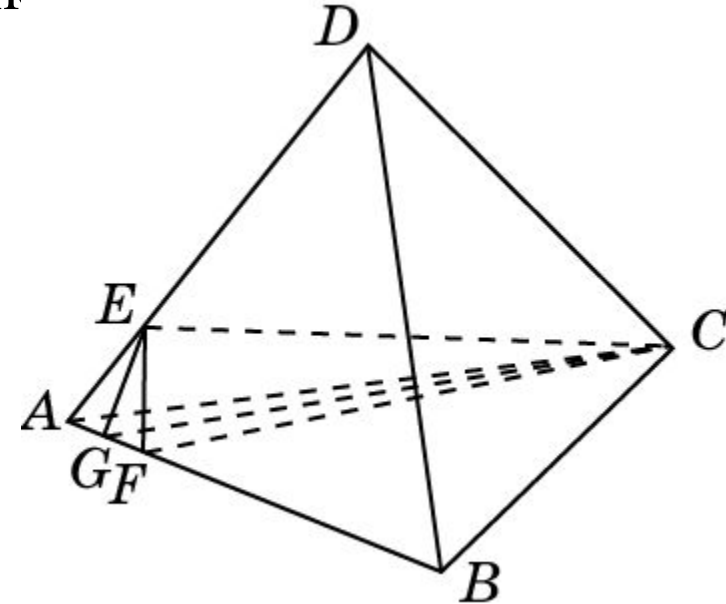


## Упражнение 7

Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник?

**Ответ:** а) да;

б) да. Пусть  $ABCD$  – единичный тетраэдр. Точка  $E$  на ребре  $AD$  отстоит от вершины  $A$  на расстояние  $1/4$ . Точка  $F$  на ребре  $AB$  отстоит от вершины  $A$  на расстояние  $x$ . Найдем  $x$ , для которого угол  $CEF$  будет прямым.

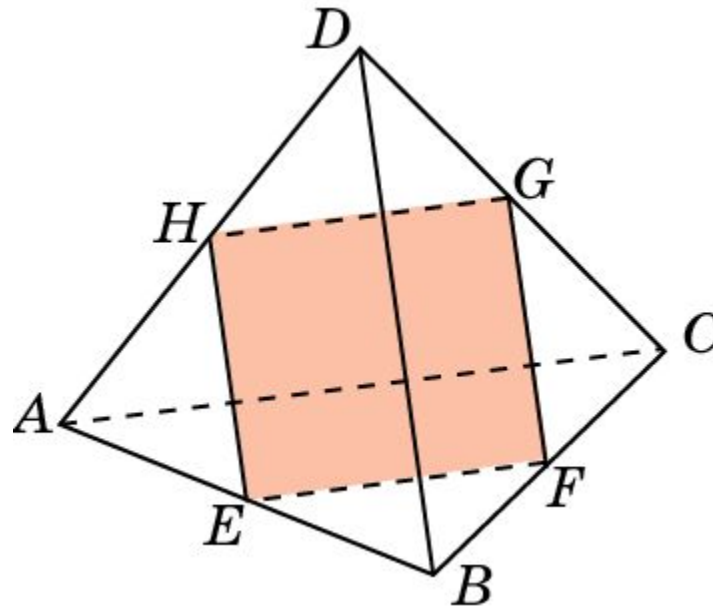


По теореме косинусов находим  $CE^2 = 13/16$ ,  $CF^2 = x^2 + 1 - x$ ,  $EF^2 = 1/16 + x^2 - x/4$ . Используя теорему Пифагора находим  $x = 1/6$ .

в) да. Если точку  $G$  на ребре  $AB$  взять между  $A$  и  $F$ , то угол  $CEF$  будет тупой.

## Упражнение 8

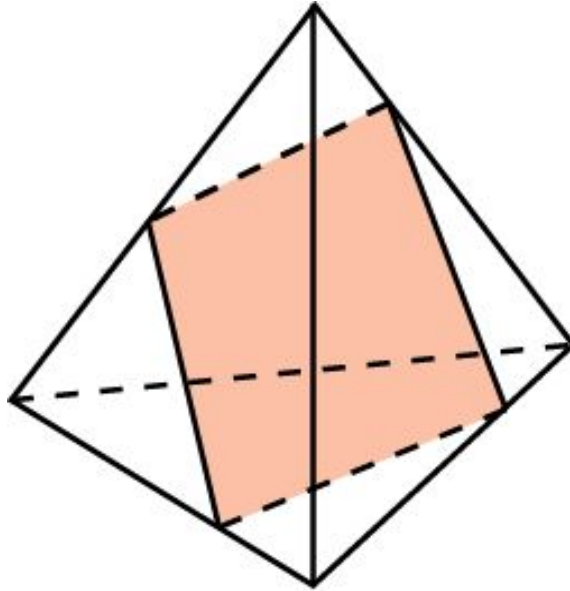
Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?



**Ответ:** Да. Если сечение проходит через середины ребер.

## Упражнение 9

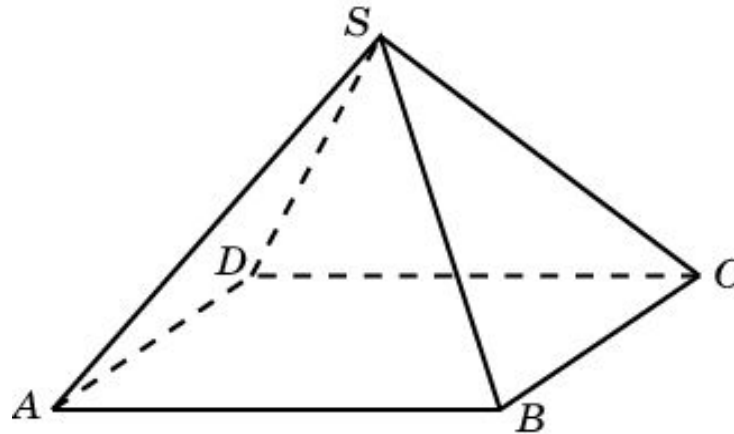
Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник, изображенный на рисунке?



Ответ: Нет.

## Упражнение 10

Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

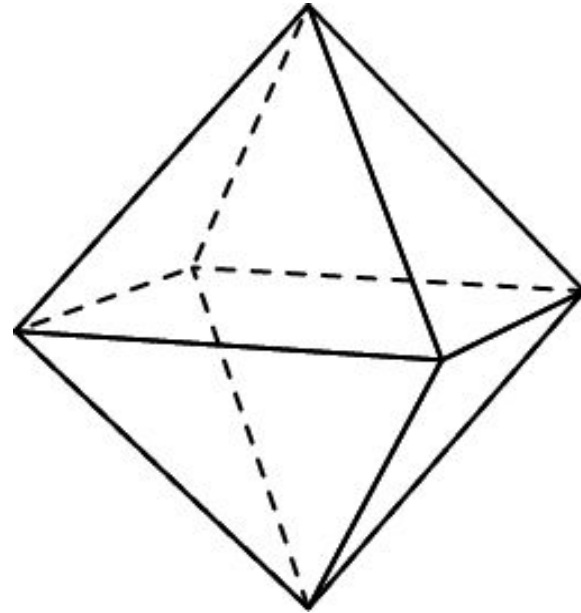


**Ответ:** Треугольник, четырехугольник, пятиугольник.

## Упражнение 11

Может ли в сечении октаэдра плоскостью получиться:

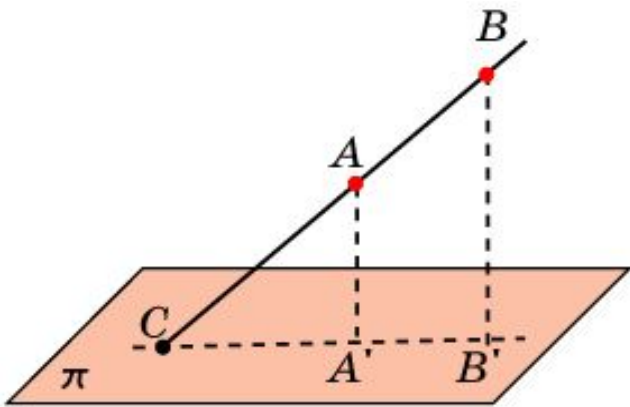
- а) треугольник;
- б) четырехугольник;
- в) пятиугольник;
- г) шестиугольник;
- д) семиугольник;
- е) восьмиугольник?



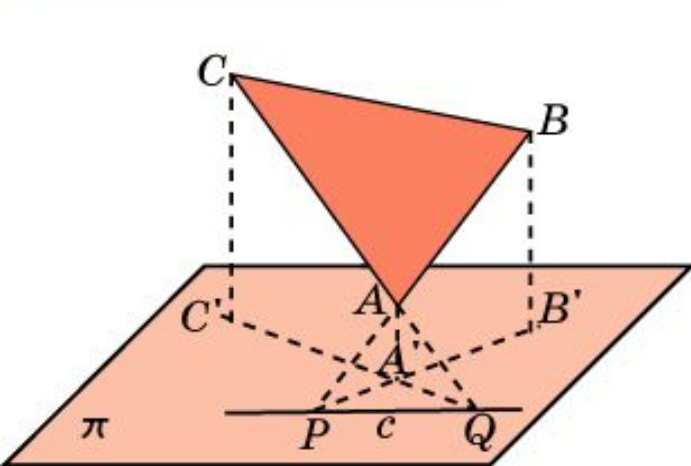
**Ответ:** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет.

# Построение сечений

При построении сечений многогранников, базовыми являются построения точки пересечения прямой и плоскости, а также линии пересечения двух плоскостей.



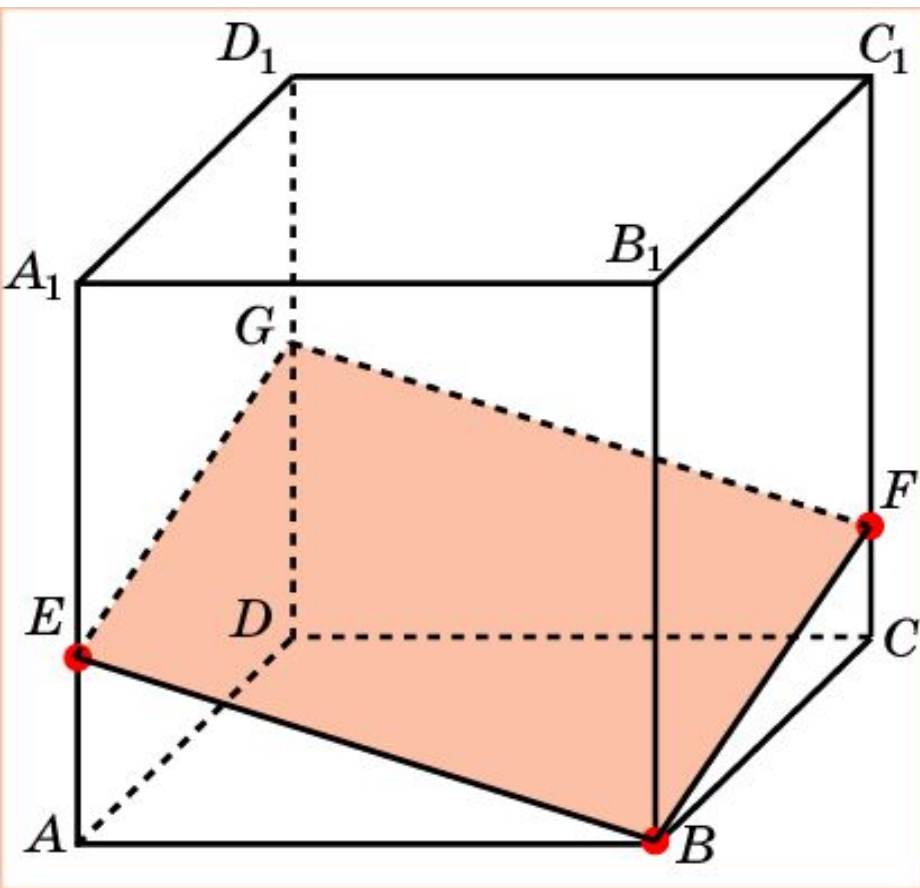
Если даны две точки  $A$  и  $B$  прямой и известны их проекции  $A'$  и  $B'$  на плоскость, то точкой  $C$  пересечения данной прямой и плоскости будет точка пересечения прямых  $AB$  и  $A'B'$



Если даны три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  плоскости и известны их проекции  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  на другую плоскость, то для нахождения линии пересечения этих плоскостей находят точки  $P$  и  $Q$  пересечения прямых  $AB$  и  $AC$  со второй плоскостью. Прямая  $PQ$  будет искомой линией пересечения плоскостей.

# Упражнение 1

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ , лежащие на ребрах куба и вершину  $B$ .



**Решение.** Для построения сечения куба, проходящего через точки  $E$ ,  $F$  и вершину  $B$ ,

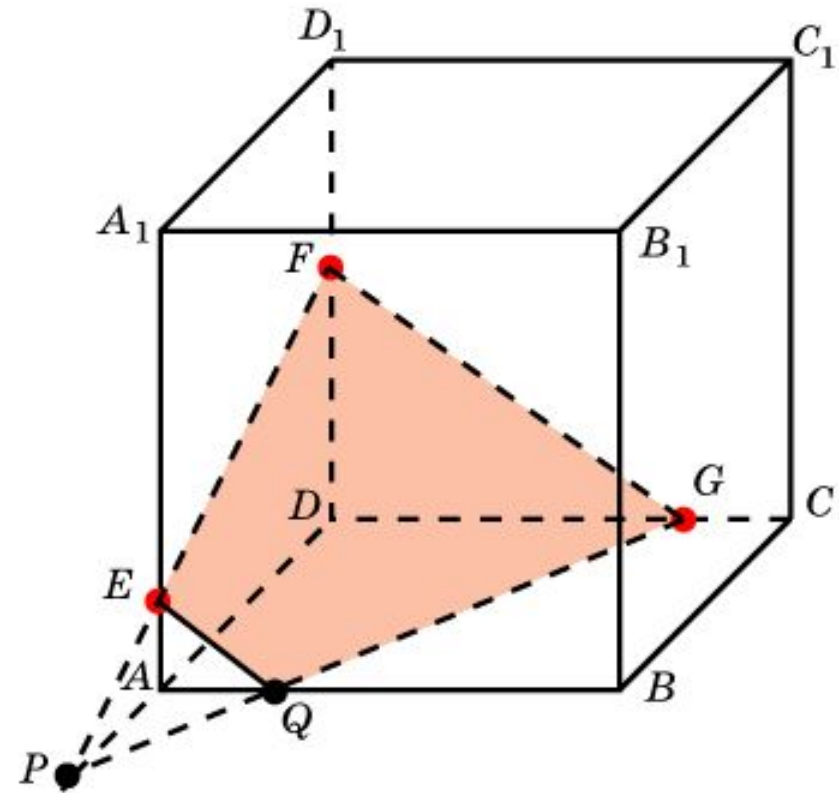
Соединим отрезками точки  $E$  и  $B$ ,  $F$  и  $B$ .

Через точки  $E$  и  $F$  проведем прямые, параллельные  $BF$  и  $BE$ , соответственно.

Полученный параллелограмм  $BFG E$  будет искомым сечением.

## Упражнение 2

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , лежащие на ребрах куба.



**Решение.** Для построения сечения куба, проходящего через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , проведем прямую  $EF$  и обозначим  $P$  её точку пересечения с  $AD$ .

Обозначим  $Q$  точку пересечения прямых  $PG$  и  $AB$ .

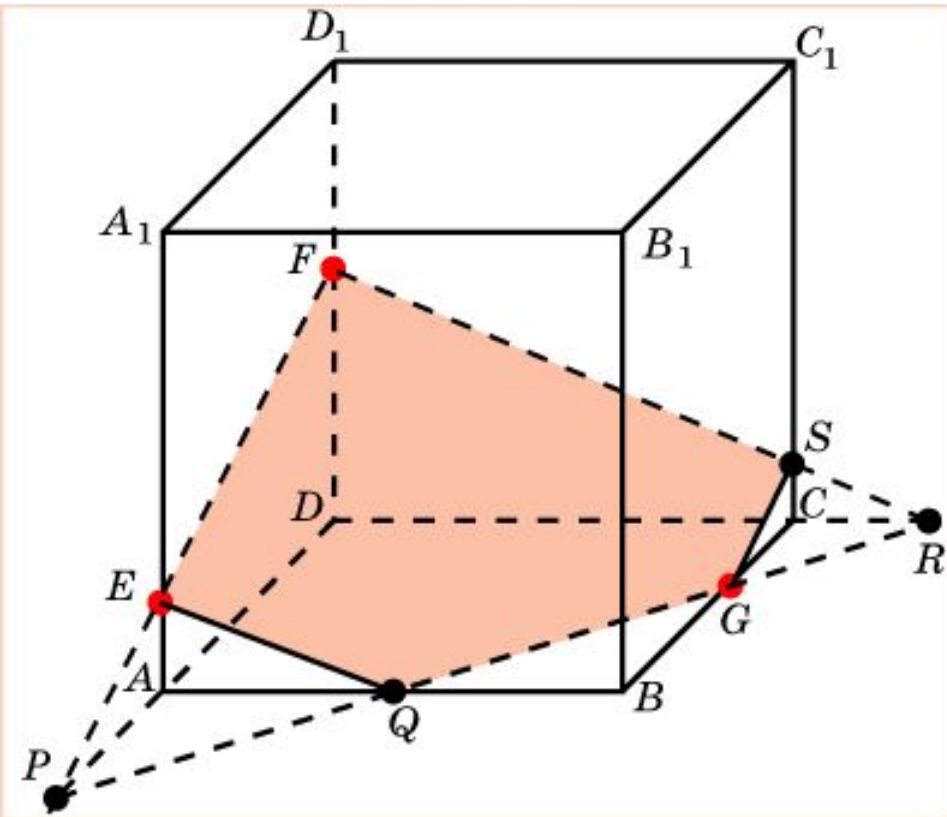
Соединим точки  $E$  и  $Q$ ,  $F$  и  $G$ .

Полученная трапеция  $EFGQ$  будет искомым сечением.



## Упражнение 3

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , лежащие на ребрах куба.



**Решение.** Для построения сечения куба, проходящего через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,

проведем прямую  $EF$  и обозначим  $P$  её точку пересечения с  $AD$ .

Обозначим  $Q$ ,  $R$  точки пересечения прямой  $PG$  с  $AB$  и  $DC$ .

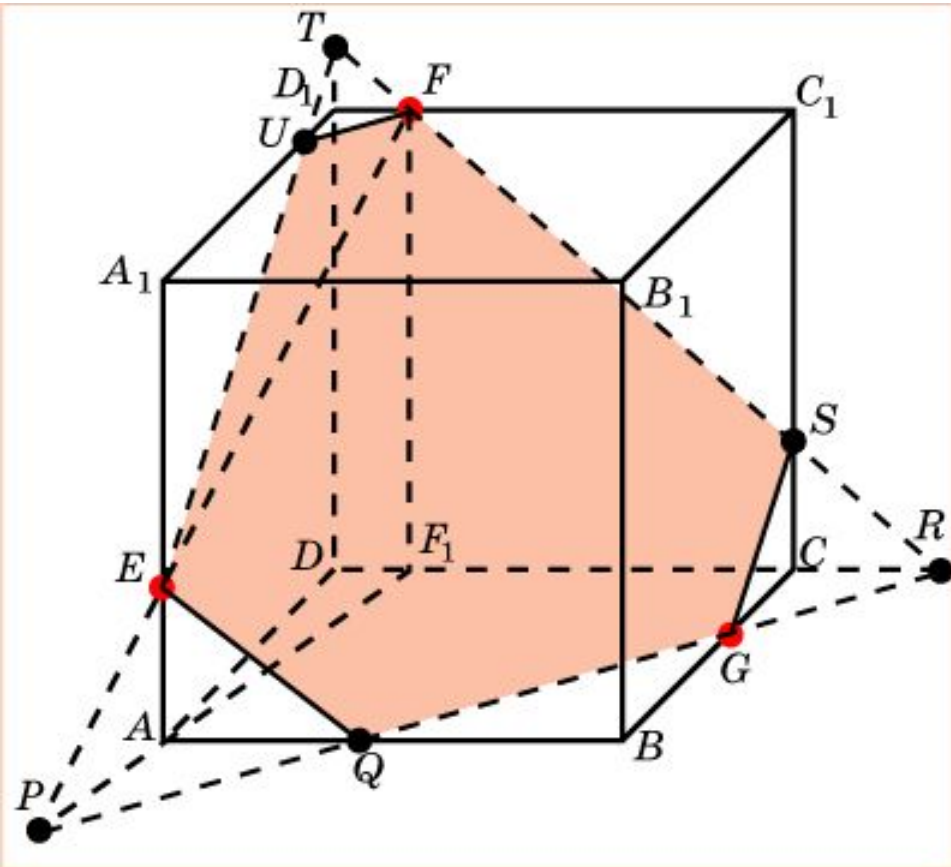
Обозначим  $S$  точку пересечения  $FR$  с  $CC_1$ .

Соединим точки  $E$  и  $Q$ ,  $G$  и  $S$ .

Полученный пятиугольник  $EFSGQ$  будет искомым сечением.

## Упражнение 4

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , лежащие на ребрах куба.



**Решение.** Для построения сечения куба, проходящего через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , найдем точку  $P$  пересечения прямой  $EF$  и плоскости грани  $ABCD$ .

Обозначим  $Q$ ,  $R$  точки пересечения прямой  $PG$  с  $AB$  и  $CD$ .

Проведем прямую  $RF$  и обозначим  $S$ ,  $T$  её точки пересечения с  $CC_1$  и  $DD_1$ .

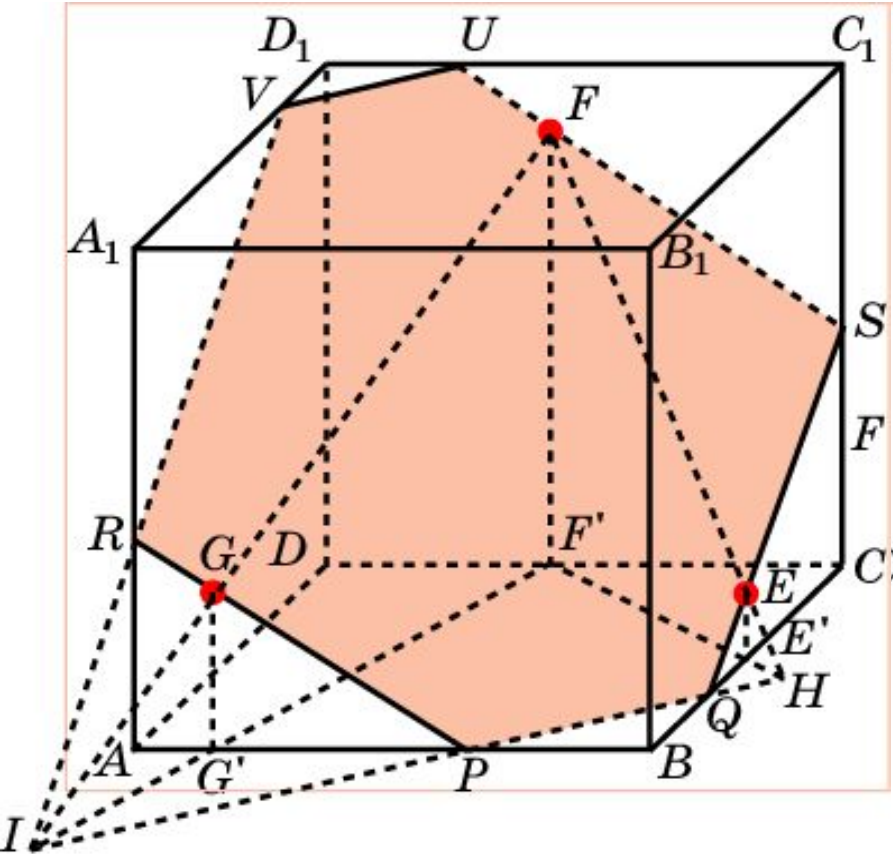
Проведем прямую  $TE$  и обозначим  $U$  её точку пересечения с  $A_1D_1$ .

Соединим точки  $E$  и  $Q$ ,  $G$  и  $S$ ,  $U$  и  $F$ .

Полученный шестиугольник  $EUFSGQ$  будет искомым сечением.

## Упражнение 5

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , принадлежащие граням  $BB_1C_1C$ ,  $CC_1D_1D$ ,  $AA_1B_1B$ , соответственно.



**Решение.** Из данных точек опустим перпендикуляры  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$  на плоскость грани  $ABCD$ , и найдем точки  $I$  и  $H$  пересечения прямых  $FE$  и  $FG$  с этой плоскостью.

$IH$  будет линией пересечения искомой плоскости и плоскости грани  $ABCD$ . Обозначим  $Q, R$  точки пересечения прямой  $IH$  с  $AB$  и  $BC$ .

Проведем прямые  $PG$  и  $QE$  и

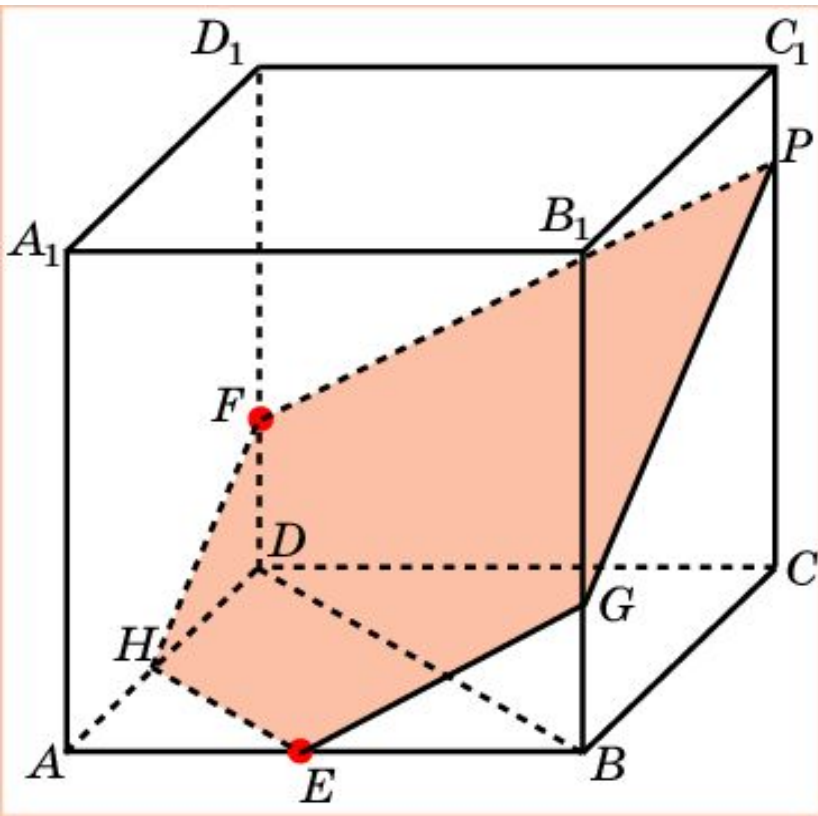
обозначим  $R, S$  их точки пересечения с  $AA_1$  и  $CC_1$ .

Проведем прямые  $SU, UV$  и  $RV$ , параллельные  $PR, PQ$  и  $QS$ .

Полученный шестиугольник  $RPQSUV$  будет искомым сечением.

## Упражнение 6

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ , лежащие на ребрах куба, параллельно диагонали  $BD$ .



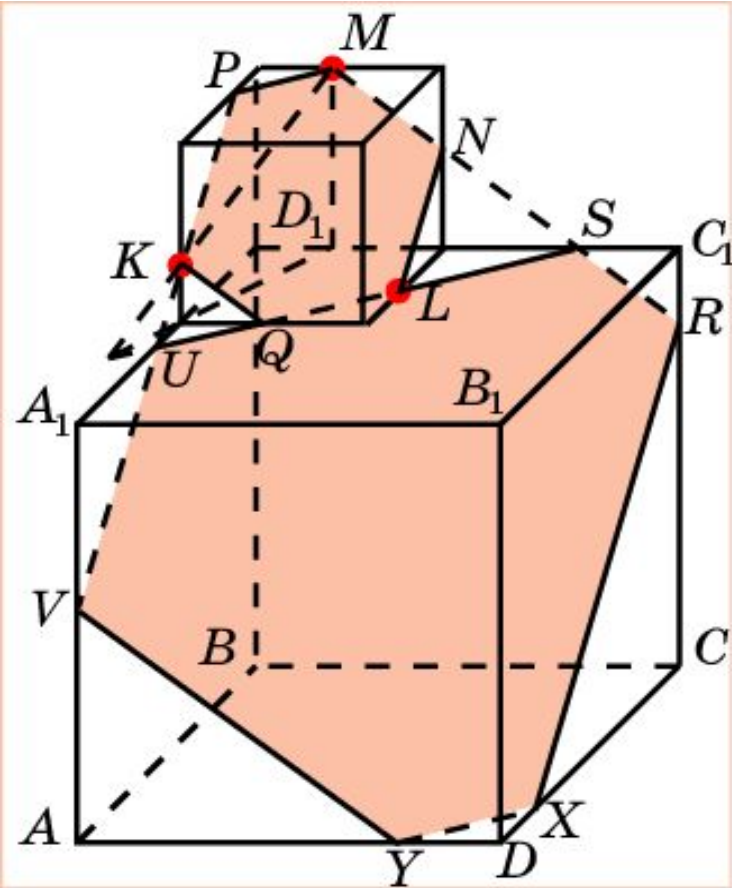
**Решение.** Проведем прямые  $FG$  и  $EH$ , параллельные  $BD$ .

Проведем прямую  $FP$ , параллельную  $EG$ , и соединим точки  $P$  и  $G$ .

Соединим точки  $E$  и  $G$ ,  $F$  и  $H$ .

Полученный пятиугольник  $EGPFH$  будет искомым сечением.

Постройте сечение двух кубов плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , лежащие на ребрах куба.



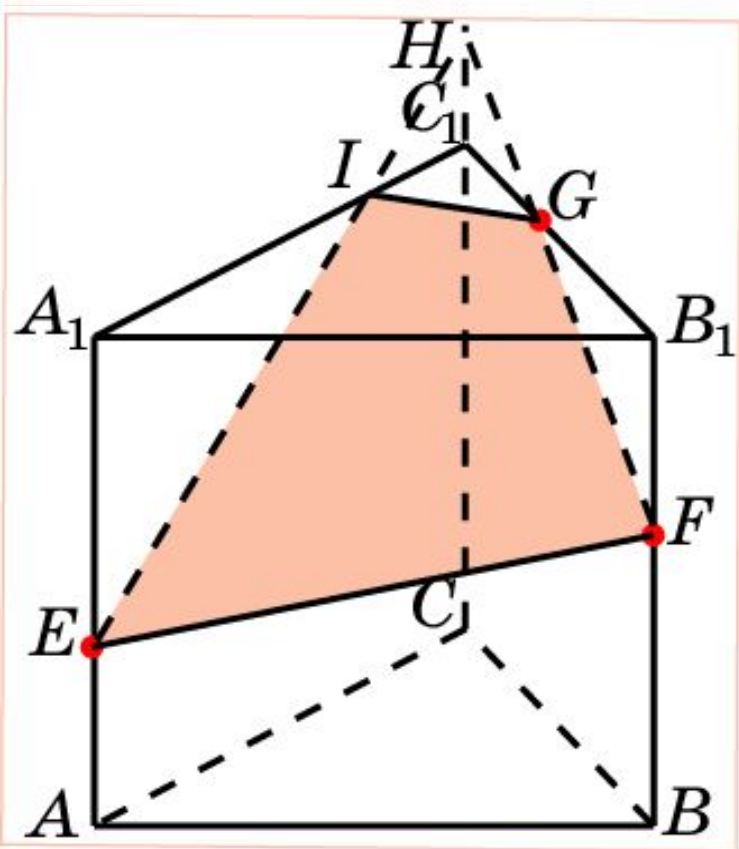
**Решение.** Сначала построим сечение верхнего куба. Это будет шестиугольник  $LNMPKQ$ .

Продолжим  $MN$ ,  $PK$  и  $QL$ . Соответствующие точки обозначим  $R$ ,  $S$  и  $U$ ,  $V$ .

Проведем прямые  $RX$  и  $VY$ , параллельные  $UV$  и  $SR$ , соответственно.

Искомое сечение состоит из двух шестиугольников  $LNMPKQ$  и  $RSUVYX$ .

Постройте сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .

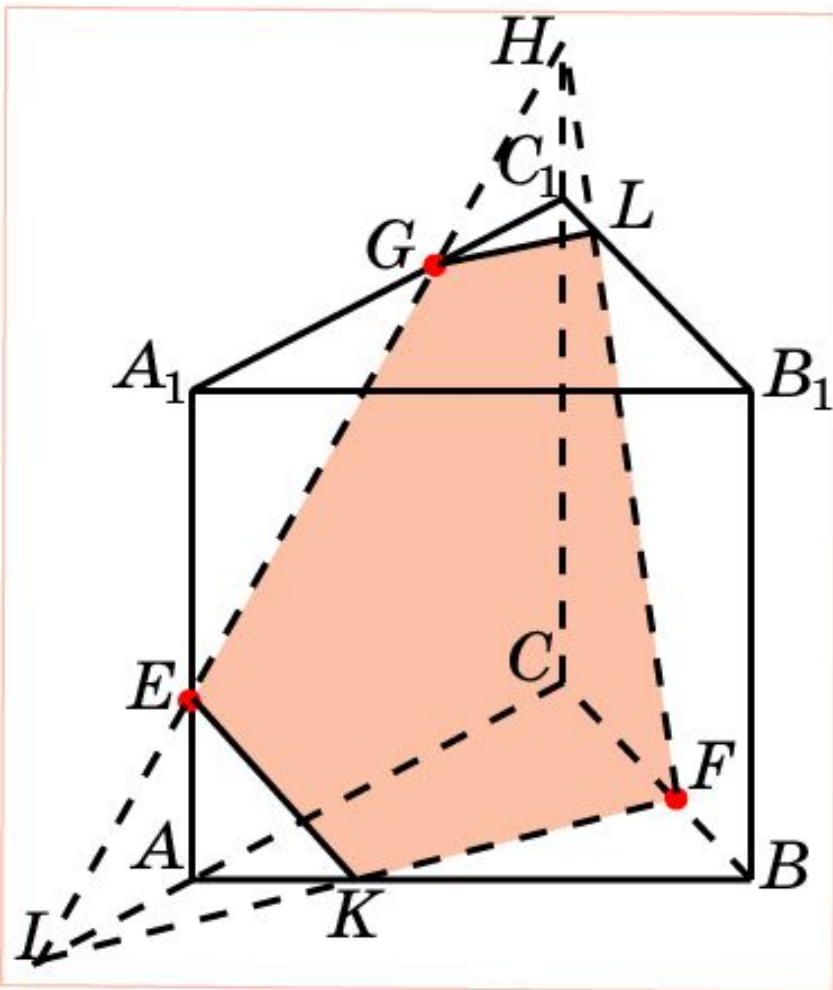


**Решение.** Соединим точки  $E$  и  $F$ .  
Проведем прямую  $FG$  и ее точку пересечения с  $CC_1$  обозначим  $H$ .  
Проведем прямую  $EH$  и ее точку пересечения с  $A_1C_1$  обозначим  $I$ .  
Соединим точки  $I$  и  $G$ .

Полученный четырехугольник  $EFGI$  будет искомым сечением.



Постройте сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



**Решение.** Проведем прямую  $EG$  и обозначим  $H$  и  $I$  ее точки пересечения с  $CC_1$  и  $AC$ .

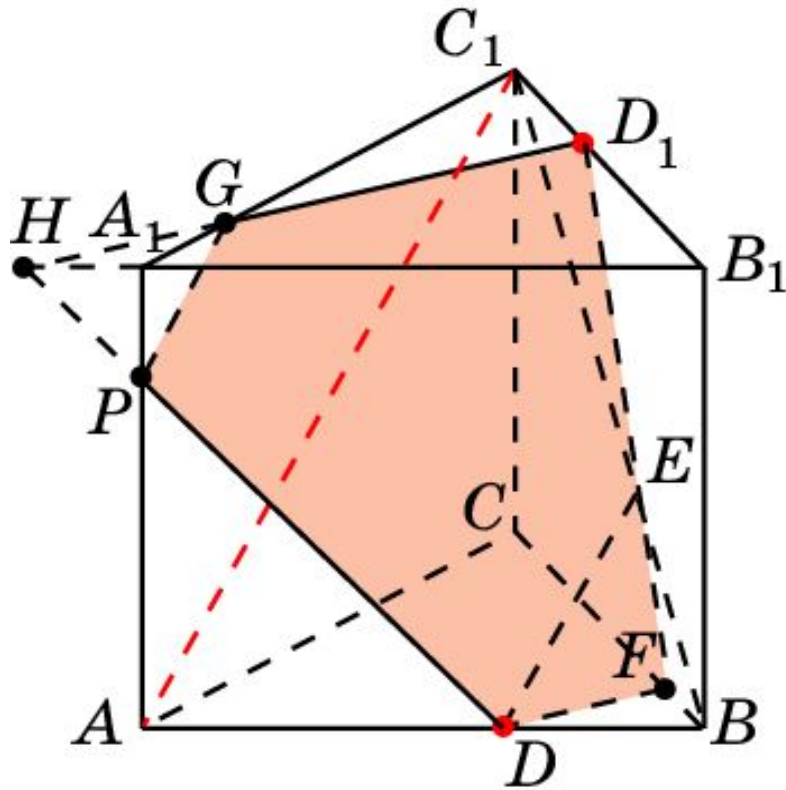
Проведем прямую  $IF$  и ее точку пересечения с  $AB$  обозначим  $K$ .

Проведем прямую  $FH$  и ее точку пересечения с  $B_1C_1$  обозначим  $L$ .

Соединим точки  $E$  и  $K$ ,  $G$  и  $L$ .

Полученный пятиугольник  $EKFLG$  будет искомым сечением.

Постройте сечение призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  плоскостью, параллельной  $AC_1$ , проходящей через точки  $D$  и  $D_1$ .



**Решение.** Через точку  $D$  проведем прямую параллельную  $AC_1$  и обозначим  $E$  ее точку пересечения с прямой  $BC_1$ . Эта точка будет принадлежать плоскости грани  $ADD_1A_1$ .

Проведем прямую  $DE$  и обозначим  $F$  ее точку пересечения с ребром  $BC$ .

Соединим отрезком точки  $F$  и  $D$ .

Через точку  $D$  проведем прямую параллельную прямой  $FD$  и обозначим  $G$  точку ее пересечения с ребром  $A_1C_1$ ,  $H$  – точку ее пересечения с прямой  $A_1B_1$ .

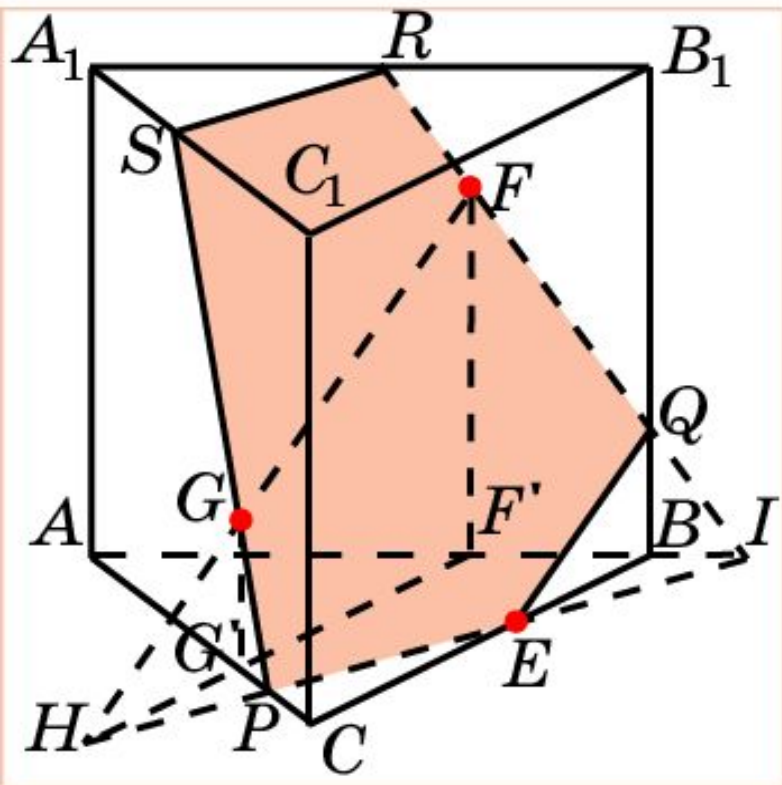
Проведем прямую  $DH$  и обозначим  $P$  ее точку пересечения с ребром  $AA_1$ .

Соединим отрезком точки  $P$  и  $G$ .

Полученный четырехугольник  $EPFG$  будет искомым сечением.



Построить сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E$  на ребре  $BC$ ,  $F$  на грани  $ABB_1A_1$  и  $G$  на грани  $ACC_1A_1$ .



**Решение.** Проведем прямую  $GF$  и найдем точку  $H$  ее пересечения с плоскостью  $ABC$ .

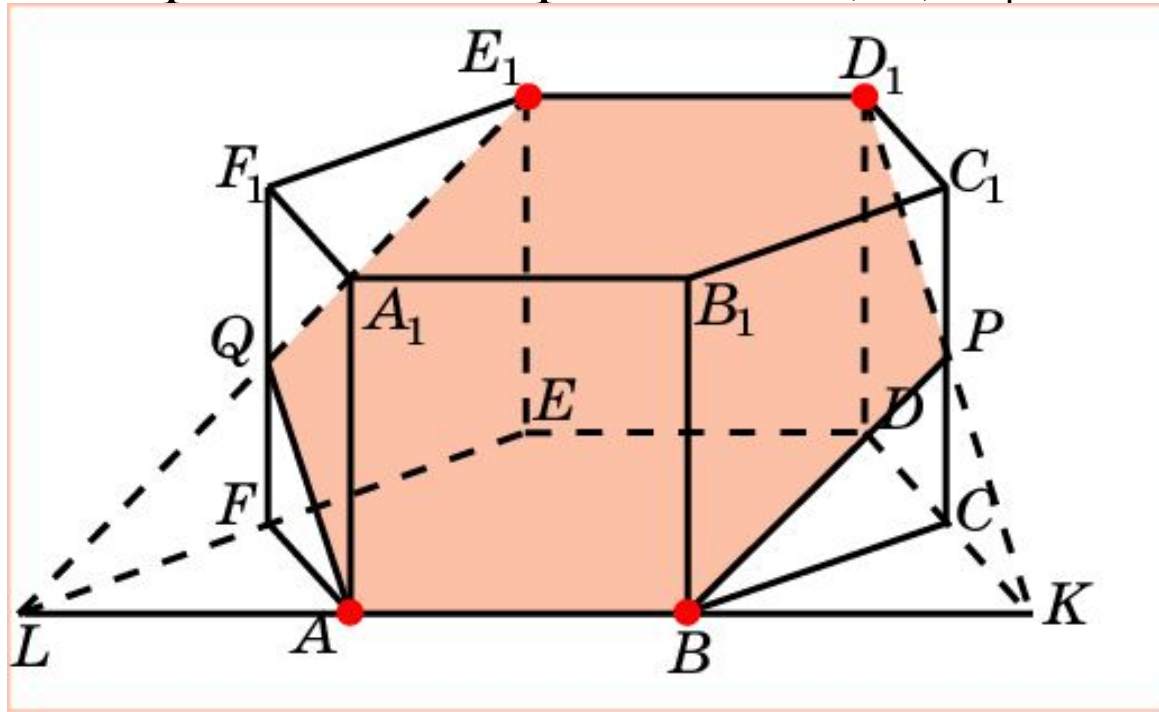
Проведем прямую  $EH$ , и обозначим  $P$  и  $I$  ее точки пересечения с  $AC$  и  $AB$ .

Проведем прямые  $PG$  и  $IF$ , и обозначим  $S$ ,  $R$  и  $Q$  их точки пересечения с  $A_1C_1$ ,  $A_1B_1$  и  $BB_1$ .

Соединим точки  $E$  и  $Q$ ,  $S$  и  $R$ .

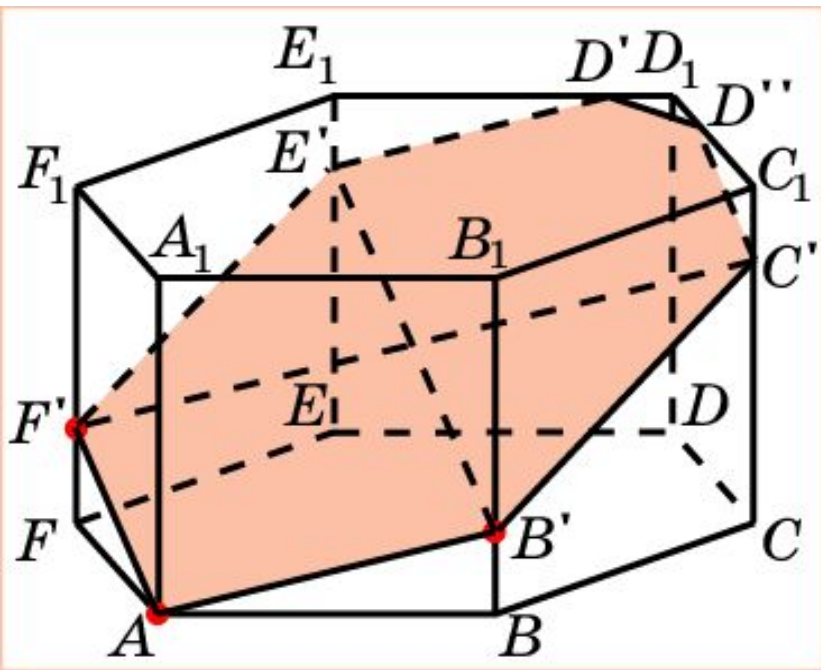
Полученный пятиугольник  $EQRSP$  будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $D_1$ .



**Решение.** Заметим, что сечение будет проходить через точку  $E_1$ .  
Проведем прямую  $AB$  и найдем ее точки пересечения  $K$  и  $L$  с прямыми  $CD$  и  $FE$ .  
Проведем прямые  $KD_1$ ,  $LE_1$  и найдем их точки пересечения  $P$ ,  $Q$  с прямыми  $CC_1$  и  $FF_1$ .  
Шестиугольник  $ABPD_1E_1Q$  будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $A, B', F'$ .



**Решение.** Проведем отрезки  $AB'$  и  $AF'$ .

Через точку  $B'$  проведем прямую, параллельную  $AF'$ , и ее точку пересечения с  $EE_1$  обозначим  $E'$ .

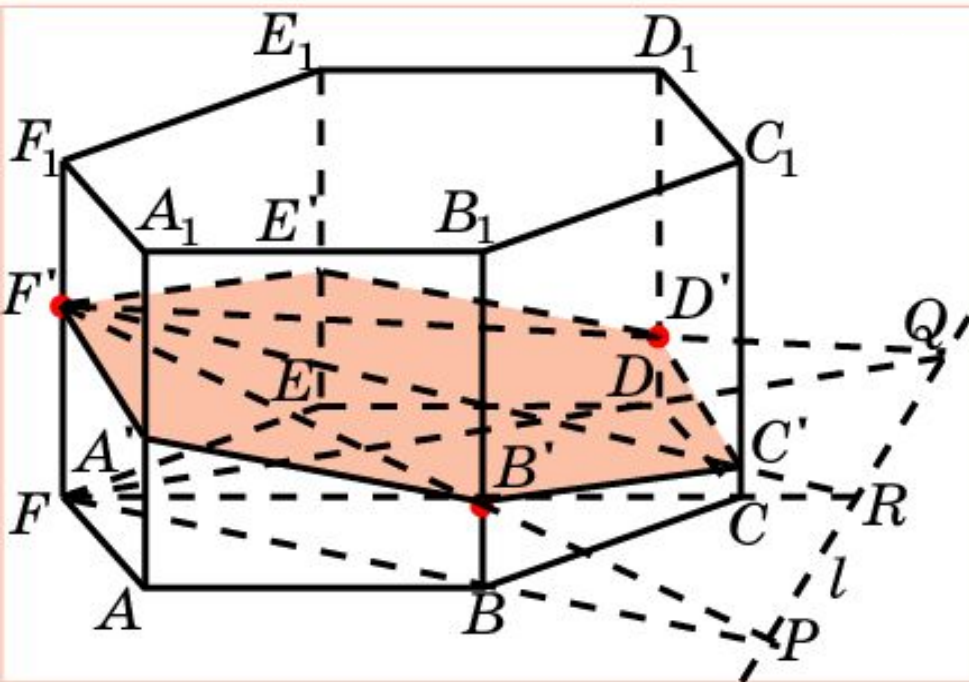
Через точку  $F'$  проведем прямую, параллельную  $AB'$ , и ее точку пересечения с  $CC_1$  обозначим  $C'$ .

Через точки  $E'$  и  $C'$  проведем прямые, параллельные  $AB'$  и  $AF'$ , и их точки пересечения с  $D_1E_1$  и  $C_1D_1$  обозначим  $D', D''$ .

Соединим точки  $B', C'; D', D''; F', E'$ .

Полученный семиугольник  $AB'C'D''D'E'F'$  будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $F'$ ,  $B'$ ,  $D'$ .



**Решение.** Проведем прямые  $F'B'$  и  $F'D'$ , и найдем их точки пересечения  $P$  и  $Q$  с плоскостью  $ABC$ .

Проведем прямую  $PQ$ .

Обозначим  $R$  точку пересечения  $PQ$  и  $FC$ .

Точку пересечения  $F'R$  и  $CC_1$  обозначим  $C'$ .

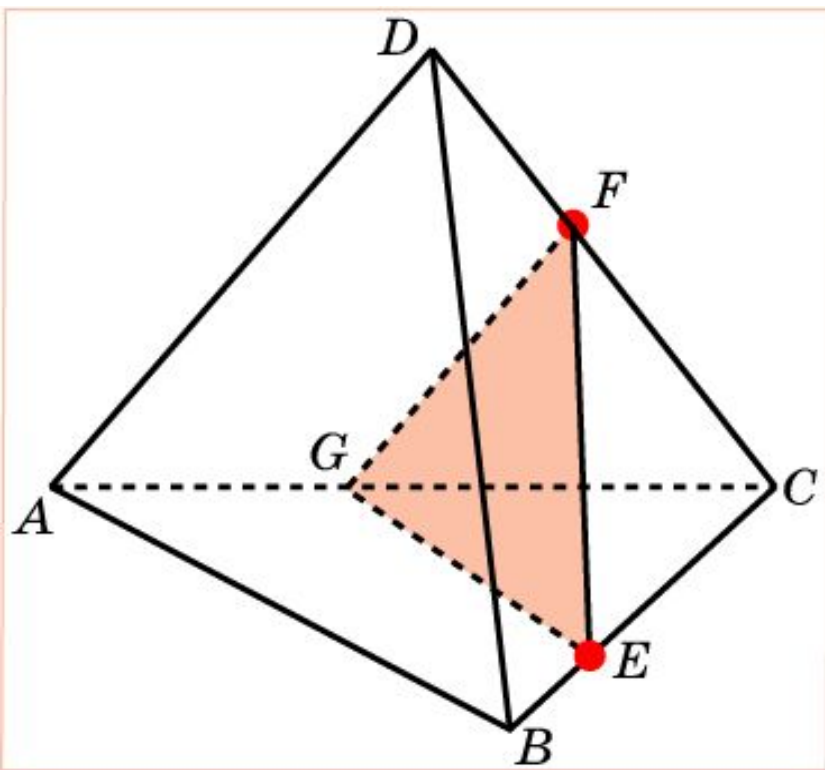
Соединим точки  $B'$ ,  $C'$  и  $C'$ ,  $D'$ .

Через точку  $F'$  проведем прямые, параллельные  $C'D'$  и  $B'C'$ , и их точки пересечения с  $AA_1$  и  $EE_1$  обозначим  $A'$  и  $E'$ .

Соединим точки  $A'$ ,  $B'$  и  $E'$ ,  $D'$ .

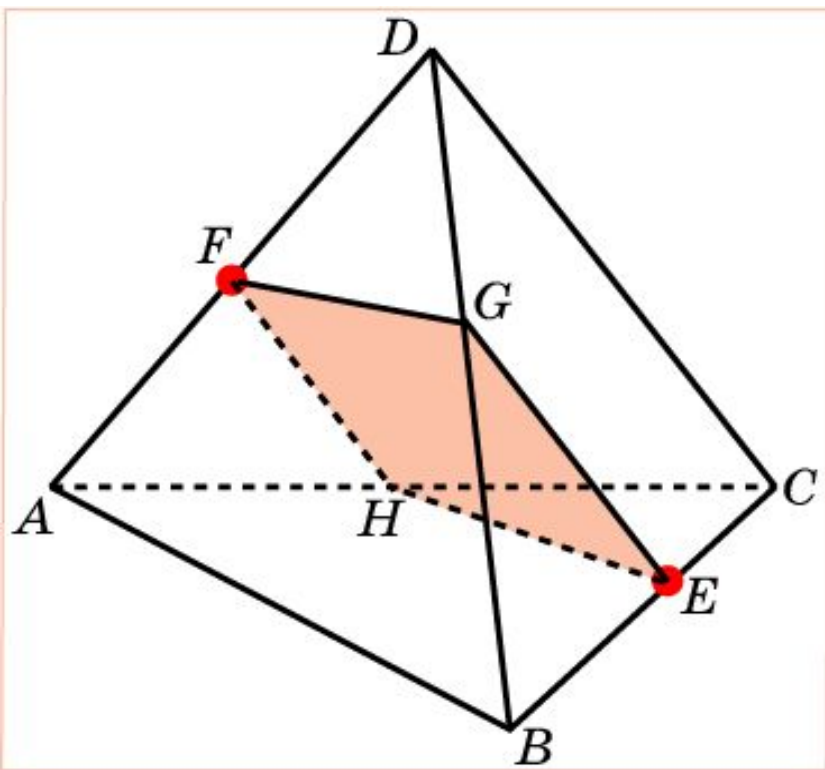
Полученный шестиугольник  $A'B'C'D'E'F'$  будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды  $ABCD$  плоскостью, параллельной ребру  $AD$  и проходящей через точки  $E$ ,  $F$ .



**Решение.** Соединим точки  $E$  и  $F$ .  
Через точку  $F$  проведем прямую  $FG$ , параллельную  $AD$ .  
Соединим точки  $G$  и  $E$ .  
Полученный треугольник  $EFG$  будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды  $ABCD$  плоскостью, параллельной ребру  $CD$  и проходящей через точки  $E, F$ .

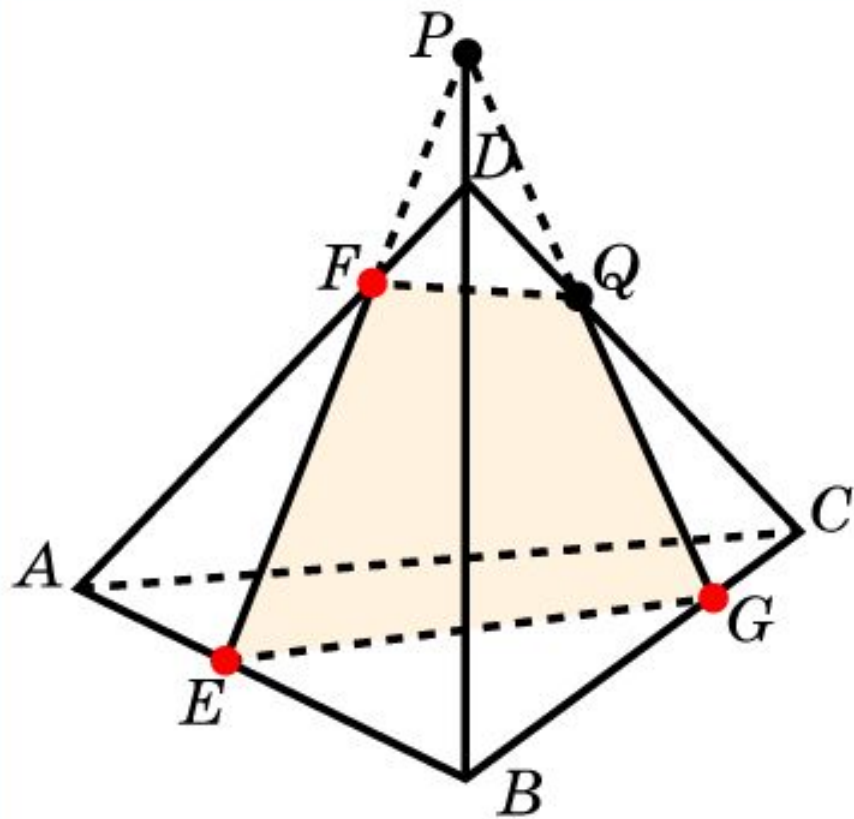


**Решение.** Через точки  $E$  и  $F$  проведем прямые  $EG$  и  $FH$ , параллельные  $CD$ .

Соединим точки  $G$  и  $F$ ,  $E$  и  $H$ .

Полученный четырехугольник  $EGFH$  будет искомым сечением.

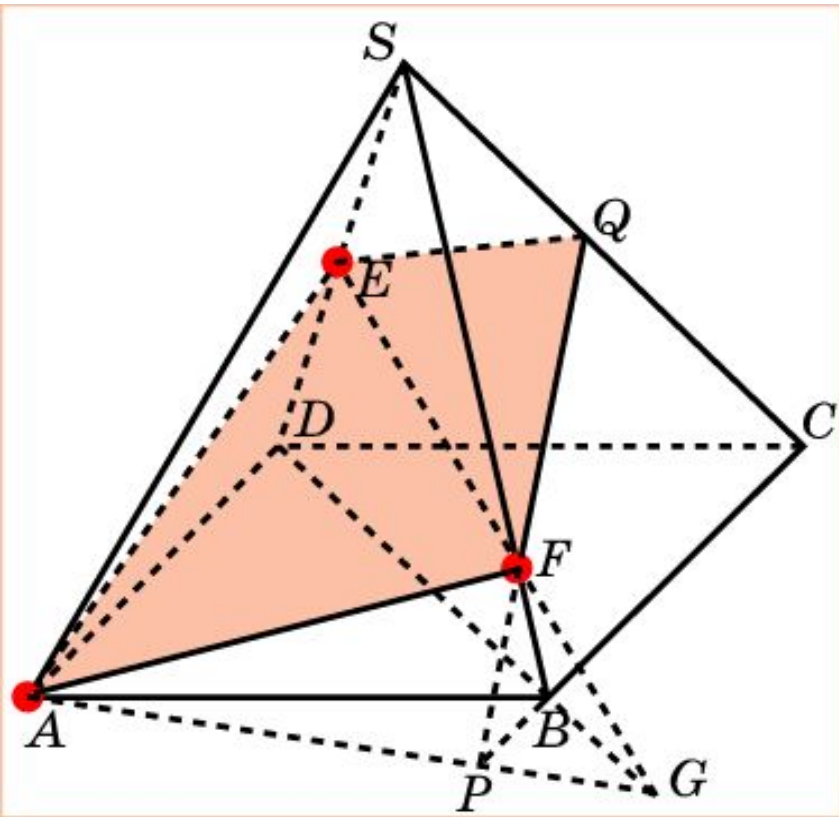
Построить сечение пирамиды  $ABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



**Решение.** Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки  $E, F, G$ , проведем прямую  $EF$  и обозначим  $P$  её точку пересечения с  $BD$ . Обозначим  $Q$  точку пересечения прямых  $PG$  и  $CD$ . Соединим точки  $F$  и  $Q$ ,  $E$  и  $G$ . Полученный четырехугольник  $EFQG$  будет искомым сечением.



Построить сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $A, E, F$ .



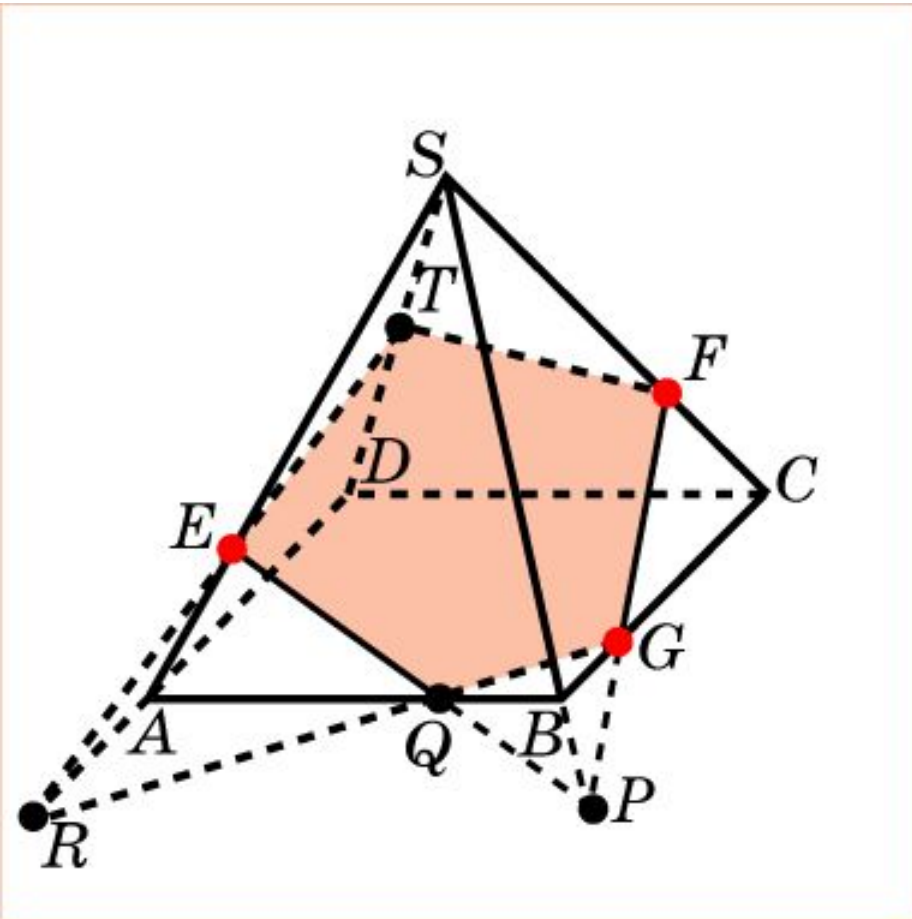
**Решение.** Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки  $E, F, G$ , проведем прямую  $EF$  и обозначим  $G$  её точку пересечения с  $DB$ .

Проведем прямые  $AG$  и  $CB$ . Обозначим  $P$  их точку пересечения. Проведем прямую  $PF$  и обозначим  $Q$  её точку пересечения с  $SC$ .

Соединим точки  $A$  и  $F$ ,  $A$  и  $E$ ,  $E$  и  $Q$ . Полученный четырехугольник  $AFQE$  будет искомым сечением.



Построить сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



**Решение.** Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки  $E, F, G$ ,

проведем прямую  $FG$  и обозначим  $P$  её точку пересечения с  $SB$ .

Проведем прямую  $PE$  и обозначим  $Q$  её точку пересечения с  $AB$ .

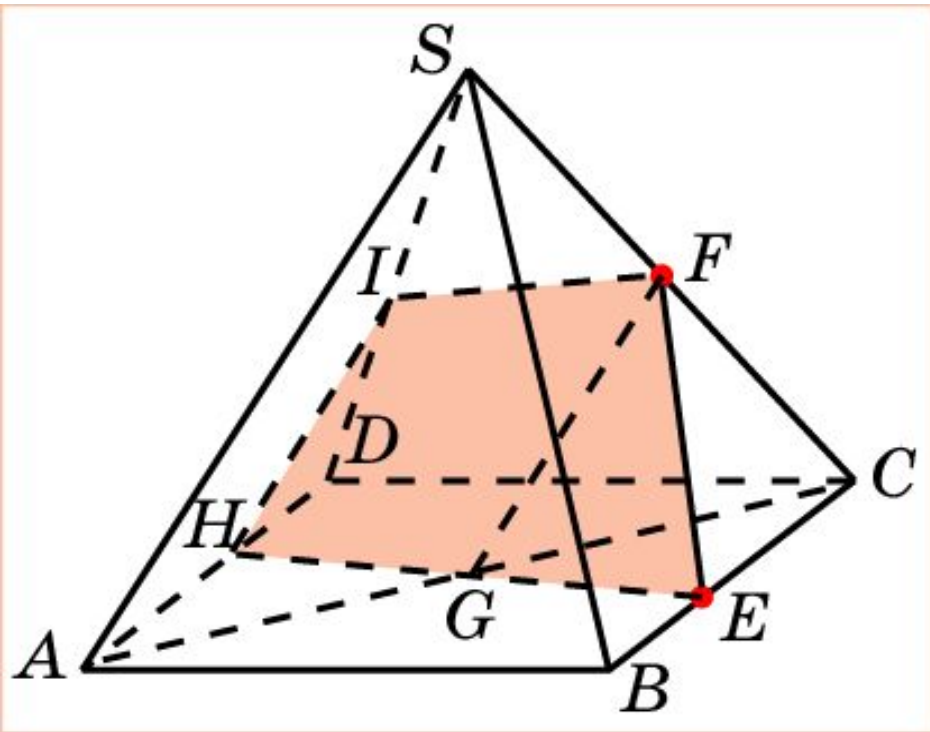
Проведем прямую  $GQ$  и обозначим  $R$  её точку пересечения с  $AD$ .

Проведем прямую  $RE$  и обозначим  $T$  её точку пересечения с  $SD$ .

Соединим точки  $T$  и  $F$ .

Полученный пятиугольник  $ETFGQ$  будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, параллельной  $AS$  и проходящей через точки  $E, F$ .



**Решение.** Соединим точки  $E$  и  $F$ .  
Через точку  $F$  проведем прямую, параллельную  $AS$ , и обозначим  $G$  ее точку пересечения с  $AC$ .

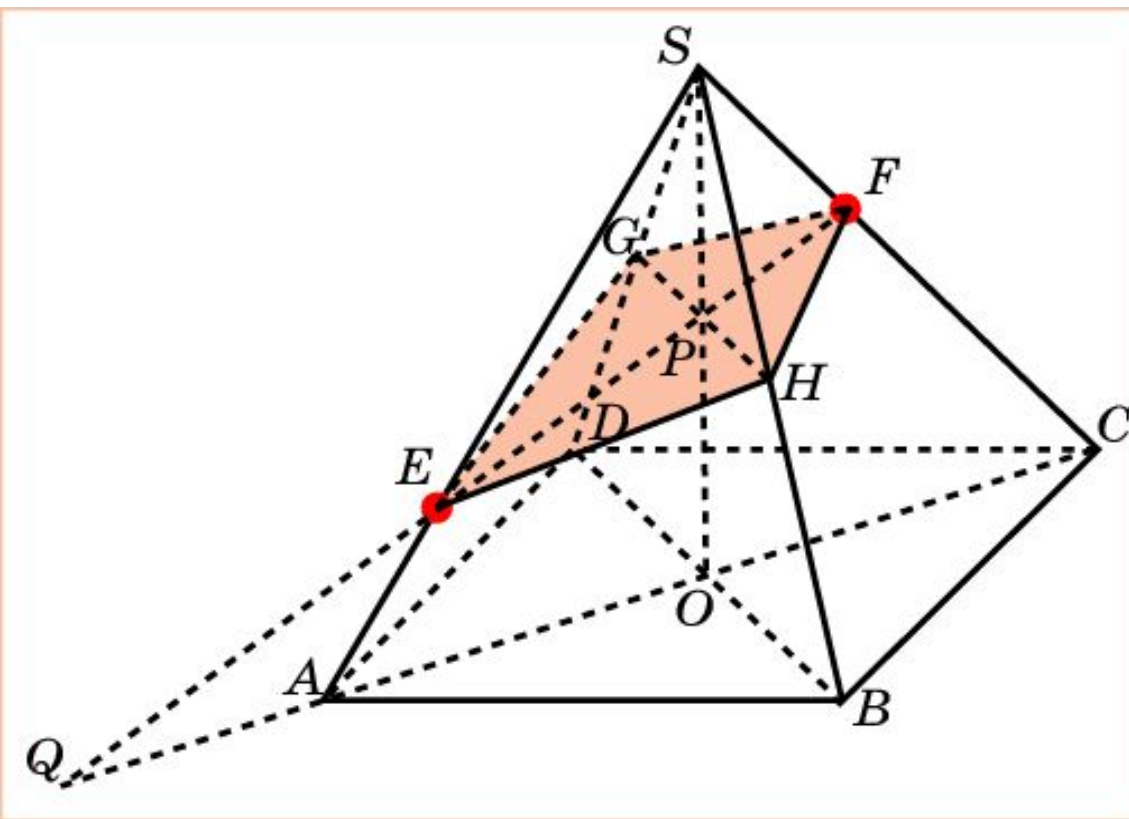
Проведем прямую  $EG$  и обозначим  $H$  ее точку пересечения с  $AD$ .

Через точку  $H$  проведем прямую, параллельную  $AS$ , и обозначим  $I$  ее точку пересечения с  $SD$ .

Соединим точки  $I$  и  $F$ .

Полученный четырехугольник  $EFIH$  будет искомым сечением.

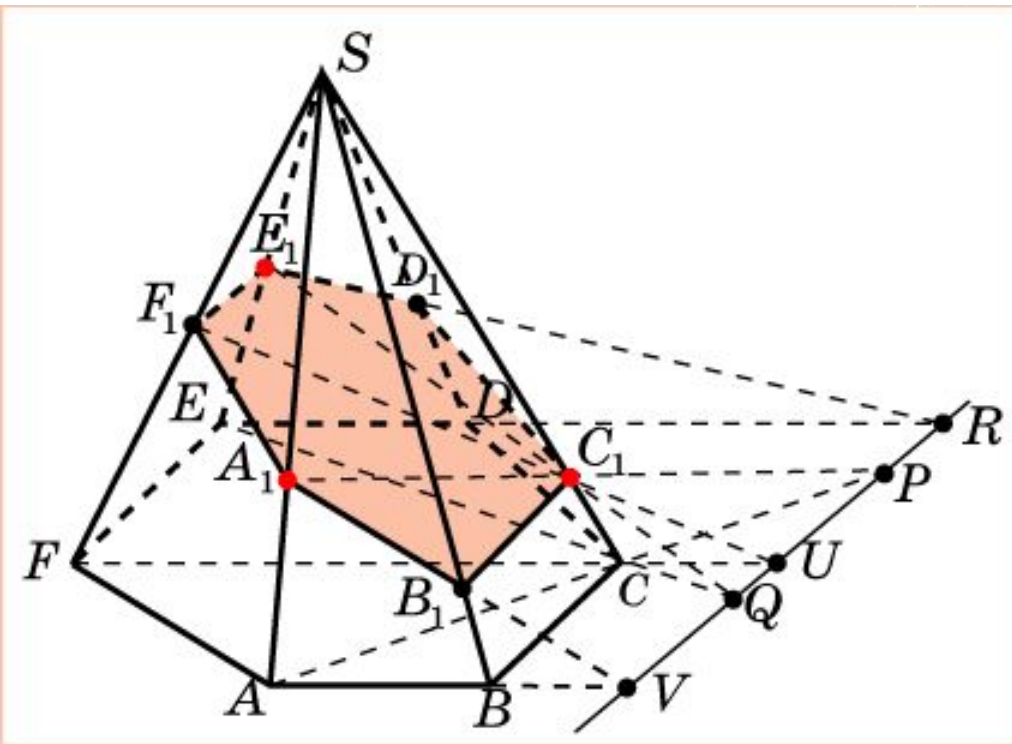
Построить сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, параллельной  $BD$  и проходящей через точки  $E, F$ .



**Решение.** Проведем прямую  $EF$  и обозначим  $Q$  ее точку пересечения с  $AC$ . Проведем прямую  $SO$  и обозначим  $P$  её точку пересечения с  $EF$ . Через точку  $P$  проведем прямую  $GH$ , параллельную  $BD$ . Соединим точки  $F, G, E, H$ .

Полученный четырехугольник  $FGEN$  будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды  $SAB CDE F$  плоскостью, проходящей через точки  $A_1, C_1, E_1$ .



**Решение.** Найдем точку пересечения  $P$  прямой  $A_1C_1$  с плоскостью основания. Найдем точку  $Q$  пересечения прямой  $E_1C_1$  с плоскостью основания. Прямая  $PQ$  будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости основания.

Проведем прямую  $ED$  и обозначим  $R$ , её точку пересечения с прямой  $PQ$ .

Проведем прямую  $E_1R$  и обозначим  $D_1$  её точку пересечения с  $SD$ .

Аналогичным образом находятся точки  $F_1$  и  $B_1$ .

Шестиугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  будет искомым сечением.